Departamento de Física Aplicada III
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Camino de los Descubrimientos s/n
41092 Sevilla
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

MECÁNICA RACIONAL, 2° CURSO, INGENIERÍA CIVIL, 2017/18

BOLETÍN DE PROBLEMAS DEL TEMA 8: SÓLIDO RÍGIDO VINCULADO

1. Una barra homogénea de masa m y longitud $L = 2a$, se mueve en un plano vertical, de modo que sus extremos B y A se mueven sobre los ejes OX_1 y OY_1, respectivamente. Suponiendo contactos lisos:

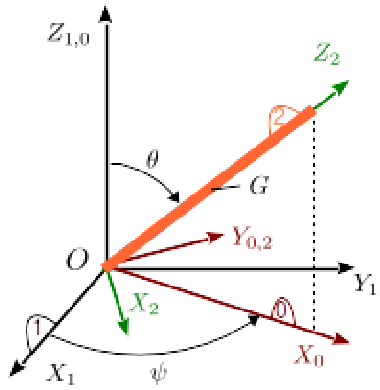
   a) Encuentra una integral primera del movimiento en caso de apoyos bilaterales. Las condiciones iniciales son $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$.

   b) Encuentra las ecuaciones de movimiento aplicando el T.C.M. y el T.M.C. en el centro de masas de la barra.

   c) Determina el ángulo θ_0 para el que la barra se despegaría del eje por su extremo A en caso de apoyo unilateral en ese punto.

2. Una barra homogénea de longitud L, masa M y radio despreciable está articulada en O, moviéndose en el espacio tridimensional $OX_1Y_1Z_1$ con su posición descrita mediante las coordenadas $\{\psi, \theta\}$, ángulos de precesión y nutación, respectivamente. Escogemos unos ejes $OX_2Y_2Z_2$ solidarios con la barra como se indica en la figura, y unos ejes auxiliares intermedios $OX_0Y_0Z_0$. Los contactos son ideales y la gravedad es constante $\vec{g} = -g\,\vec{k}_1$. Las condiciones iniciales son: $\psi(0) = 0, \theta(0) = \pi/6, \dot{\psi}(0) = \omega_0, \dot{\theta}(0) = 0$.

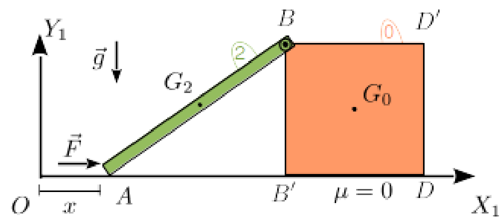
   a) Obtén las ecuaciones diferenciales del movimiento en forma de integrales primeras.



3. El sistema de sólidos de la figura está formado por una varilla (sólido “2”, masa m, longitud $l_2 = 2\sqrt{2}a$) y por una placa cuadrada (sólido “0”, masa m, lado $l_0 = 2a$) articulados entre sí en el punto B. Sobre el eje OX_1 se apoyan el extremo A de la barra y el lado BD del cuadrado. Todos los contactos son lisos. Sobre el extremo A se aplica una fuerza horizontal creciente $\vec{F} = 2\lambda mg\vec{\imath}_1$ ($\lambda = t/T$), donde T es una constante. Inicialmente ($t = 0$), el sistema está en reposo y A coincide con O.

   a) Calcula la aceleración del sistema, los valores de las fuerzas vinculares y la posición de la fuerza normal en BD, todo ello en función del tiempo.

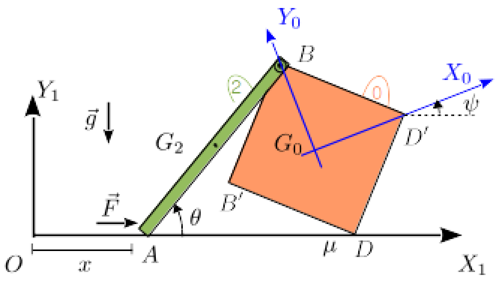
   b) Calcula el instante en que el vértice B' empieza a despegar (condición de vuelco) y el trabajo realizado hasta ese instante por la fuerza $\vec{F}$.



