



Tema 7: Estática del sólido rígido

FISICA I, 1º, Grado en Ingeniería Civil

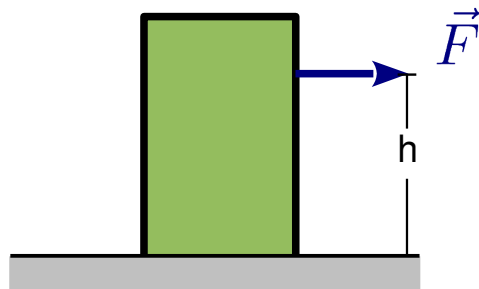
Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

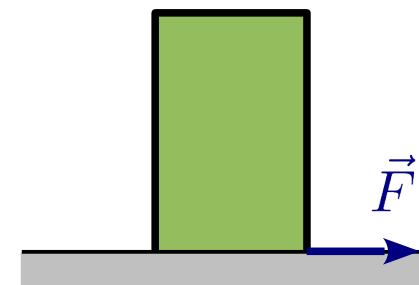
Universidad de Sevilla

- **Introducción**
- Sólido rígido
- Sistemas de vectores deslizantes
- Condiciones de equilibrio estático
- Desvinculación de sólidos
- Principio de fragmentación
- Sistemas hiperestáticos e impropriamente ligados
- Rozamiento seco
- Vuelco inminente
- Elasticidad

- Un sólido tiene **más** grados de libertad que una partícula
 - Puede trasladarse
 - Puede rotar
 - Puede deformarse
- El movimiento de un sólido está determinado por la **magnitud** de las fuerzas que actúan sobre él y **donde** se aplican



Vuelca



Desliza

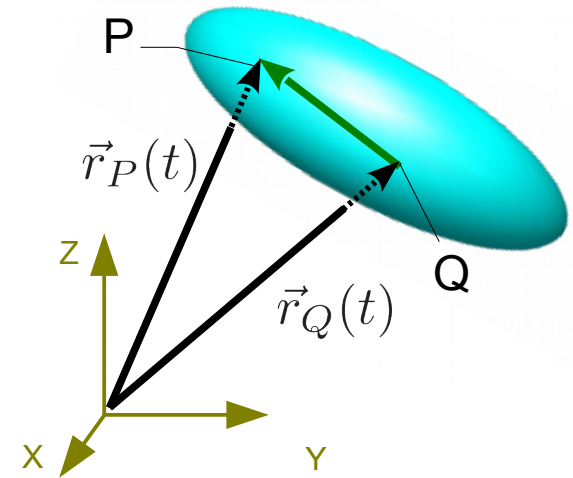
- Un sólido sometido a la acción de fuerzas está en equilibrio cuando no se traslada, ni rota, ni se deforma

- Introducción
- **Sólido rígido**
- Sistemas de vectores deslizantes
- Condiciones de equilibrio estático
- Desvinculación de sólidos
- Teorema de las tres fuerzas
- Principio de fragmentación
- Sistemas hiperestáticos e impropriamente ligados
- Rozamiento seco
- Vuelco inminente
- Elasticidad

- Un sólido rígido es un sólido **no deformable**

- La distancia entre cualquier par de puntos no cambia cuando el sólido se mueve en el espacio

$$|QP(t)|^2 = |\vec{r}_P(t) - \vec{r}_Q(t)|^2 = (C_{PQ})^2 \quad (\text{cte})$$



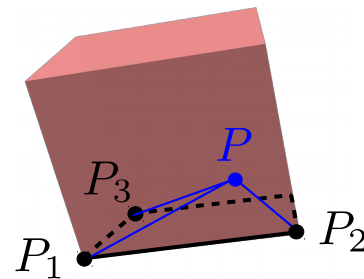
- Las distancias relativas se mantienen bajo la acción de cualquier fuerza
 - Es una idealización
- Su posición y orientación queda definida dados 3 de sus puntos no alineados

$$P_1(x_1, y_1, z_1), \quad P_2(x_2, y_2, z_2), \quad P_3(x_3, y_3, z_3)$$

→ 9 parámetros

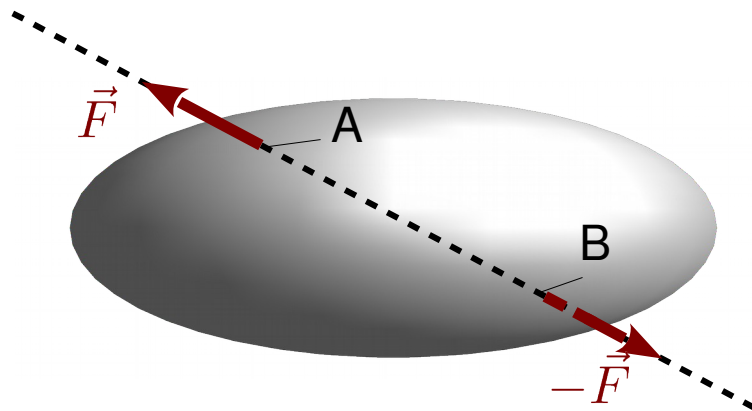
$$|\overrightarrow{P_2P_1}| = C_{P_1P_2}, \quad |\overrightarrow{P_3P_1}| = C_{P_1P_3}, \quad |\overrightarrow{P_3P_2}| = C_{P_2P_3}$$

→ 3 condiciones de rigidez

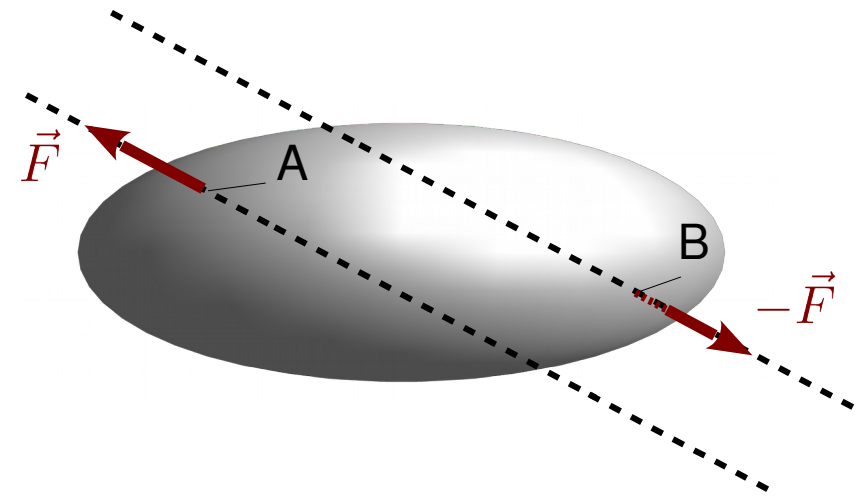


El sólido rígido tiene 6 grados de libertad

Si en dos puntos cualesquiera de un sólido rígido en equilibrio mecánico se aplican sendas fuerzas de módulos iguales e idéntica recta soporte, pero de sentidos opuestos, el equilibrio del sólido no se ve alterado

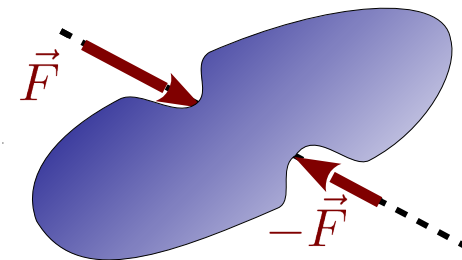
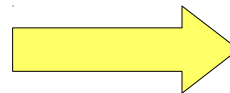
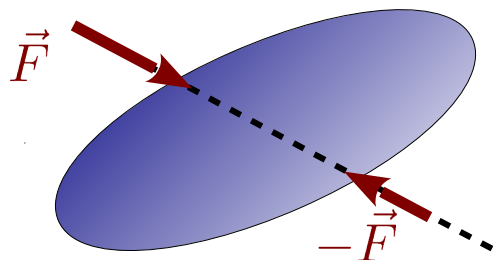


Equilibrio

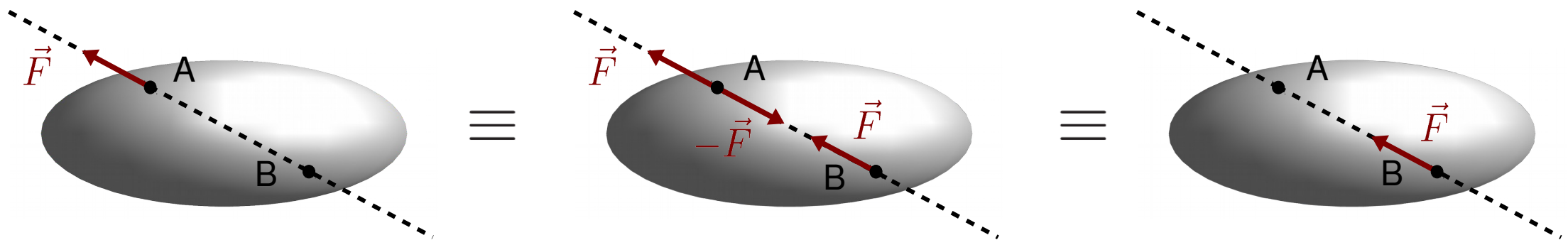


No equilibrio

- Si el sólido es deformable no hay equilibrio en ningún caso



Las fuerzas aplicadas a un sólido rígido se comportan como vectores deslizantes

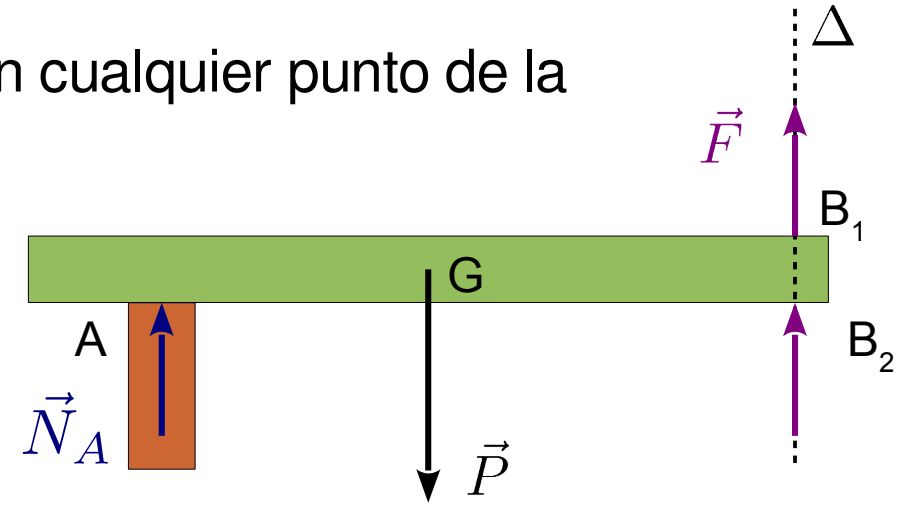


- Es válido en Estática y en Dinámica
- Es válido para fuerzas activas y de reacción vincular
- El conjunto de fuerzas aplicadas a un sólido rígido se pueden tratar como un **sistema de vectores deslizantes**

