

Tema 11: Dinámica impulsiva

Mecánica Racional, 2º, Grado en Ingeniería Civil

Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

- **Introducción**
- Impulso mecánico para una partícula
- Postulados de la mecánica impulsiva
- Leyes impulsivas
- Tipos de percusiones
- Teorema de Carnot
- Choques

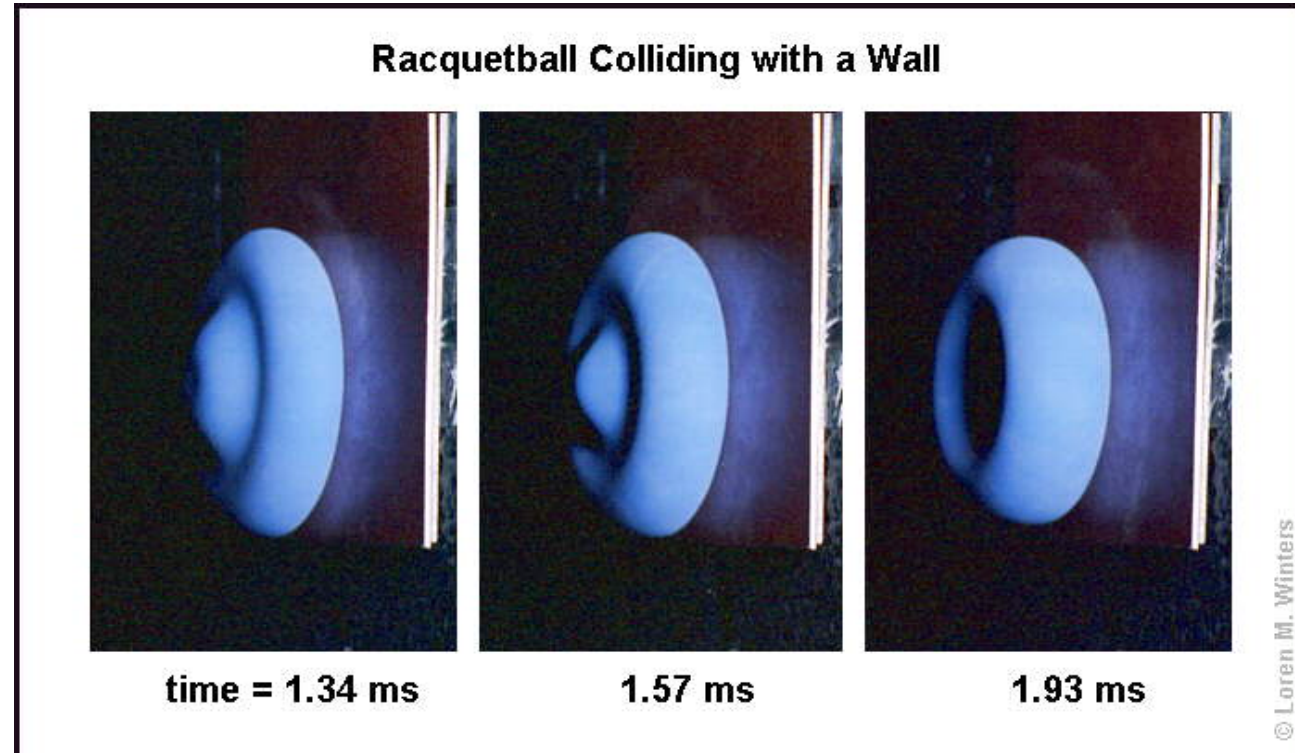
- En muchas situaciones físicas, aparecen fuerzas muy intensas que actúan durante un intervalo de tiempo muy corto
 - Golpeo de una pelota de tenis, de un balón de fútbol
 - Golpeo de un taco sobre una bola de billar
 - Impacto de un objeto sobre una estructura
- En estas situaciones se separa el problema en dos partes
 - Percusión: se produce la interacción impulsiva
 - Formalmente, la fuerza es infinita y el intervalo de tiempo nulo
 - Las incógnitas del problema son las variaciones de cantidad de movimiento, momento cinético y energía
 - Después de la percusión: el sistema evoluciona con las leyes habituales
 - La fase de percusión proporciona las condiciones iniciales de velocidad y rotación para esta fase