4. El sistema de sólidos de la figura está formado por una varilla (sólido “2”, masa m, longitud $l_2 = 2\sqrt{2}a$) y por una placa cuadrada (sólido “0”, masa m, lado $l_0 = 2a$) articulados entre sí en el punto B. Sobre el eje OX_1 se apoyan el extremo A de la barra y el lado BD del cuadrado. Todos los contactos son lisos, salvo el apoyo del cuadrado, donde el coeficiente de rozamiento μ es tal que el deslizamiento es imposible. Sobre el extremo A se aplica una fuerza horizontal creciente $\vec{F} = 2\lambda mg\vec{\imath}_1$ donde λ es un parámetro del problema. Inicialmente A coincide con O.

a) Obtén el sistema de ecuaciones que permite determinar la ecuación diferencial del movimiento y las fuerzas vinculares del problema.

b) Suponiendo $\lambda = \lambda_0(cte.)$, demuestra que el trabajo de $\vec{F}$ es conservativo, con una energía potencial $V_F(x) = -F_0 x$, donde $F_0 = 2\lambda_0 mg$. Obtén el movimiento del sistema en forma de integral primera, suponiendo reposo inicial.

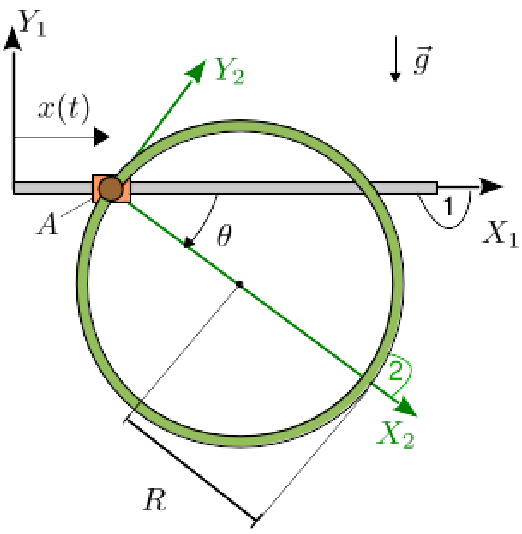


5. El sistema de la figura consiste en un aro rígido de radio R, masa m y centro C, contenido siempre en el plano vertical fijo OX_1Y_1. El aro puede girar sin rozamiento alrededor de su punto A, el cuál desliza sobre el eje fijo OX_1 según la ley horaria $x(t) = R\cos(\omega t)$, para la coordenada horizontal de dicho punto.

a) Aplica el teorema del momento cinético en A y, a partir de éste, determina las ecuaciones de movimiento del sistema.

b) Calcula las fuerzas vinculares que sobre el sólido. Discute la conservación de la energía mecánica del sistema.

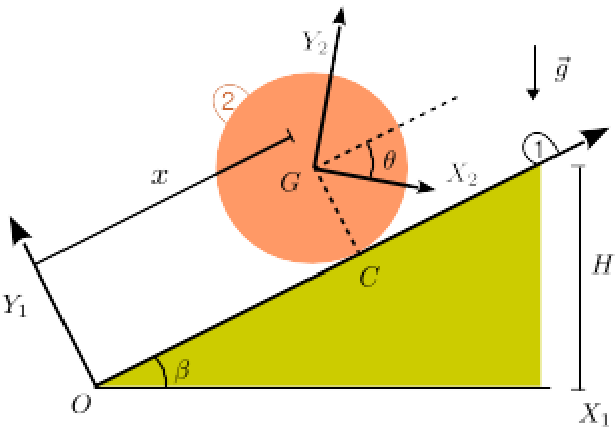
c) Suponiendo ahora que el punto A desliza libremente sobre el eje OX_1, discute la existencia de integrales primeras e indica si bastan para determinar, salvo condiciones iniciales, la evolución del sistema.