- Introducción
- Sólido rígido
- **Sistemas de vectores deslizantes**
- Condiciones de equilibrio estático
- Desvinculación de sólidos
- Teorema de las tres fuerzas
- Principio de fragmentación
- Sistemas hiperestáticos e impropriamente ligados
- Rozamiento seco
- Vuelco inminente
- Elasticidad

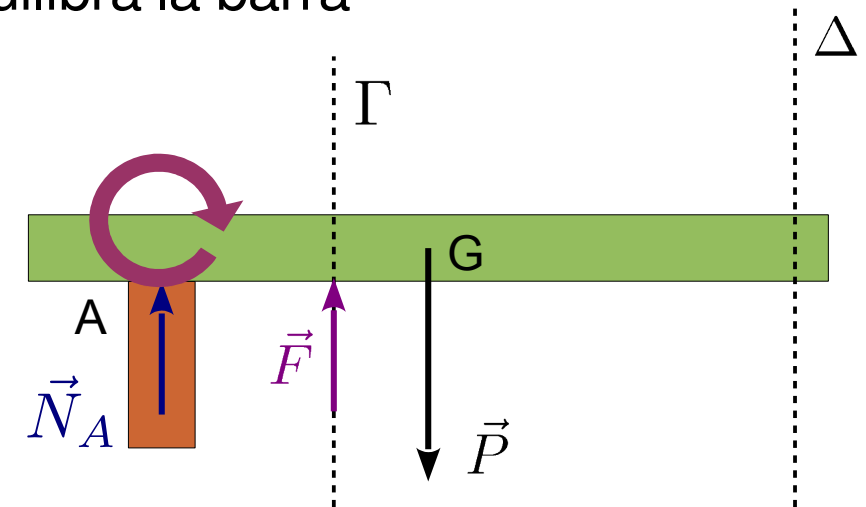
- La fuerza $\vec{F}$ equilibra la barra al ser aplicada en cualquier punto de la recta Δ

Vector deslizante



- La misma fuerza aplicada en otro punto no equilibra la barra

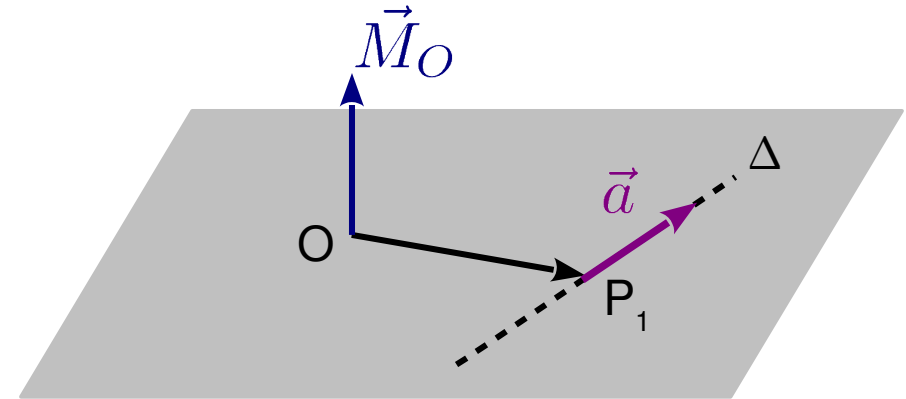
Son vectores deslizantes distintos



- Producen efectos mecánicos diferentes
- En un vector deslizante hay que especificar la recta soporte $(\vec{a}; \Delta)$
 - El vector $\vec{a}$ considerado como vector libre se llama cursor del vector deslizante

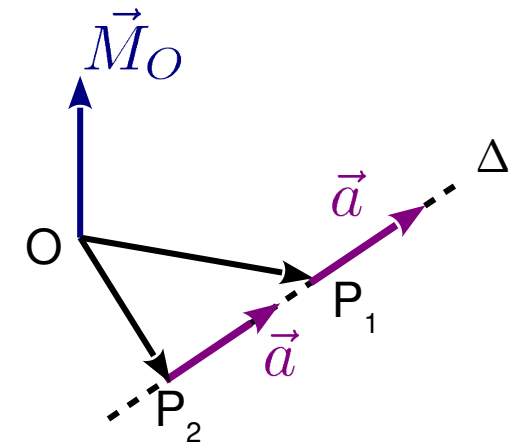
- La recta soporte puede especificarse usando el momento del vector respecto a un punto

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP_1} \times \vec{a}$$



- El momento es el mismo para todos los puntos P_1 de la recta

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_2} \times \vec{a} &= (\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2}) \times \vec{a} \\ &= \overrightarrow{OP_1} \times \vec{a} + \overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{a} \\ &= \overrightarrow{OP_1} \times \vec{a} \\ &= \vec{M}_O\end{aligned}$$



- Es perpendicular al plano que contiene a la recta y pasa por el punto O
- Permite identificar la recta soporte $(\vec{a}; \Delta) \equiv (\vec{a}; P_\Delta) \equiv (\vec{a}; \vec{M}_O)$

- Es un conjunto de vectores deslizantes

$$S \equiv \{(\vec{F}_i; \Delta_i)\}_{i=1}^n$$

- Resultante

$$\vec{R}(S) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \text{Es un vector libre}$$

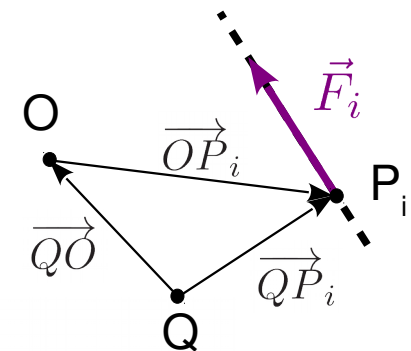
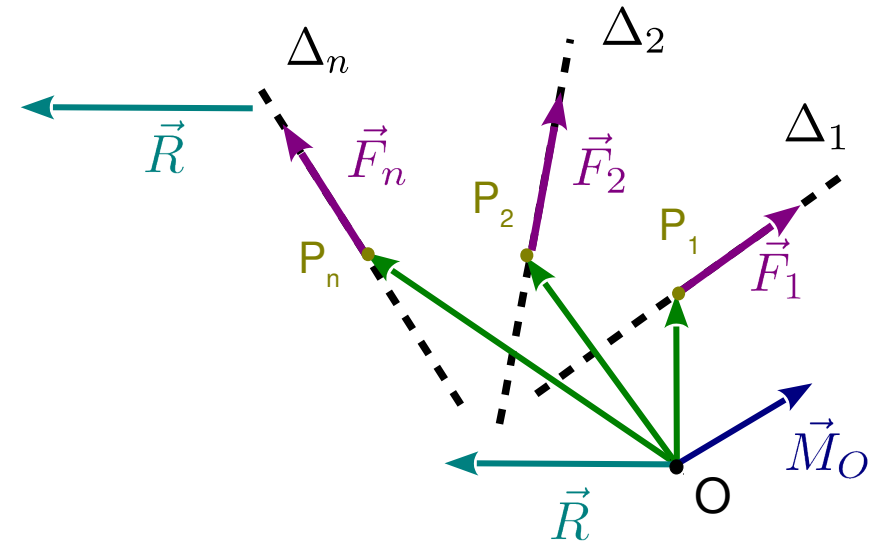
- Momento resultante en un punto

$$\vec{M}^O(S) = \sum_{i=1}^n \vec{M}^O(\vec{F}_i; \Delta_i) = \sum_{i=1}^n \vec{OP}_i \times \vec{F}_i \quad \text{Es un vector ligado al punto O}$$

- Relación entre el momento resultante en dos puntos O, Q

$$\vec{M}^Q(S) = \vec{M}^O(S) + \vec{QO} \times \vec{R} = \vec{M}^O(S) + \vec{R} \times \vec{OQ}$$

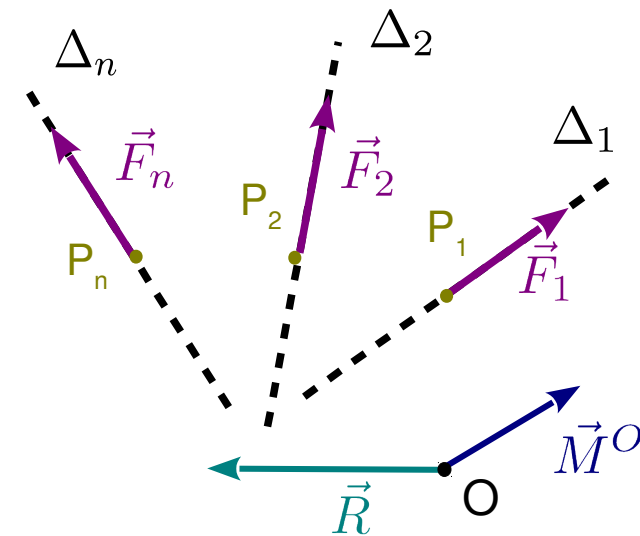
$$\begin{aligned} \vec{M}^Q(S) &= \sum_{i=1}^n \vec{QP}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{QO} + \vec{OP}_i) \times \vec{F}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{QO} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{OP}_i \times \vec{F}_i = \vec{QO} \times \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) + \vec{M}^O = \vec{QO} \times \vec{R} + \vec{M}^O \end{aligned}$$



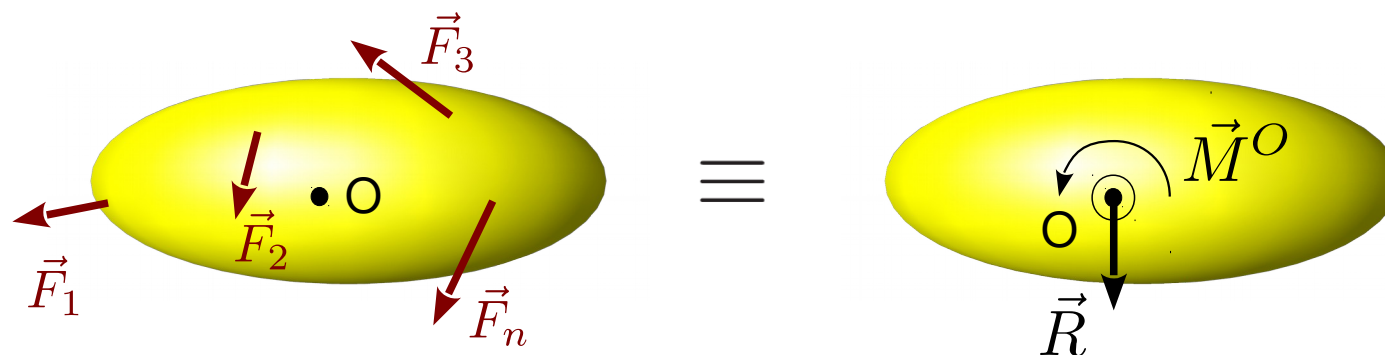
- La reducción en un punto O es el momento resultante en O y la resultante aplicada en O