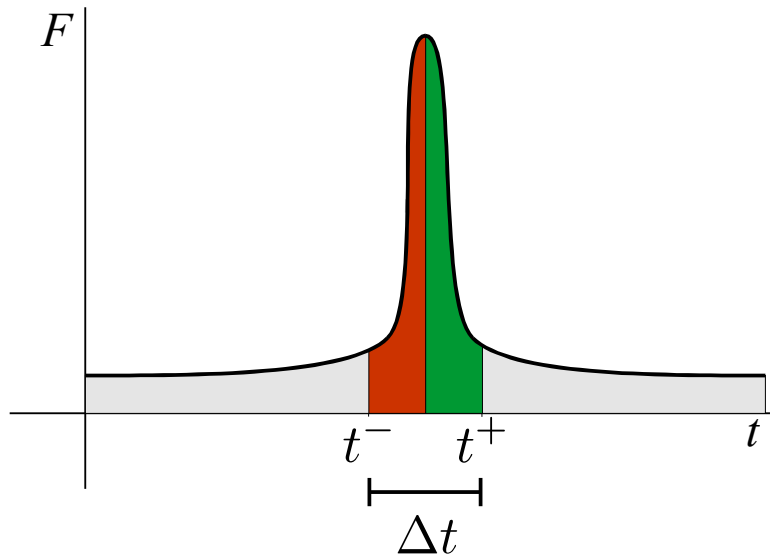
- Introducción
- Impulso mecánico para una partícula
- Postulados de la mecánica impulsiva
- Leyes impulsivas
- Tipos de percusiones
- Teorema de Carnot
- Choques



Golpeo de una pelota de tenis

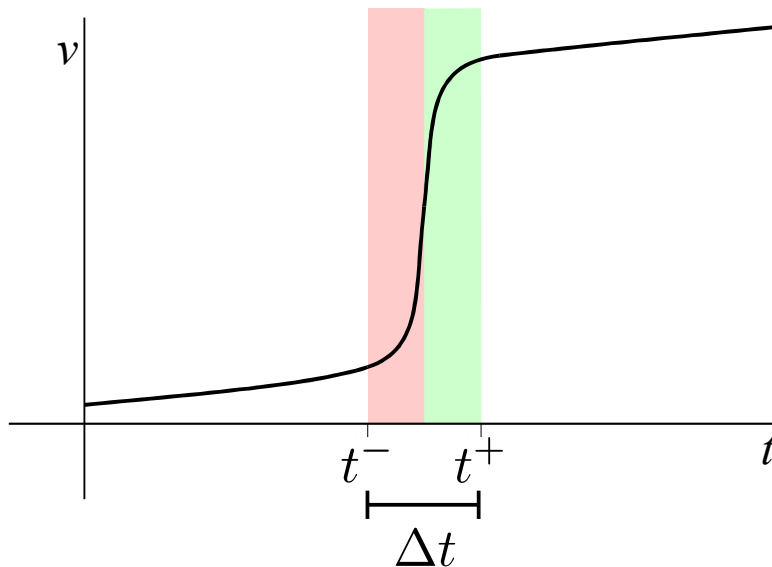
Impacto de una pelota en una pared





La fuerza se concentra en un intervalo de tiempo muy corto

$$\Delta t = [t^-, t^+] \simeq 0$$



La velocidad cambia bruscamente

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}^+ - \vec{v}^- \quad \text{finito}$$

Impulso mecánico para una partícula

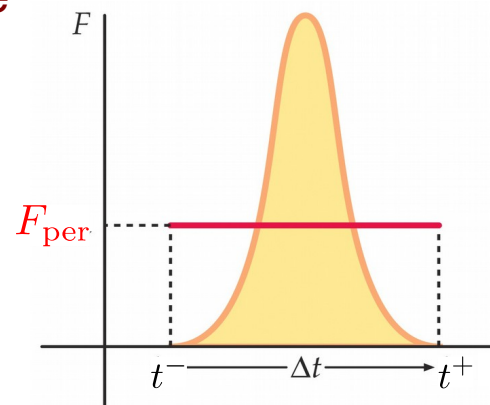
■ Percusión sobre una partícula

- Una fuerza muy intensa actúa durante un tiempo muy corto

$$\vec{p}^- = m\vec{v}^- \quad \longrightarrow \quad \vec{p}^+ = m\vec{v}^+$$



- Si Δt es muy pequeño se puede despreciar el movimiento de la partícula durante la colisión y considerar la fuerza media ejercida sobre la partícula
- El problema después de la percusión se puede tratar como una partícula con velocidad inicial $\mathbf{v}^+$
- Durante la percusión cambia la cantidad de movimiento