$$S_O^{\text{red}} = \{\vec{R}(S), \vec{M}^O(S)\}$$

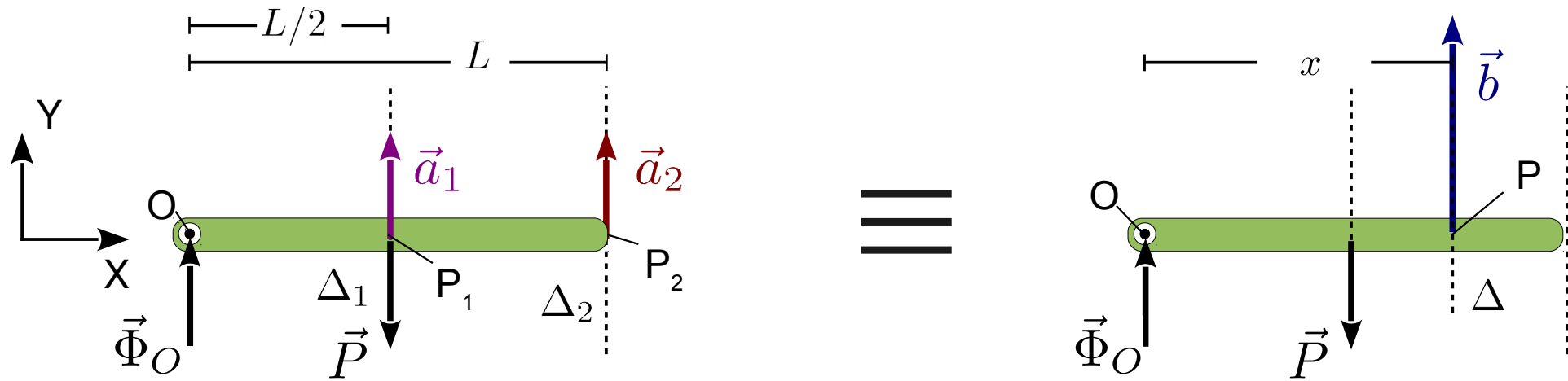
O es el centro de reducción



- Dos sistemas con la misma reducción en un punto son **equivalentes**
 - Si la reducción es la misma en un punto, es la misma en todos
- Cualquier s.v.d. puede sustituirse por un vector y un par



- Aplic: Cualquier conjunto de fuerzas actuando sobre un sólido rígido puede reducirse a una fuerza y un par dinámicamente equivalentes

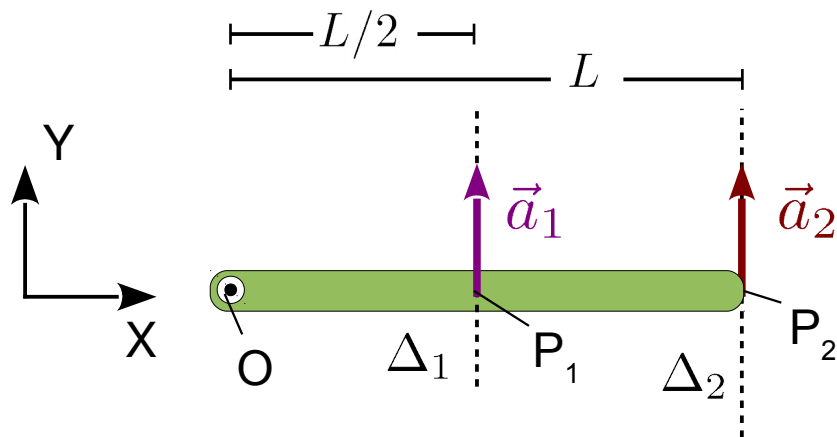


- El sistema de dos fuerzas de la izquierda equilibra la barra apoyada en O
- ¿Cuanto debe valer x y $\vec{b}$ para que la fuerza de la derecha tenga el mismo efecto que el sistema de la izquierda?

- Reducción en O del sistema de dos fuerzas

$$\vec{a}_1 = a \vec{j}$$

$$\vec{a}_2 = a \vec{j}$$



$$\vec{R} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

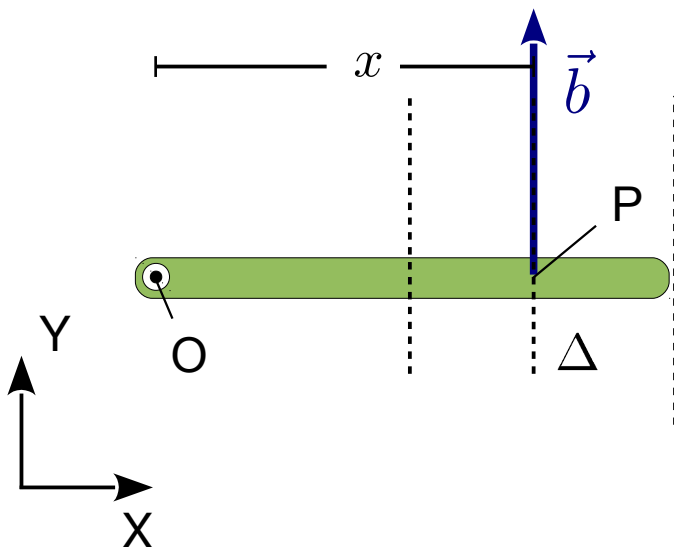
$$\vec{R} = 2a \vec{j}$$

$$\vec{M}_{O1} = \overrightarrow{OP_1} \times \vec{a}_1 = \frac{La}{2} \vec{k}$$

$$\vec{M}_{O2} = \overrightarrow{OP_2} \times \vec{a}_2 = La \vec{k}$$

$$\vec{M}_O = \frac{3La}{2} \vec{k}$$

- La reducción en O de los dos sistemas ha de ser la misma



$$\vec{R} = \vec{b} \implies \vec{b} = 2a \vec{j}$$

$$\vec{M}_O(\vec{b}) = \vec{M}_O = \frac{3La}{2} \vec{k}$$

$$\vec{M}_O(\vec{b}) = \overrightarrow{OP} \times \vec{b} = x2a \vec{k}$$

$$\implies x = \frac{3L}{4}$$

■ Par de vectores

- 2 vectores con rectas soportes paralelas, igual módulo y sentido contrario

■ Propiedades

- Resultante nula $\vec{R} = \vec{0}$

- El momento es el mismo respecto a cualquier punto

$$\vec{M}^P = \vec{M}^Q \quad \forall P, Q$$

- Módulo del momento (d es el brazo) $|\vec{M}^O| = |\vec{F}| d$

- Es perpendicular al plano que contiene a las dos rectas

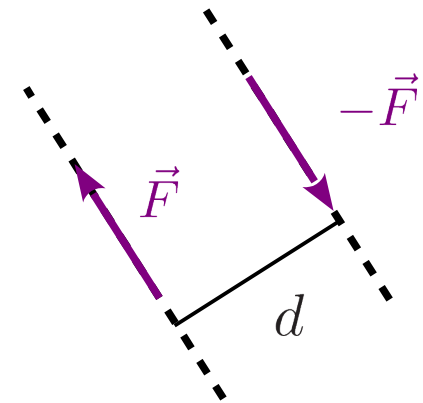
- Un par de fuerzas tiende a producir una rotación

- Volante de un coche, tapón de rosca

- Todos los pares con el mismo momento son equivalentes

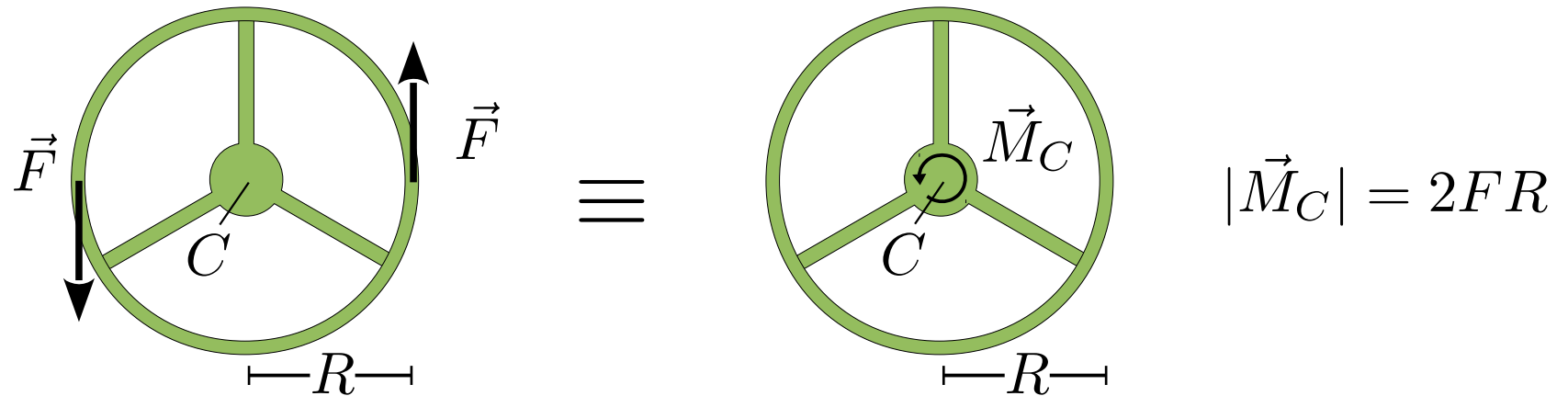
- Producen el mismo efecto mecánico

- Se pueden representar con el momento del par $\vec{M}^O$

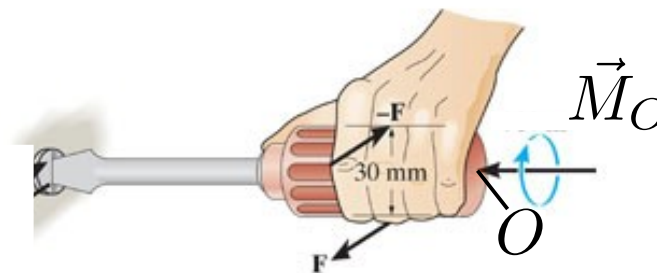


- Par de vectores: aplicaciones

- Volante de un coche



- Destornillador



■ Vectores concurrentes

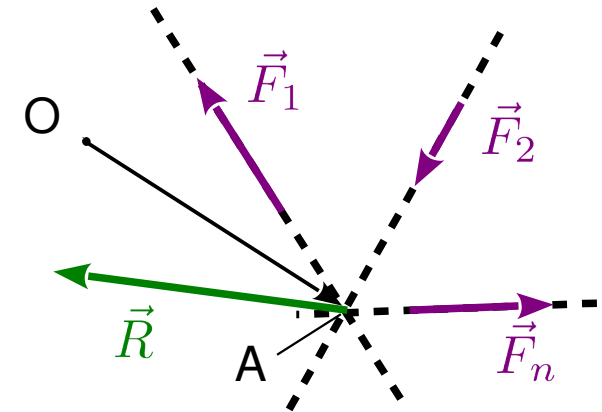
- Las rectas soportes se cortan en un punto
- El momento resultante respecto a A es nulo

$$\vec{M}^A = \vec{0}$$

- El momento resultante en un punto O es el momento de la resultante situada en A

$$\vec{M}^O = \vec{OA} \times \vec{R}$$

Teorema de Varignon



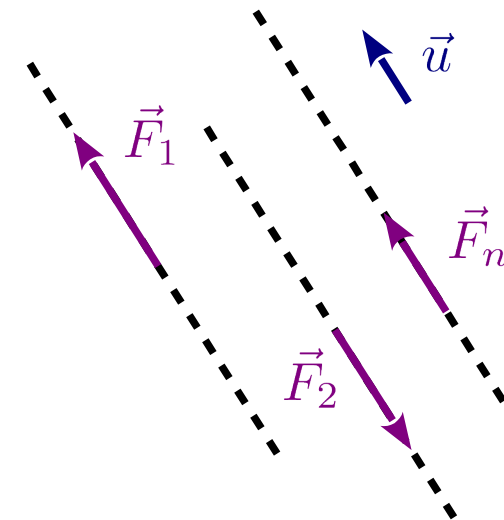
■ Vectores paralelos

- Todas las rectas soporte son paralelas $\vec{F}_i = F_i \vec{u}$

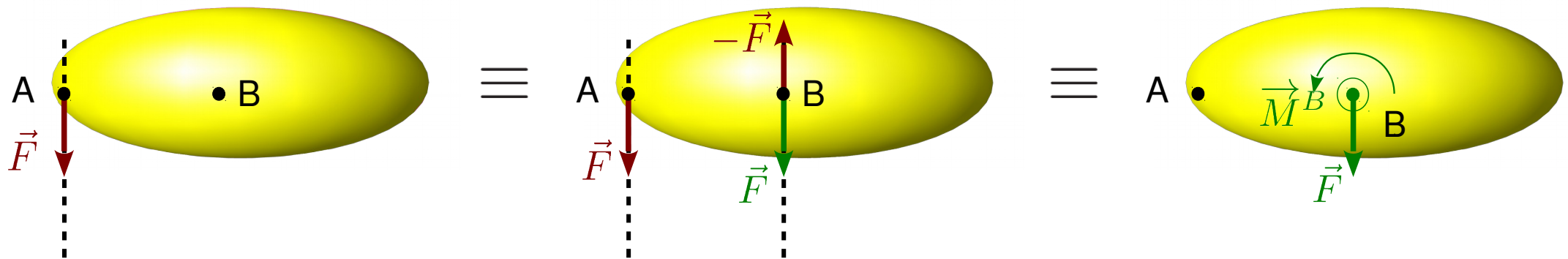
- El momento en O es perpendicular a **u**

- Centro del sistema
$$\vec{OC} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \vec{OP}_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

- El momento resultante en O es el momento de la resultante situada en C

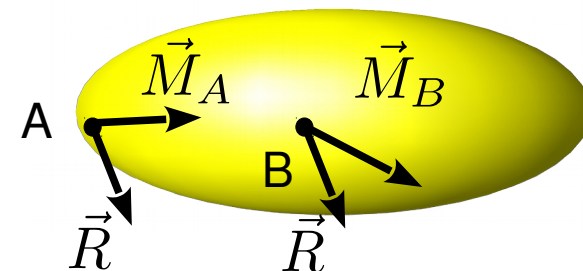


- Una fuerza aplicada en un punto se puede trasladar a otro punto añadiendo un par de fuerzas



- El momento del par es el de la fuerza original respecto a B: $\vec{M}^B = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}$
- Son equivalentes en el sentido de que producen el mismo efecto mecánico sobre un sólido rígido
- No son equivalentes en lo que respecta a las tensiones y deformaciones internas del sólido
 - Relevante para determinar si el sólido se rompe

- Al cambiar el punto de reducción de un s.v.d., cambia el momento en el punto
- Esto define un **campo de momentos**



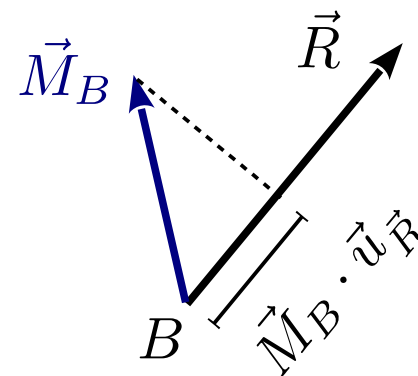
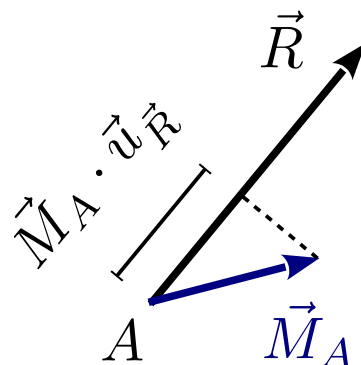
- Los momentos en dos puntos están relacionados a través de la **ecuación del campo de momentos**

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{R} \times \vec{AB}$$

- Hay dos invariantes importantes (cosas que valen lo mismo en cualquier punto de reducción)

■ Invariante vectorial: $\vec{R}$

■ Invariante escalar: $\vec{M}_A \cdot \vec{R}$



■ Dem $\vec{M}_B \cdot \vec{R} = (\vec{M}_A + \vec{R} \times \vec{AB}) \cdot \vec{R} = \vec{M}_A \cdot \vec{R} + (\vec{R} \times \vec{AB}) \cdot \vec{R} = \vec{M}_A \cdot \vec{R}$

0

- Los s.v.d. se pueden clasificar en términos de la nulidad o no de los dos invariantes

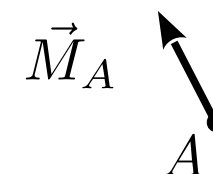
- Tipo I** $\vec{R} = \vec{0}, \quad \vec{M}_A = \vec{0}$

- Se llama sistema nulo

A

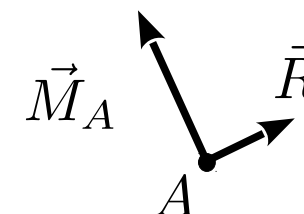
- Tipo II** $\vec{R} = \vec{0}, \quad \vec{M}_A \neq \vec{0}$

- Se puede representar por un par de fuerzas



- Tipo III** $\vec{R} \neq \vec{0}, \quad \vec{M}_A \cdot \vec{R} = 0$

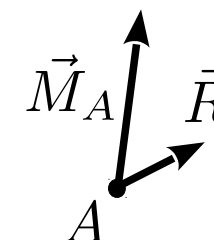
- Existe un punto en el cual la reducción consta de un sólo vector suelto



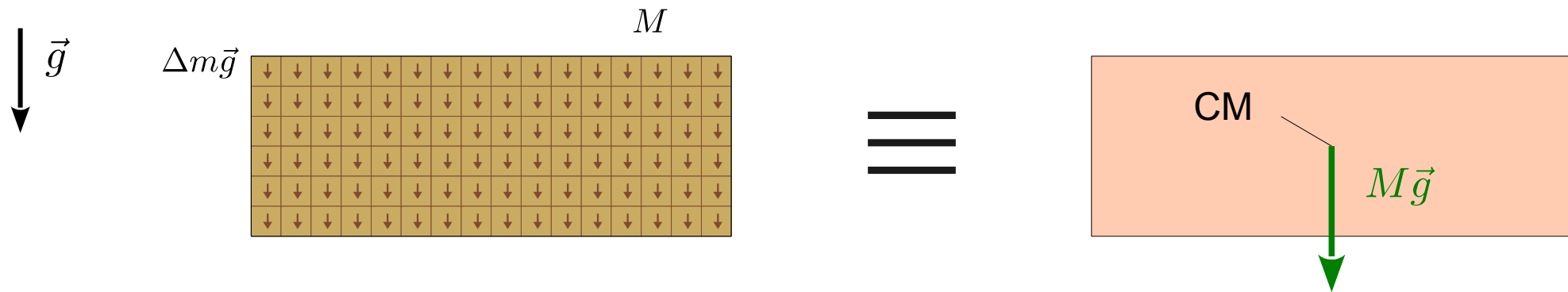
- Ej: Vectores concurrentes en el punto de concurrencia

- Tipo IV** $\vec{R} \neq \vec{0}, \quad \vec{M}_A \cdot \vec{R} \neq 0$

- En cualquier punto la reducción consta de un vector suelto y un par



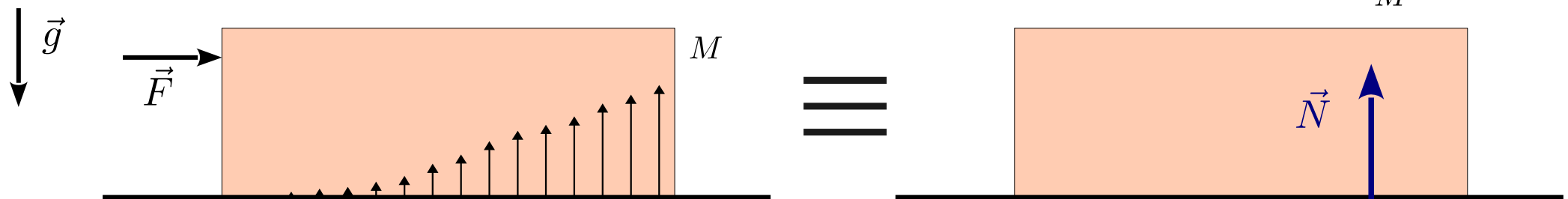
- ¿Por qué se aplica el peso de un cuerpo en su centro de masas?



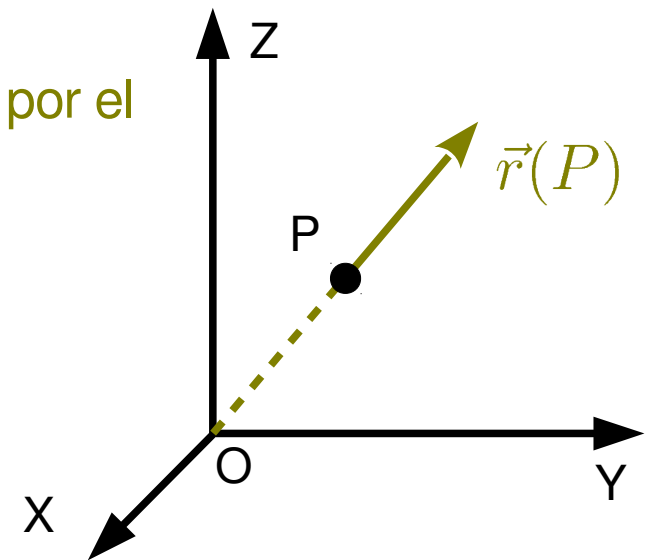
- Fuerza de reacción sobre un bloque en reposo sobre un plano



- ¿Y si aplicamos una fuerza horizontal?