$$\Delta \vec{p} = \vec{p}^+ - \vec{p}^- = \int_{t^-}^{t^+} \vec{F} dt = \vec{\hat{F}}$$

$$\vec{F}_{\text{per}} \simeq \frac{1}{\Delta t} \vec{\hat{F}}$$

- Impulso mecánico o percusión $\vec{\hat{F}} = \Delta \vec{p}$

- Introducción
- Impulso mecánico para una partícula
- Postulados de la mecánica impulsiva
- Leyes impulsivas
- Tipos de percusiones
- Teorema de Carnot
- Choques

- El intervalo de tiempo impulsivo es cero y la magnitud de las fuerzas impulsivas es infinita

$$\left. \begin{array}{l} \Delta t \rightarrow 0 \\ |\vec{F}_{per}| \rightarrow \infty \end{array} \right| \xrightarrow{\text{verde}} |\vec{F}_{per}| \Delta t = |\Delta \vec{p}| = |\vec{\hat{F}}| \text{ finito} \quad \Delta t = [t^-, t^+]$$

- En el intervalo impulsivo se desprecian las fuerzas ordinarias que tengan módulos acotados
 - Esto incluye el peso, muelles, etc
 - Las fuerzas vinculares **no están acotadas** (los vínculos se siguen cumpliendo durante la perc.)
- En el intervalo impulsivo se considera que las partículas o partes del sistema no se mueven
 - El intervalo de tiempo es muy pequeño $\Delta \vec{r}_i = \vec{v}_i \Delta t \simeq 0$
- La velocidad de cada partícula o punto del sistema en el medio del intervalo impulsivo es el promedio de sus velocidades inicial y final
 - Equivale a asumir que la variación de velocidad durante el intervalo impulsivo es lineal

$$\vec{v}_i = \frac{1}{2} (\vec{v}_i(t^+) + \vec{v}_i(t^-)) = \frac{1}{2} (\vec{v}_i^+ + \vec{v}_i^-)$$

- Percusión o impulso sobre la partícula o punto i $\vec{\hat{F}}_i = \vec{F}_i \Delta t$

- Parte activa y vincular $\vec{\hat{F}}_i = \vec{\hat{f}}_i + \vec{\hat{\Phi}}_i$ $\vec{\hat{f}}_i = \vec{f}_i \Delta t$ $\vec{\hat{\Phi}}_i = \vec{\Phi}_i \Delta t$

- Momento impulsivo respecto al punto A $\vec{\hat{M}}_A = \vec{M}_A \Delta t$

- Parte activa y vincular $\vec{\hat{M}}_A = \vec{\hat{m}}_A + \vec{\hat{\Gamma}}_A$ $\vec{\hat{m}}_A = \vec{m}_A \Delta t$ $\vec{\hat{\Gamma}}_A = \vec{\Gamma}_A \Delta t$

$$\vec{\hat{M}}_A = \vec{M}_A \Delta t = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AP}_i \times (\vec{F}_i \Delta t) = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times (\vec{F}_i \Delta t) = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{\hat{F}}_i$$

- Fuerza generalizada impulsiva de la coordenada k $\hat{Q}_k = Q_k \Delta t$

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k}$$

$$\hat{Q}_k = Q_k \Delta t = \sum_{i=1}^N (\vec{f}_i \Delta t) \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N \vec{\hat{f}}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k}$$

- Introducción
- Impulso mecánico para una partícula
- Postulados de la mecánica impulsiva
- **Leyes impulsivas**
- Tipos de percusiones
- Teorema de Carnot
- Choques