- El vector está ligado a un punto
 - Ejemplo: a cada punto del espacio se le asigna un vector de posición
 - El resultado de realizar el desplazamiento indicado por el vector depende del punto de partida
 - Ejemplo: momento de un vector deslizante respecto a un punto
 - Si cambia el punto, cambia la recta soporte del vector deslizante
 - Ejemplo: momento cinético de una partícula respecto de un punto
 - Ejemplo: momento de una fuerza respecto de un punto



- Introducción
- Sólido rígido
- Sistemas de vectores deslizantes
- Condiciones de equilibrio estático
- Desvinculación de sólidos
- Teorema de las tres fuerzas
- Principio de fragmentación
- Sistemas hiperestáticos e impropriamente ligados
- Rozamiento seco
- Vuelco inminente
- Elasticidad

Un sólido rígido está en equilibrio mecánico si y sólo si el sistema de fuerzas externas (vectores deslizantes) tiene resultante nula y momento nulo respecto a un punto

- Cuando $\mathbf{R}$ es nula, si el momento respecto un punto es nulo, lo es para todos los puntos
- Se dice que el sistema de vectores deslizantes es nulo

■ Distinguimos el sólido libre y el vinculado

Tipo de sólido	Número de grados de libertad	Fuerzas externas	Condiciones de equilibrio
libre	$r=6$	$\left\{ (\vec{F}_i; P_i) \right\}_{i=1}^n$	$\begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \\ \vec{M}^O = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OP_i} \times \vec{F}_i = \vec{0} \end{cases}$
vinculado	$r < 6$	$\left\{ (\vec{F}_i; P_i) \right\}_{i=1}^n$ $\left\{ (\vec{\Phi}_k; Q_k) \right\}_{k=1}^m$	$\begin{cases} \vec{R} + \vec{\Phi} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{k=1}^m \vec{\Phi}_k = \vec{0} \\ \vec{M}^O + \vec{\Gamma}^O = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OP_i} \times \vec{F}_i + \sum_{k=1}^m \overrightarrow{OQ_k} \times \vec{\Phi}_k = \vec{0} \end{cases}$

- La reducción de las fuerzas internas del sólido rígido es nula en cualquier punto (3ª Ley de Newton)
- La reducción de las fuerzas externas activas es la **reducción mecánica**

$$S_{r.m.} \equiv \{\vec{R}; \vec{M}^O\} \quad \left| \quad \begin{aligned} \vec{R} &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \\ \vec{M}^O &= \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OP_i} \times \vec{F}_i \end{aligned} \right.$$

- La reducción de las fuerzas de reacción vincular es la **reducción vincular**

$$S_{r.v.} \equiv \{\vec{\Phi}; \vec{\Gamma}^O\} \quad \left| \quad \begin{aligned} \vec{\Phi} &= \sum_{i=1}^n \vec{\Phi}_i \\ \vec{\Gamma}^O &= \sum_{j=1}^s \overrightarrow{OQ_j} \times \vec{\Phi}_j \end{aligned} \right.$$

- Introducción
- Sólido rígido
- Sistemas de vectores deslizantes
- Condiciones de equilibrio estático
- **Desvinculación de sólidos**
- Teorema de las tres fuerzas
- Principio de fragmentación
- Sistemas hiperestáticos e impropriamente ligados
- Rozamiento seco
- Vuelco inminente
- Elasticidad

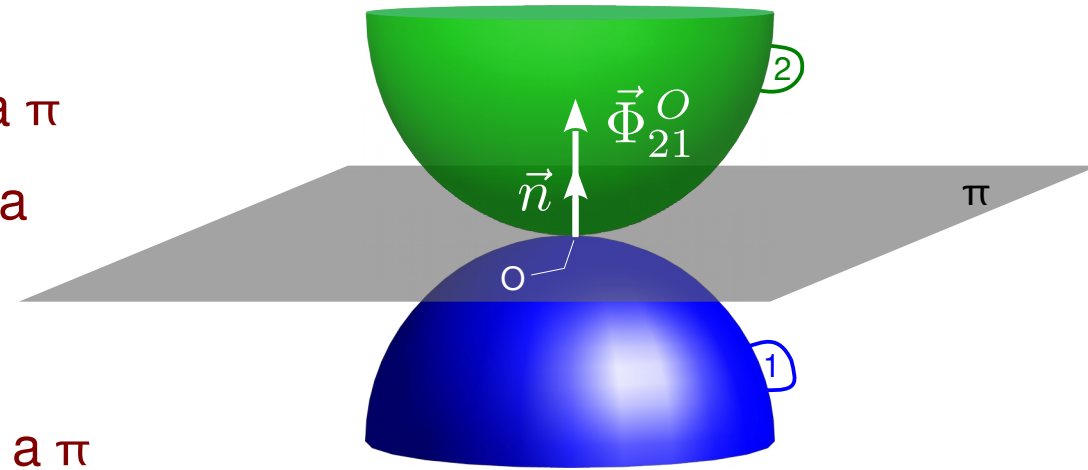
- Consiste en sustituir los vínculos por fuerzas y momentos de reacción vincular que hacen que el vínculo se mantenga
- Siempre se puede construir una reducción vincular en cualquier punto

$$S_{r.v.} \equiv \{\vec{\Phi}; \vec{\Gamma}^O\}$$

- Φ es la fuerza resultante de reacción vincular
- Γ^O es el momento resultante de las fuerzas de reacción vincular en el punto O
- En general la reducción vincular tiene 6 componentes independientes
- Procedimiento general para construir la reducción vincular
 - Para prohibir u ofrecer resistencia a la **traslación** de un sólido en una dirección se introduce **una f.r.v.** en dicha dirección
 - Para prohibir u ofrecer resistencia a la **rotación** de un sólido alrededor de un eje se introduce **un momento de fuerza** (de reacción vincular) en la dirección de dicho eje

- Dos sólidos en contacto en un punto y sin rozamiento

- Se permite la rotación paralela a π (rodadura), la rotación perpendicular a π (pivotamiento) y la traslación paralela a π (deslizamiento)
- Se prohíbe la traslación perpendicular a π

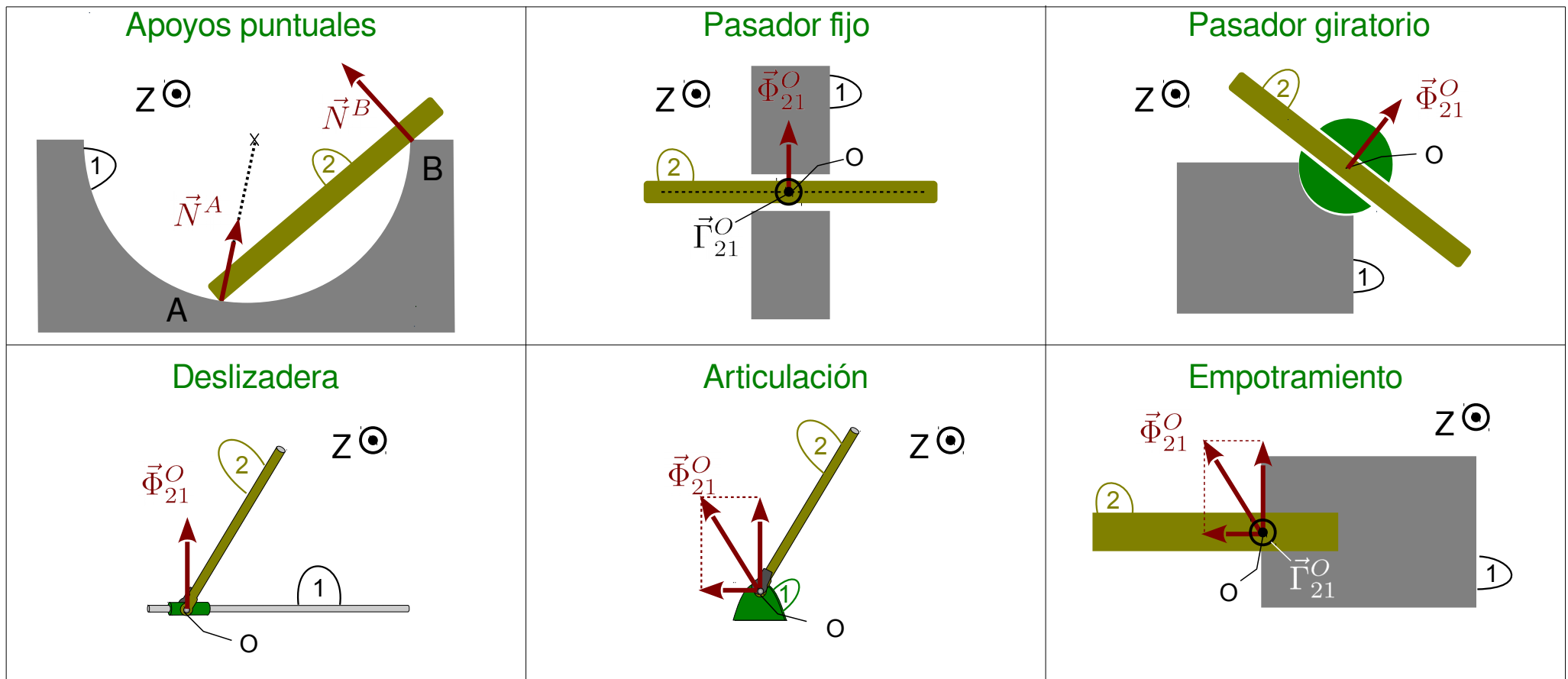


- Reducción vincular

$$S_{r.v.} \equiv \{\vec{\Phi}_{21}^O = N\vec{n}; \vec{\Gamma}_{21}^O = \vec{0}\}$$

- Es un par de sólidos vinculados
- Sólo algunos movimientos y rotaciones relativas están permitidas
- Reducciones vinculares de algunos pares de enlace bidimensionales
 - Al ser sistemas planos, la reducción tiene sólo 3 componentes independientes

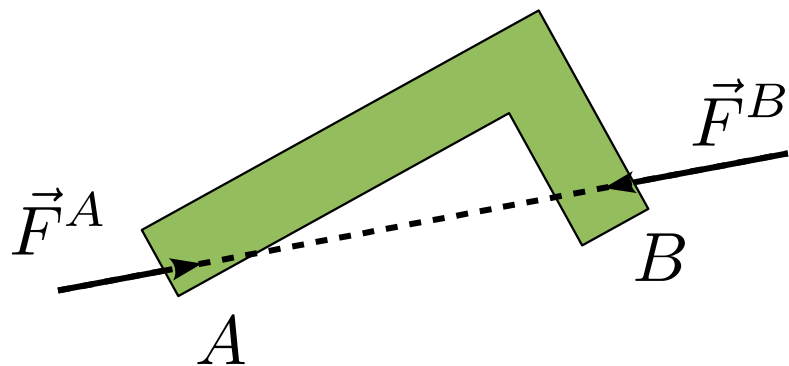
$$S_{r.v.}(O) = \{\vec{\Phi}_{21}^O = \Phi_{21x}\vec{i} + \Phi_{21y}\vec{j}; \quad \vec{\Gamma}_{21}^O = \Gamma_{21}^O \vec{k}\}$$



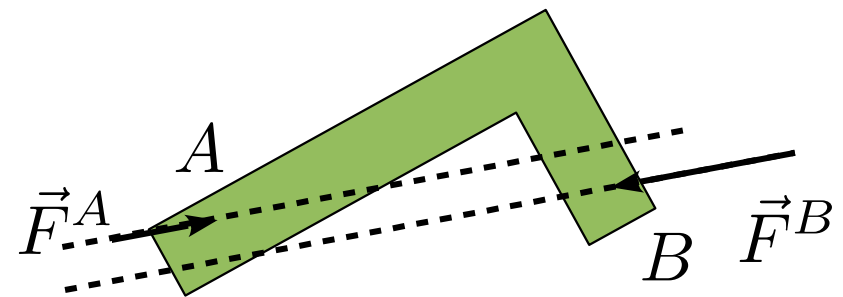
- Introducción
- Sólido rígido
- Sistemas de vectores deslizantes
- Condiciones de equilibrio estático
- Desvinculación de sólidos
- Teorema de las tres fuerzas
- Principio de fragmentación
- Sistemas hiperestáticos e impropriamente ligados
- Rozamiento seco
- Vuelco inminente
- Elasticidad

Dado un sólido rígido sometido a un sistema de dos fuerzas externas $\{(\mathbf{F}^A; \Delta_A), (\mathbf{F}^B; \Delta_B)\}$, es condición necesaria de equilibrio mecánico (aunque no suficiente) que las dos fuerzas tengan la misma magnitud y recta soporte, y sentido opuesto

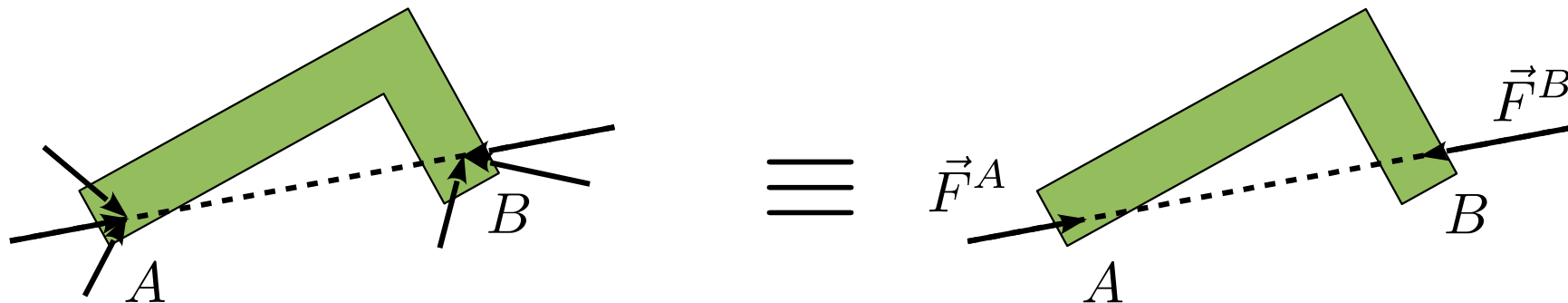
Equilibrio posible $\vec{M}^{\text{ext}} = \vec{0}$



Equilibrio imposible $\vec{M}_A^{\text{ext}} \neq \vec{0}$

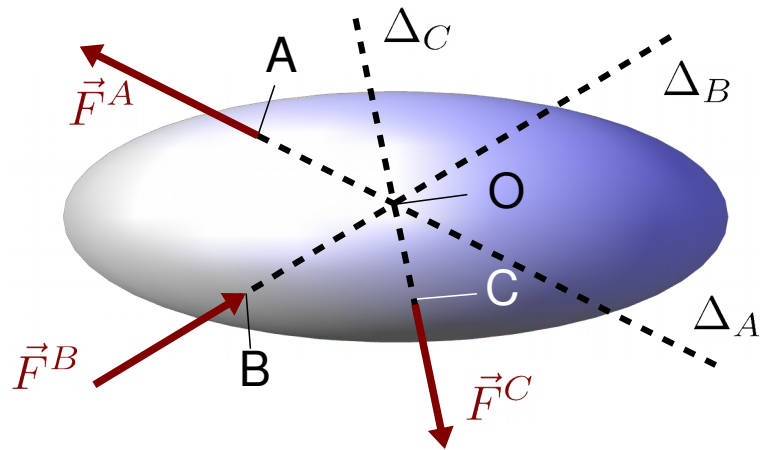


- Para que haya equilibrio además la resultante debe ser cero
- Si un conjunto de fuerzas se aplican en el mismo punto, pueden sustituirse por su resultante en ese mismo punto (Teorema de Varignon)



Dado un sólido rígido sometido a un sistema de tres fuerzas externas $\{(\mathbf{F}^A; \Delta_A), (\mathbf{F}^B; \Delta_B), (\mathbf{F}^C; \Delta_C)\}$ coplanarias y no paralelas, es condición necesaria (aunque no suficiente) de equilibrio mecánico que las tres fuerzas sean concurrentes

Equilibrio posible



Demostración

$$O \equiv \Delta_A \cap \Delta_B$$

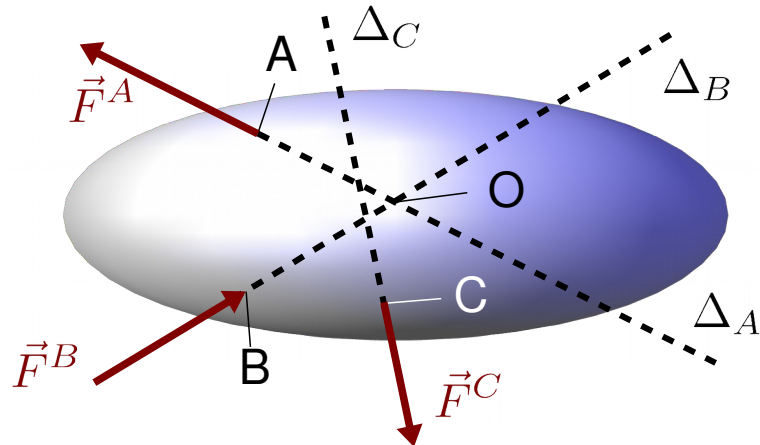
$$\text{Equilibrio} \Rightarrow \vec{M}^O = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}^O = \overrightarrow{OC} \times \vec{F}^C = \vec{0}$$

Para que haya equilibrio debe cumplirse también

$$\vec{F}^A + \vec{F}^B + \vec{F}^C = \vec{0}$$

Válido para fuerzas activas y f.r.v.

Equilibrio imposible



- Introducción
- Sólido rígido
- Sistemas de vectores deslizantes
- Condiciones de equilibrio estático
- Desvinculación de sólidos
- Teorema de las tres fuerzas
- Principio de fragmentación
- Sistemas hiperestáticos e impropriamente ligados
- Rozamiento seco
- Vuelco inminente
- Elasticidad

Cuando se realiza una partición de un sistema de puntos materiales, cada fragmento continúa en idéntico estado de equilibrio o movimiento si se sustituye el resto del sistema por las reacciones vinculares de contacto que ejerce sobre dicho fragmento

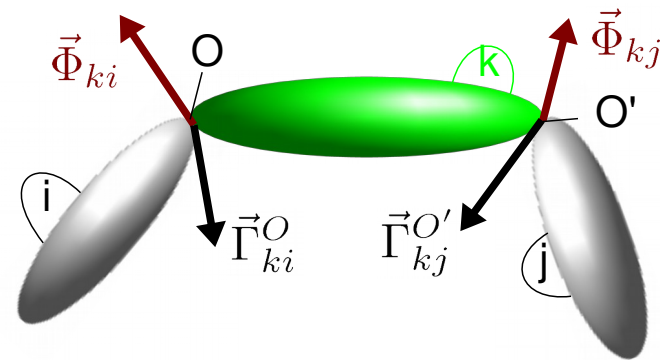
Cadena de
sólidos

$$\{\vec{\Phi}_{ki}^O; \vec{\Gamma}_{ki}^O\} \text{ par } \{ik\}$$

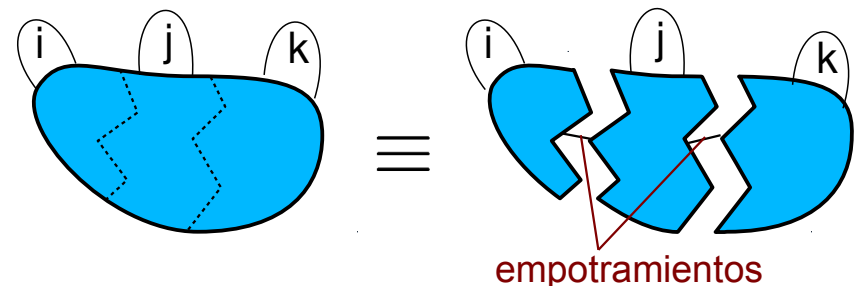
$$\{\vec{\Phi}_{kj}^{O'}; \vec{\Gamma}_{kj}^{O'}\} \text{ par } \{kj\}$$

Principio de acción y reacción

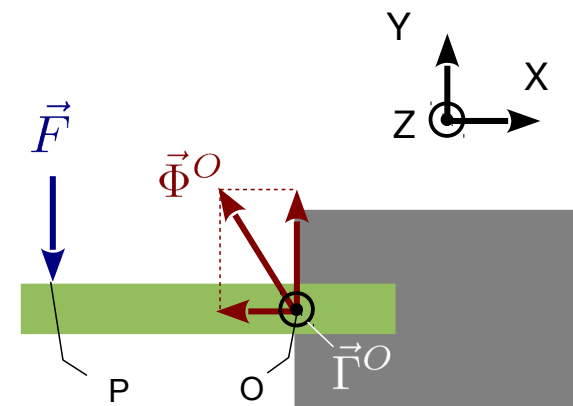
$$\begin{cases} \vec{\Phi}_{ik}^O = -\vec{\Phi}_{ki}^O \\ \vec{\Gamma}_{ik}^O = -\vec{\Gamma}_{ki}^O \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\Phi}_{jk}^{O'} = -\vec{\Phi}_{kj}^{O'} \\ \vec{\Gamma}_{jk}^{O'} = -\vec{\Gamma}_{kj}^{O'} \end{cases}$$



Un sólido rígido puede considerarse como una cadena de fragmentos sólidos empotrados



- Introducción
- Sólido rígido
- Sistemas de vectores deslizantes
- Condiciones de equilibrio estático
- Desvinculación de sólidos
- Teorema de las tres fuerzas
- Principio de fragmentación
- **Sistemas hiperestáticos e impropriamente ligados**
- Rozamiento seco
- Vuelco inminente
- Elasticidad



- En un problema bidimensional sólo obtenemos 3 ecuaciones

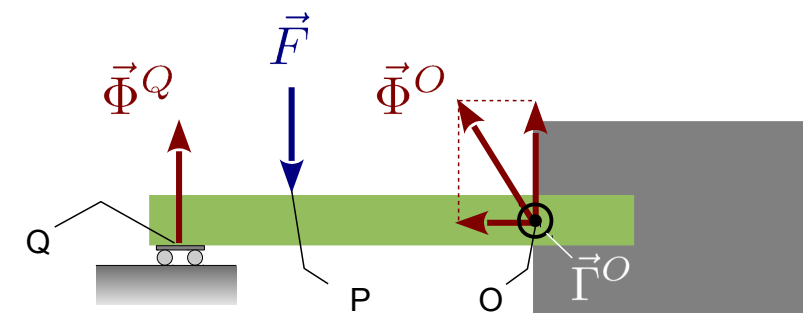
- Incógnitas: $\Phi_x^O, \Phi_y^O, \Gamma^O$ (3)