Ley	Ordinario	Impulsivo
Ley de Newton	$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$	$\Delta \vec{p} = \vec{\hat{F}}$
T.C.M.	$\dot{\vec{C}} = \vec{F}^{\text{ext}}$	$\Delta \vec{C} = \vec{\hat{F}}^{\text{ext}}$
T.M.C.	$\dot{\vec{L}}_A = \vec{M}_A^{\text{ext}} + \vec{C} \times \overrightarrow{O_1 \dot{A}}$	$\Delta \vec{L}_A = \vec{\hat{M}}_A^{\text{ext}}$
Ecuaciones de Lagrange	$\dot{p}_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + Q_k^{NC}$	$\Delta p_k = \hat{Q}_k^{NC}$
Principio de Jourdan impulsivo	$\sum_{i=1}^N (\Delta p_i - \vec{\hat{F}}_i) \cdot \vec{v}_i^* = 0 \quad \forall \vec{v}_i^*$	

- Clasificación de magnitudes según su valor y comportamiento en un un proceso impulsivo

Ley	Finitud	Variabilidad
Familia 1: $\vec{r}_i, q_k; U$	Finito	Constante
Familia 2: $\vec{v}_i, \dot{q}_k; T, \mathcal{L}; \vec{C}, \vec{L}_A; p_k$	Finito	Variable
Familia 3: $\vec{a}_i, \ddot{q}_k; \vec{F}_i, \vec{M}_A; Q_k$	Infinito	Constante

- Ley de Newton impulsiva para una partícula $\Delta \vec{p} = \vec{\hat{F}}$

- **Dem:**
$$\Delta \vec{p} = \int_{t_0^-}^{t_0^+} d\vec{p} = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \vec{F} dt = \vec{F} \int_{t_0^-}^{t_0^+} dt = \vec{F} \Delta t = \vec{\hat{F}}$$

- T.C.M. impulsivo $\Delta \vec{C} = \vec{\hat{F}}^{\text{ext}}$

- **Dem:**
$$\Delta \vec{C} = \int_{t_0^-}^{t_0^+} d\vec{C} = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \vec{F}^{\text{ext}} dt = \vec{F}^{\text{ext}} \int_{t_0^-}^{t_0^+} dt = \vec{F}^{\text{ext}} \Delta t = \vec{\hat{F}}^{\text{ext}}$$

- T.M.C. impulsivo $\Delta \vec{L}_A = \hat{M}_A^{\text{ext}}$

■ Dem:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{L}_A &= \int_{t_0^-}^{t_0^+} d\vec{L}_A = \int_{t_0^-}^{t_0^+} (\vec{M}_A^{\text{ext}} + \vec{C} \times \overrightarrow{O_1 \dot{A}}) dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \vec{M}_A^{\text{ext}} dt + \int_{t_0^-}^{t_0^+} \vec{C} \times \overrightarrow{O_1 \dot{A}} dt \\ &= \vec{M}_A^{\text{ext}} \int_{t_0^-}^{t_0^+} dt + (\vec{C} \times \overrightarrow{O_1 \dot{A}}) \int_{t_0^-}^{t_0^+} dt = \vec{M}_A^{\text{ext}} \Delta t + (\vec{C} \times \overrightarrow{O_1 \dot{A}}) \Delta t = \vec{M}_A^{\text{ext}} \end{aligned}$$

0

- Ecuaciones de Lagrange impulsivas $\Delta p_k = \hat{Q}_k^{NC}$

■ Dem: $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \qquad \dot{p}_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + Q_k^{NC}$

$$\begin{aligned} \Delta p_k &= \int_{t_0^-}^{t_0^+} dp_k = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + Q_k^{NC} \right) dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} dt + \int_{t_0^-}^{t_0^+} Q_k^{NC} dt \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \int_{t_0^-}^{t_0^+} dt + Q_k^{NC} \int_{t_0^-}^{t_0^+} dt = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \Delta t + Q_k^{NC} \Delta t = Q_k^{NC} \Delta t = \hat{Q}_k^{NC} \end{aligned}$$

0

- Principio de d'Alembert para un sistema de partículas

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \forall \delta \vec{r}_i$$

- Expresándolo en términos de las velocidades virtuales tenemos el Principio de Jourdan

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \vec{v}_i^* = 0 \quad \forall \vec{v}_i^* \quad \text{Principio de Jourdan}$$

- En un proceso impulsivo multiplicamos por Δt , el intervalo de tiempo de la percusión

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i \Delta t - \vec{F}_i \Delta t) \cdot \vec{v}_i^* = \sum_{i=1}^N \left(\frac{d\vec{p}_i}{dt} \Delta t - \vec{F}_i \right) \cdot \vec{v}_i^* = \sum_{i=1}^N \left(\Delta \vec{p}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \vec{v}_i^*$$

- Por tanto

$$\sum_{i=1}^N (\Delta p_i - \vec{F}_i) \cdot \vec{v}_i^* = 0 \quad \forall \vec{v}_i^* \quad \text{Principio de Jourdan impulsivo}$$

- Trabajo de una fuerza impulsiva sobre una partícula

$$W = \Delta T = \frac{1}{2} \vec{\hat{F}} \cdot (\vec{v}_0^+ + \vec{v}_0^-) = \vec{\hat{F}} \cdot \vec{v}(t_0)$$

■ Dem:

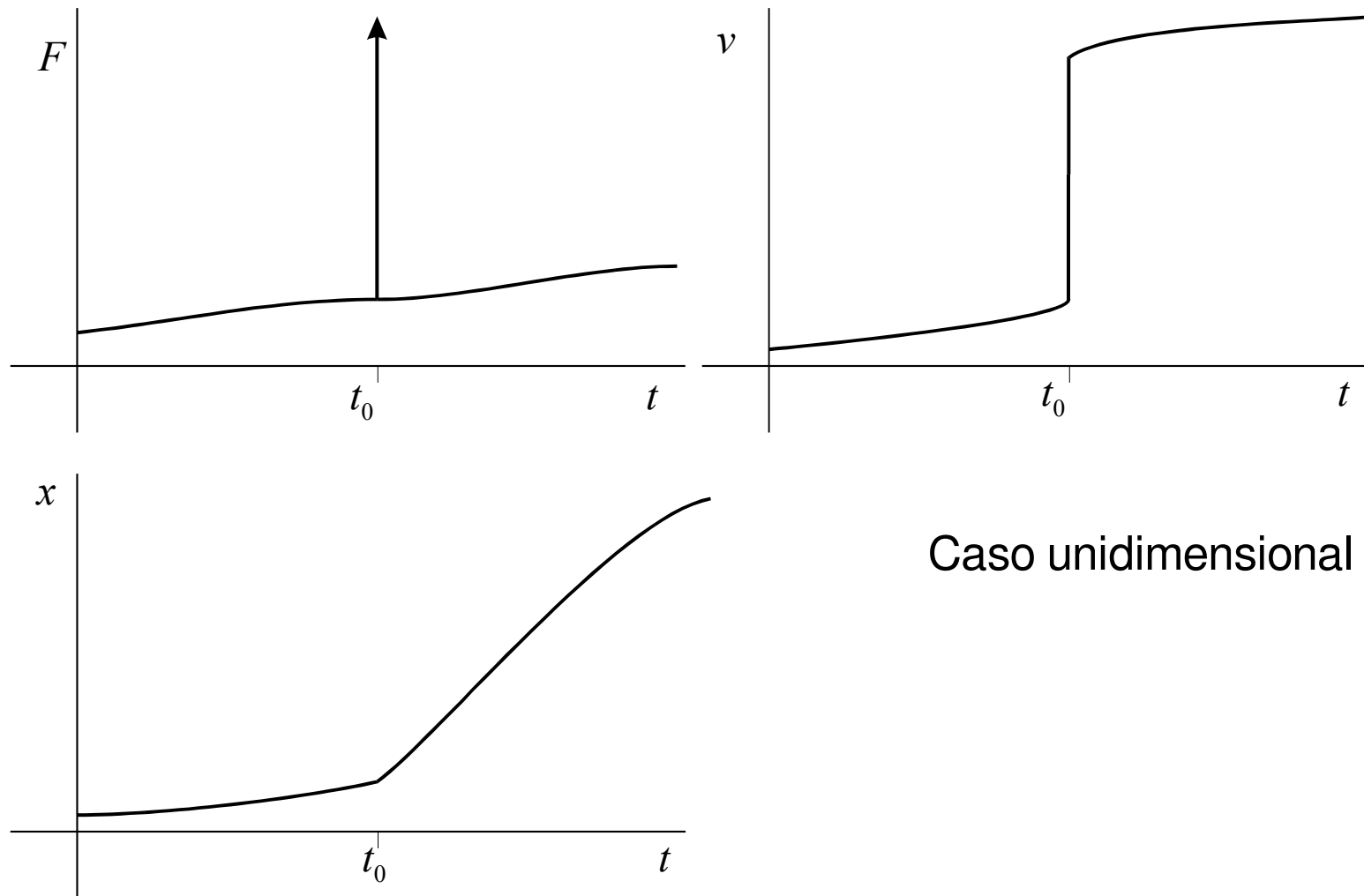
$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{2} m (|\vec{v}_0^+|^2 - |\vec{v}_0^-|^2) = \frac{1}{2} m (\vec{v}_0^+ - \vec{v}_0^-) \cdot (\vec{v}_0^+ + \vec{v}_0^-) = \frac{1}{2} (\vec{p}^+ - \vec{p}^-) \cdot (\vec{v}_0^+ + \vec{v}_0^-) \\ &= \frac{1}{2} \Delta \vec{p} \cdot (\vec{v}_0^+ + \vec{v}_0^-) = \frac{1}{2} \vec{\hat{F}} \cdot (\vec{v}_0^+ + \vec{v}_0^-) \end{aligned}$$