- Ecuaciones: $\vec{\Phi}^O + \vec{F} = \vec{0}$ (2)

$$\overrightarrow{OP} \times \vec{F} + \vec{\Gamma}^O = \vec{0} \quad (1)$$

Sistema isostático

- Si se añade otra ligadura hay más incógnitas que ecuaciones



$$(4)$$

- Incógnitas: $\Phi_x^O, \Phi_y^O, \Phi^Q, \Gamma^O$

- Ecuaciones: $\vec{\Phi}^O + \vec{\Phi}^Q + \vec{F} = \vec{0}$ (2)

$$\overrightarrow{OP} \times \vec{F} + \overrightarrow{OQ} \times \vec{\Phi}^Q + \vec{\Gamma}^O = \vec{0} \quad (1)$$

Sistema hiperestático

- Para resolver el problema hay que considerar la deformación del sólido
- Los vínculos hiperestáticos se usan para reforzar estructuras

- Puede ocurrir que las ligaduras no garanticen el equilibrio

- Los apoyos son lisos

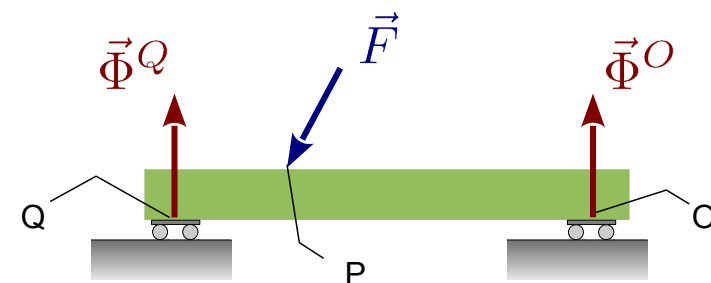
- Incógnitas $\vec{\Phi}^Q, \vec{\Phi}^O$ (2)

- Ecuaciones: $\vec{\Phi}^O + \vec{\Phi}^Q + \vec{F} = \vec{0}$ (2)
 $\vec{OP} \times \vec{F} + \vec{OQ} \times \vec{\Phi}^Q = \vec{0}$ (1)

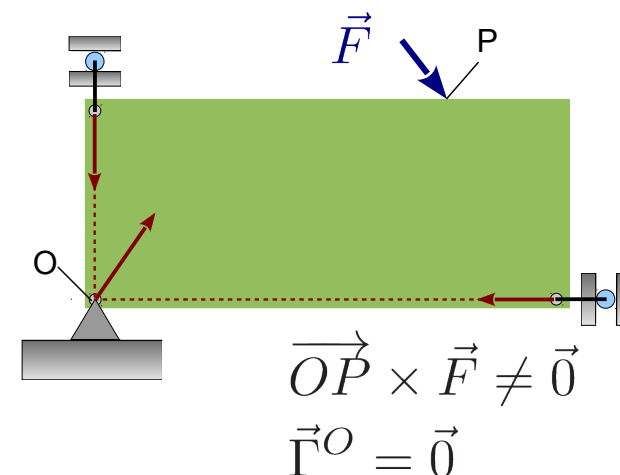
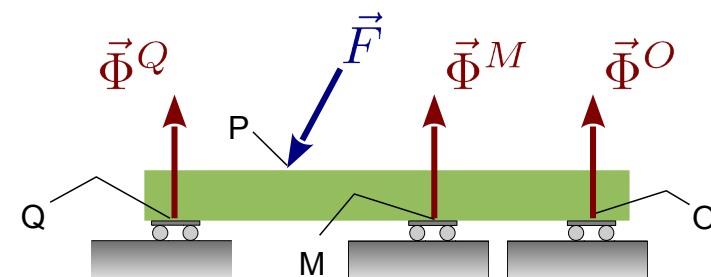
- Ocurre siempre que las reacciones en los apoyos sean paralelas o concurrentes, aunque haya tantas ligaduras como ecuaciones

- Es necesario en estructuras móviles

- Vagones de ferrocarril
- Deformación térmica de puentes



Sistema impropriamente ligado



- Introducción
- Sólido rígido
- Sistemas de vectores deslizantes
- Condiciones de equilibrio estático
- Desvinculación de sólidos
- Teorema de las tres fuerzas
- Principio de fragmentación
- Sistemas hiperestáticos e impropriamente ligados
- Rozamiento seco
- Vuelco inminente
- Elasticidad

- Los contactos reales son siempre **rugosos** (con rozamiento) y **superficiales** (existe un área de contacto)
- Hay que añadir una fuerza y un par de rozamiento en la reducción vincular

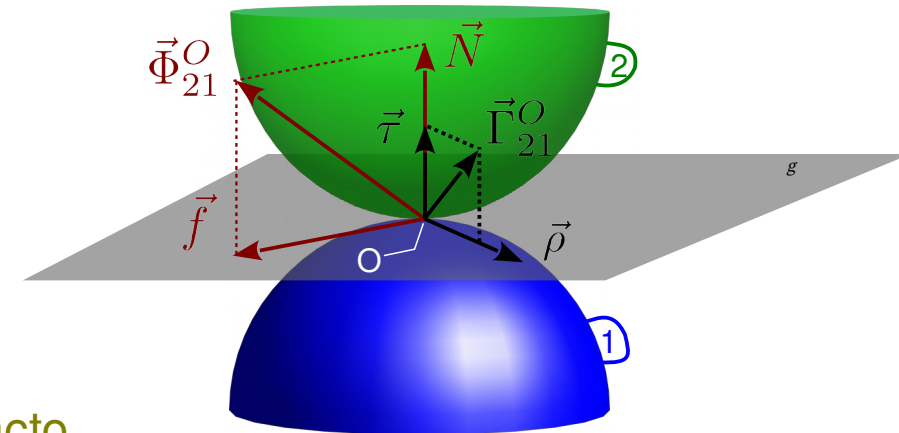
$$\{\vec{\Phi}_{21}^O = \vec{N} + \vec{f}; \vec{\Gamma}_{21}^O = \vec{\tau} + \vec{\rho}\}$$

$\vec{N}$ Fuerza de reacción normal (1 comp)

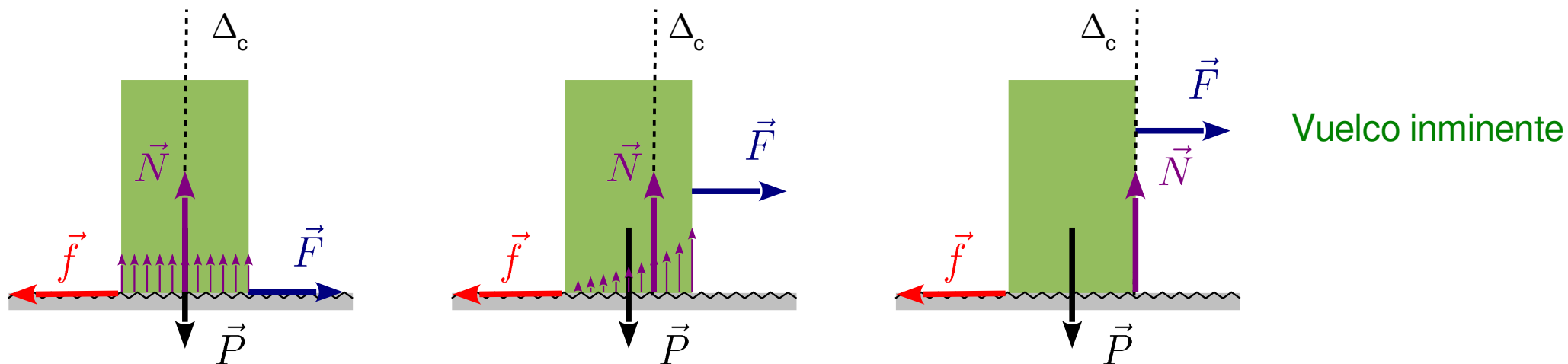
$\vec{f}$ Fuerza de resistencia al deslizamiento (2 comp)
Paralela al plano tangente en el punto de contacto

$\vec{\tau}$ Par de resistencia al pivotamiento (1 comp)
Perpendicular al plano tangente en el punto de contacto

$\vec{\rho}$ Par de resistencia a la rodadura (2 comp)
Paralelo al plano tangente en el punto de contacto



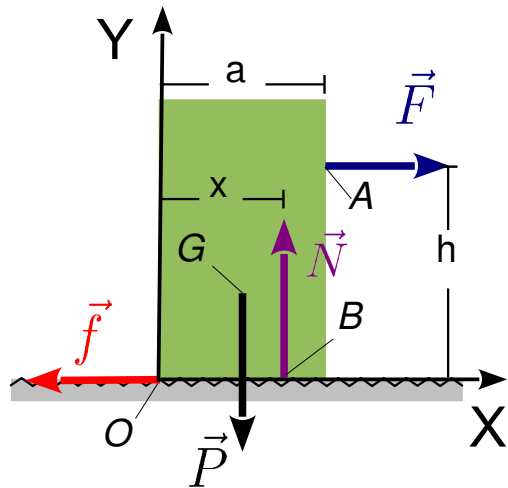
- Introducción
- Sólido rígido
- Sistemas de vectores deslizantes
- Condiciones de equilibrio estático
- Desvinculación de sólidos
- Teorema de las tres fuerzas
- Principio de fragmentación
- Sistemas hiperestáticos e impropriamente ligados
- Rozamiento seco
- Vuelco inminente
- Elasticidad



- Las fuerzas de reacción vincular se ajustan para impedir el vuelco
- El momento máximo de la reacción vincular ocurre cuando la resultante de las fuerzas normales está en los puntos extremos de contacto
- En situación de vuelco inminente la resultante de las f.r.v. está en los puntos de contacto
- Condición de equilibrio frente al vuelco

$$\left. \begin{array}{l} \vec{M}^O + \vec{\Gamma}^O = \vec{0} \quad \forall O \\ |\vec{\Gamma}^O| \leq |\vec{\Gamma}_{max}^O| \end{array} \right| \Rightarrow |\vec{M}_O| \leq |\vec{\Gamma}_{max}^O|$$

Análisis de fuerzas y momentos



$\vec{P} = -P \vec{j}$	$\overrightarrow{OG} \times \vec{P} = -\frac{aP}{2} \vec{k}$	$\vec{R} = F \vec{i} - P \vec{j}$ $\vec{\Phi} = -f \vec{i} + N \vec{j}$ $\vec{M}^O = -(Pa/2 + hF) \vec{k}$ $\vec{\Gamma}^O = xN \vec{k}$
$\vec{N} = N \vec{j}$	$\overrightarrow{OB} \times \vec{\Phi} = x \Phi \vec{k}$	
$\vec{F} = F \vec{i}$	$\overrightarrow{OA} \times \vec{F} = -hF \vec{k}$	
$\vec{f} = -f \vec{i}$	$\overrightarrow{OO} \times \vec{f} = 0 \vec{k}$	

$$\vec{R} + \vec{\Phi} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} f = F \\ N = P \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad |F| \leq \mu_e P \quad \text{Condición de no deslizamiento}$$