- Es válido incluso si el intervalo de tiempo es finito

- Introducción
- Impulso mecánico para una partícula
- Postulados de la mecánica impulsiva
- Leyes impulsivas
- Tipos de percusiones
- Teorema de Carnot
- Choques

- **Percusiones libres**
 - Una fuerza impulsiva es aplicada en un cierto instante a una partícula o a un sistema
- **Imposición de ligaduras**
 - Aparición de nuevas ligaduras en un instante dado
- **Cambio en las ligaduras preexistentes**
 - Desaparición de ligaduras en un instante
 - Cambio de las características de ligaduras en un instante
 - Ej: Un plano empieza a moverse
- **Choques**
 - Es necesario información adicional para resolver el problema
 - Ej: Coeficiente de restitución

- Sobre una partícula $\Delta \vec{p} = \vec{\hat{F}}$



Caso unidimensional

- Sobre un sistema

$$\text{T.C.M.} \quad \Delta \vec{C} = \vec{\hat{F}}^{\text{ext}}$$

$$\text{T.M.C.} \quad \Delta \vec{L}_A = \vec{M}_A^{\text{ext}}$$

- Variación de la energía cinética

$$\Delta T = \sum_{i=1}^N \Delta T_i = \sum_{i=1}^N \vec{\hat{F}}_i \cdot \vec{v}_i(t_0) = \sum_{i=1}^N \vec{\hat{F}}_i^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_i(t_0) + \sum_{i=1}^N \vec{\hat{F}}_i^{\text{int}} \cdot \vec{v}_i(t_0)$$

- Las percusiones internas realizan trabajo

- Sobre un sólido rígido T.C.M. $\Delta \vec{C} = \vec{\hat{F}}^{\text{ext}} = \vec{\hat{f}}^{\text{ext}} + \vec{\hat{\Phi}}^{\text{ext}}$

T.M.C. $\Delta \vec{L}_A = \vec{\hat{M}}_A^{\text{ext}} = \vec{\hat{m}}_A^{\text{ext}} + \vec{\hat{\Gamma}}_A^{\text{ext}}$

- Variación de la energía cinética

$$\Delta T = \sum_{i=1}^m \vec{\hat{F}}_i^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_i(t_0) = \sum_{i=1}^p \vec{\hat{f}}_i^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_i(t_0) + \sum_{i=1}^q \vec{\hat{\Phi}}_i^{\text{int}} \cdot \vec{v}_i(t_0)$$