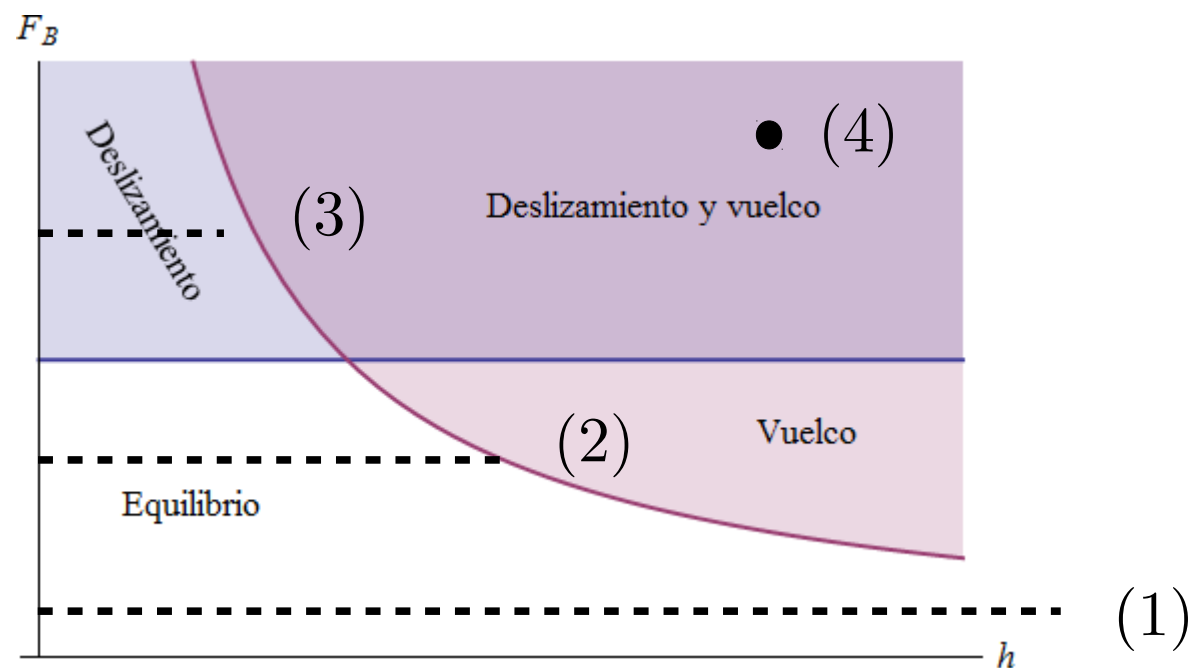
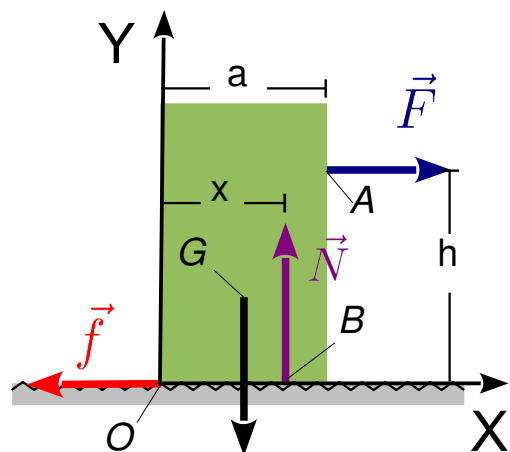
$$\vec{M}^O + \vec{\Gamma}^O = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{2} + \frac{Fh}{P} \quad \text{Determina la recta soporte de la normal para que haya equilibrio}$$

$$x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Nunca vuelca hacia la izquierda}$$

$$x \leq a \quad \Rightarrow \quad |F| \leq \frac{aP}{2h} \quad \text{Condición de no vuelco hacia la derecha}$$

El equilibrio se pierde con la condición que deja de cumplirse antes

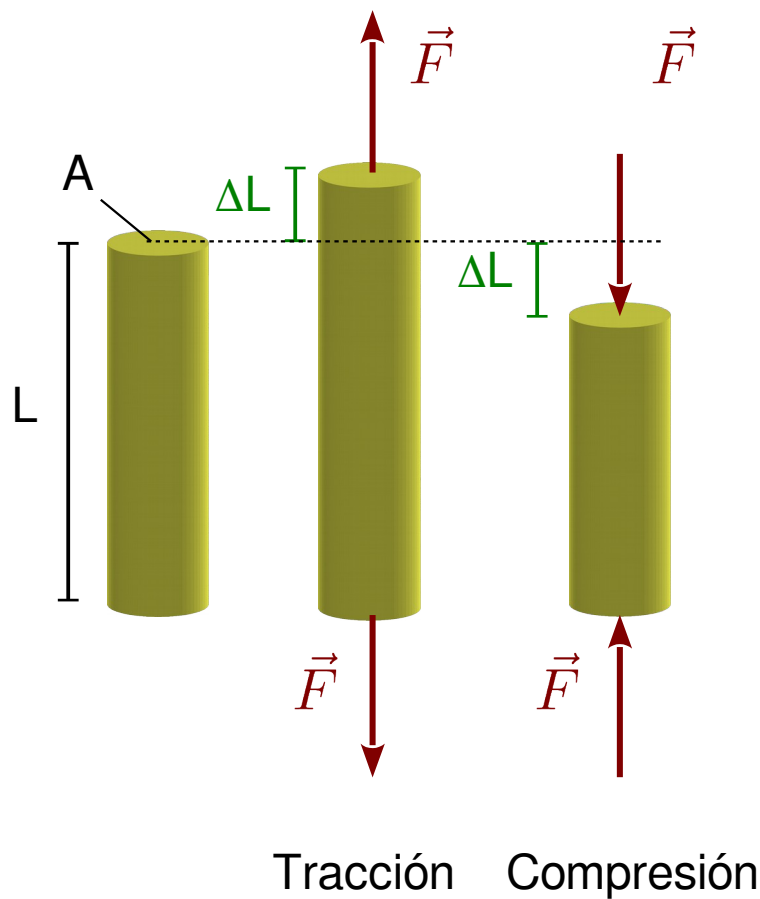
¿Vuelca o desliza?



- Fuerza moderada y baja altura → equilibrio (1)
- Fuerza moderada y gran altura → vuelca (2)
- Fuerza intensa y baja altura → desliza (3)
- Fuerza intensa y gran altura → desliza y vuelca (4)

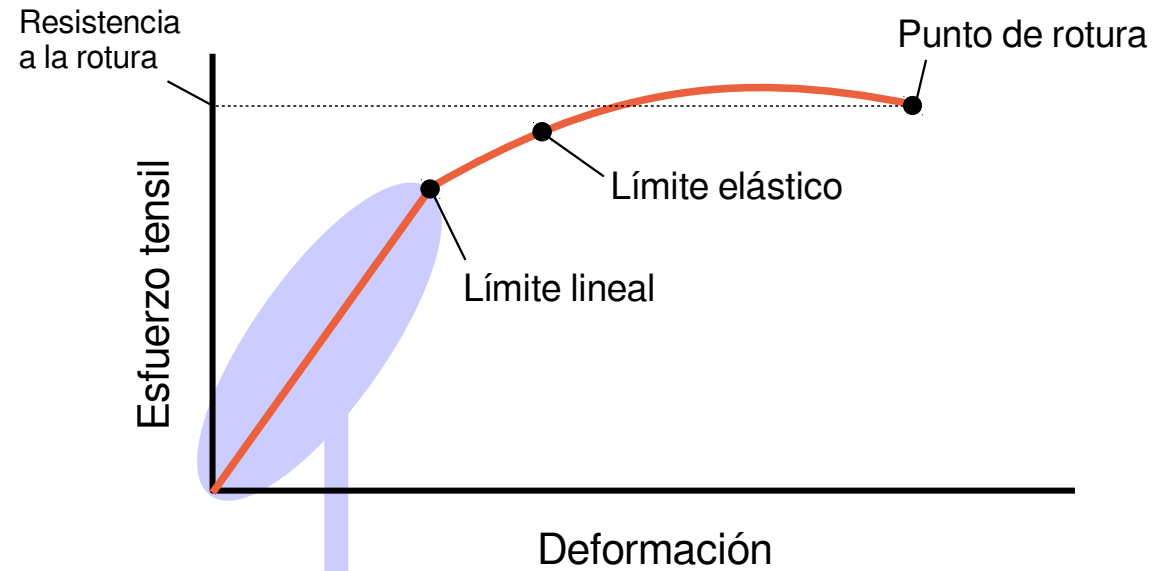
- Introducción
- Sólido rígido
- Sistemas de vectores deslizantes
- Condiciones de equilibrio estático
- Desvinculación de sólidos
- Teorema de las tres fuerzas
- Principio de fragmentación
- Sistemas hiperestáticos e impropriamente ligados
- Rozamiento seco
- Vuelco inminente
- Elasticidad

- Los sólidos reales cambian su forma al ser sometidos a fuerzas externas
- Un sólido **elástico** recupera su forma original cuando la fuerza externa cesa
- La mayoría de los materiales son elásticos hasta un cierto punto: el **límite elástico**



$$\text{Deformación} = \Delta L / L$$

$$\text{Esfuerzo tensil} = |\vec{F}| / A$$



$$Y = \frac{\text{esfuerzo tensil}}{\text{deformación}} = \frac{|\vec{F}|/A}{\Delta L/L} \quad \text{Módulo de Young}$$

Material	Y 10^9 N/m^2	Resistencia a la tracción, 10^6 N/m^2	Resistencia a la compresión, 10^6 N/m^2
Acero	200	520	520
Aluminio	70	90	
Cobre	110	230	
Hierro (forjado)	190	390	
Hormigón	23	2	17
Hueso			
Tracción	16	200	
Compresión	9		270
Latón	90	370	
Plomo	16	12	

- Cuanto mayor sea el módulo de Young menos se deforma el material
- La resistencia a la tracción es la tensión a la que se rompe bajo tracción
 - La resistencia a la tracción y el módulo de Young son dos cosas distintas
- La resistencia a la compresión es la tensión a la que se rompe bajo compresión
- En muchos materiales el módulo de Young para tracción y compresión es similar

- Una fuerza aplicada tangencialmente a la superficie se llama de **cizalladura**

- Esfuerzo de cizalladura = $\frac{|\vec{F}_S|}{A}$

- Deformación de cizalladura = $\frac{\Delta X}{L} = \tan \theta$

- Módulo de cizalladura** (o de torsión)

$$M_c = \frac{\text{esfuerzo de cizalladura}}{\text{deformación de cizalladura}} = \frac{|\vec{F}_S|/A}{\Delta X/L} = \frac{|\vec{F}_S|/A}{\tan \theta}$$

- Es aproximadamente constante para tensiones pequeñas

- Acero : $84 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

- Cobre : $42 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