- Las percusiones internas no realizan trabajo, pero las **vinculares sí**

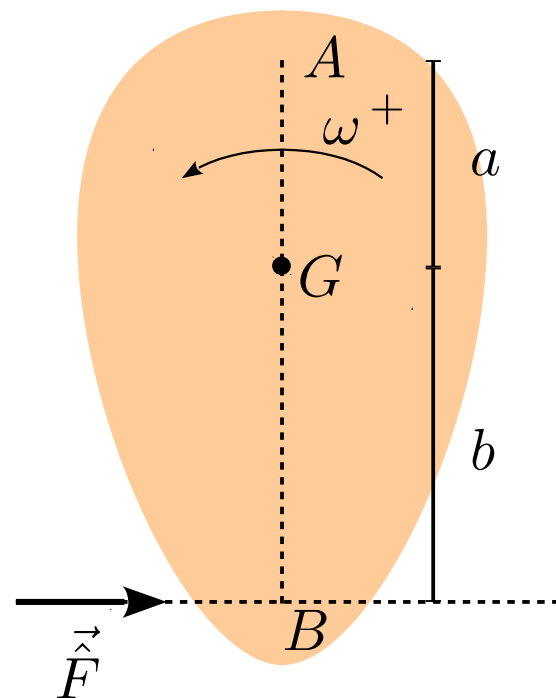
- Examinamos un movimiento impulsivo plano
- La lámina está en reposo y sufre la impulsión indicada
- T.C.M. $|\vec{v}_G^+| = \hat{F}/m$
- T.M.C. $|\vec{\omega}^+| = b\hat{F}/I$
- Buscamos el punto A tal que su velocidad sea cero

$$|\vec{v}_A^+| = 0 \implies |\vec{v}_G^+| - a|\vec{\omega}| = 0$$

- Por tanto

$$ab = \frac{I}{m} = k_c^2$$

- Si A está fijo durante la percusión, no habrá reacción vincular en A. El punto A es el **centro de percusión** respecto a B. Su velocidad es cero después de una percusión plana aplicada en B



- Clasificación en función de si están presentes
 1. Antes de la percusión
 2. Durante la percusión
 3. Después de la percusión
- Ligaduras permanentes: están en 2 y 3
 - Ligadura preexistente o activada súbitamente
 - Existe reacción vincular impulsiva
 - Se reduce el número de grados de libertad
 - Aparecen nuevas reacciones vinculares
- Ligaduras no permanentes: no están en 3
 - Ligadura que desaparece
 - No hay percusión de ligadura
 - Aumenta el número de grados de libertad
 - Disminuye el número de reacciones vinculares

- Introducción
- Impulso mecánico para una partícula
- Postulados de la mecánica impulsiva
- Leyes impulsivas
- Tipos de percusiones
- Teorema de Carnot
- Choques

Para un sistema de partículas con vínculos ideales, esclerónomo, aislado, en el que aparecen súbitamente nuevos vínculos ideales que permanecen, se cumple

$$\Delta T = -T_{\text{rel}}$$

$$\Delta T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\vec{v}^+|^2 - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\vec{v}^-|^2$$

$$\Delta T_{\text{rel}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{v}^+ - \vec{v}^-)^2$$

- Principio de Jourdan impulsivo

$$\sum_{i=1}^N (\Delta p_i - \vec{\hat{F}}_i) \cdot \vec{v}_i^* = 0 \quad \forall \vec{v}_i^*$$

- Si no hay percusiones externas (sistema aislado)

$$\sum_{i=1}^N \Delta p_i \cdot \vec{v}_i^* = 0 \quad \forall \vec{v}_i^* \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_i^+ - \vec{v}_i^-) \cdot \vec{v}_i^* = 0 \quad \forall \vec{v}_i^*$$

- Si un **vínculo ideal aparece súbitamente**, y **permanece después**, las velocidades cambian súbitamente, pero la velocidad final debe ser compatible con los vínculos, es decir, debe corresponder a un valor posible de la velocidad virtual

$$\sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_i^+ - \vec{v}_i^-) \cdot \vec{v}_i^+ = 0 \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^N m_i |\vec{v}_i^+|^2 = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^- \cdot \vec{v}_i^+$$

- Definimos la energía cinética relativa

$$\sum_{i=1}^N m_i |\vec{v}_i^+|^2 = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^- \cdot \vec{v}_i^+$$

$$\begin{aligned} \Delta T_{\text{rel}} &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i^+ - \vec{v}_i^-)^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i^+|^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i^-|^2 - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^+ \cdot \vec{v}_i^- \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i^+|^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i^-|^2 - \sum_{i=1}^N m_i |\vec{v}_i^+|^2 \\ &= - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i^+|^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i^-|^2 \\ &= -T^+ + T^- \\ &= -\Delta T \end{aligned}$$

- En el caso de un sólido rígido

$$R(O)^- = \{\vec{\omega}^-, \vec{v}_G^-\}$$

$$R(O)^+ = \{\vec{\omega}^+, \vec{v}_G^+\}$$

$$T^- = \frac{1}{2}M|\vec{v}_G^-|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}^- \cdot \vec{I}_G \cdot \vec{\omega}^-$$

$$T^+ = \frac{1}{2}M|\vec{v}_G^+|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}^+ \cdot \vec{I}_G \cdot \vec{\omega}^+$$

$$T_{\text{rel}} = \frac{1}{2}M|\vec{v}_G^r|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}^r \cdot \vec{I}_G \cdot \vec{\omega}^r$$

$$\vec{v}_G^r = \vec{v}_G^+ - \vec{v}_G^-$$

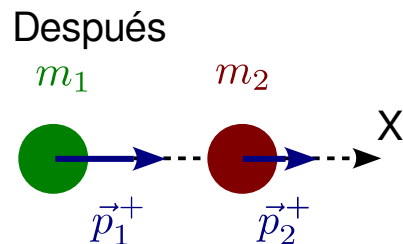
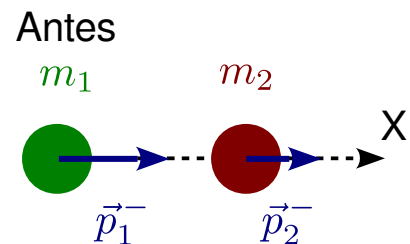
$$\vec{\omega}^r = \vec{\omega}^+ - \vec{\omega}^-$$

$$T^+ - T^- = -T_{\text{rel}}$$

- Introducción
- Impulso mecánico para una partícula
- Postulados de la mecánica impulsiva
- Leyes impulsivas
- Tipos de percusiones
- Teorema de Carnot
- Choques

- En una colisión, dos sólidos rígidos interaccionan durante un intervalo de tiempo muy breve y después se separan
- Consideraremos colisiones de sistemas aislados: los sólidos que colisionan sólo interaccionan entre sí durante la colisión
- El sistema total es el formado por los dos sólidos que colisionan
- En una colisión aislada, la **cantidad de movimiento** y el **momento cinético** totales **se conservan**
 - Las percusiones y momentos percusivos externos son nulos
- La **energía cinética** total, en general, **no se conserva**
- Las colisiones se clasifican según como se comporta la energía cinética
 - **Elástica**: la energía cinética total se conserva
 - **Inelástica**: la energía cinética total no se conserva
 - Los sólidos se separan después de la colisión
 - **Plástica o completamente inelástica**: los dos sólidos quedan unidos después de la colisión

Choque unidimensional de dos partículas



Incógnitas: $\{v_1^+, v_2^+\}$

■ En cualquier choque $\vec{p}_1^- + \vec{p}_2^- = \vec{p}_1^+ + \vec{p}_2^+ \longrightarrow m_1 v_1^+ + m_2 v_2^+ = m_1 v_1^- + m_2 v_2^- \quad (1)$

Elástico

$$T^+ = T^- \longrightarrow \frac{1}{2} m_1 (v_1^+)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2^+)^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1^-)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2^-)^2 \quad (2a)$$

Plástico



$$v_2^+ = v_1^+ \quad (2b)$$

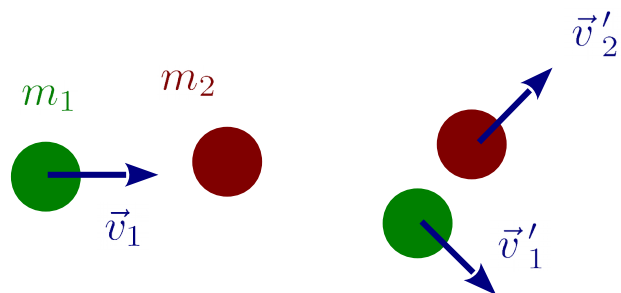
Inelástico



$$C_r = -\frac{v_2^+ - v_1^+}{v_2^- - v_1^-} \quad (2c)$$

■ En los tres casos hay dos ecuaciones para dos incógnitas

- En este caso hay más incógnitas que ecuaciones



$$\vec{v}'_1, \vec{v}'_2$$

→ 4 incógnitas

$$\vec{P} = \overrightarrow{cte}, \quad T = cte \quad \rightarrow \quad 3 \text{ ecuaciones}$$

- Hay que tener en cuenta los detalles de la interacción durante la colisión
- Vamos a dos considerar discos rígidos sin rozamiento