6. Un disco homogéneo de masa m y radio R (sólido "2") sube por el plano inclinado y rugoso (sólido "1") mostrado en la figura. El trayecto se divide en dos tramos dinámicamente distintos pero con continuidad cinemática entre ellos:

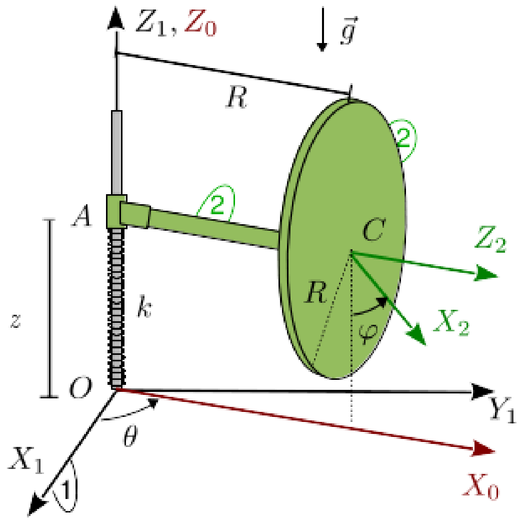
a) Tramo I: El disco rueda y desliza hasta alcanzar la condición de rodar sin deslizar en el punto final del tramo. Calcula la ley horaria $x = x(t)$ y el tiempo empleado en este tramo.

b) Tramo II: El disco sigue subiendo, rueda sin deslizar, y sufre la acción de un par motor conocido $\vec{\tau} = -\tau_0\,\vec{k}_1$ (τ_0 constante) aplicado sobre el eje normal al plano del disco que pasa por G. Calcula el tiempo empleado en este tramo y la fuerza de rozamiento. Discute cualitativamente este problema en función de $\vec{\tau}$ y de la pendiente del tramo inclinado.



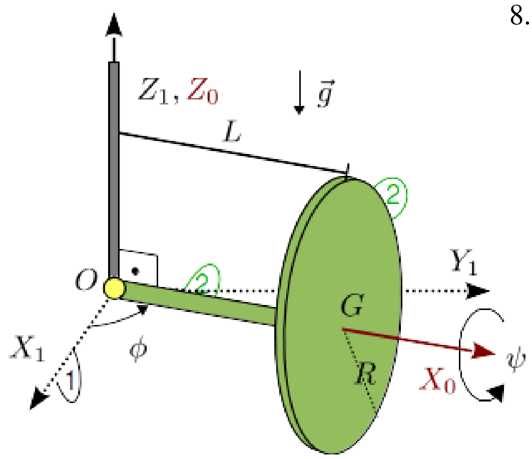
Datos: El coeficiente de rozamiento dinámico entre el disco y el plano inclinado es μ. Las condiciones iniciales son $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = \omega_0 > 0$.

7. El sólido "2"de la figura es un disco homogéneo de centro C, radio R y masa m, rígidamente unido a una barra CA perpendicular al disco, de longitud R y masa despreciable. El extremo A de la barra está engarzado a una pieza de dimensiones y masa despreciables que mantiene a la barra siempre perpendicular al eje vertical OZ_1, permitiendo a la vez que el sólido "2" pueda girar alrededor de dicho eje y del eje colineal con CA, de forma simultánea. Por su parte, la pieza antes mencionada está obligada a deslizar por el eje OZ_1, hallándose conectada al punto fijo O mediante un resorte de constante recuperadora k y longitud natural R. En el instante inicial ($t = 0$), el estado del sistema viene dado por las condiciones iniciales: $z(0) = R$, $\theta(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = \omega$, $\dot{\varphi}(0) = \Omega$.



a) Calcula las reacciones vinculares en el punto A y las leyes horarias $z(t)$, $\theta(t)$ y $\varphi(t)$. Obtén las posibles posiciones de equilibrio del sistema y las correspondientes reacciones vinculares.

b) Determina las integrales primeras del movimiento, obteniendo a partir de ellas las leyes horarias anteriores.



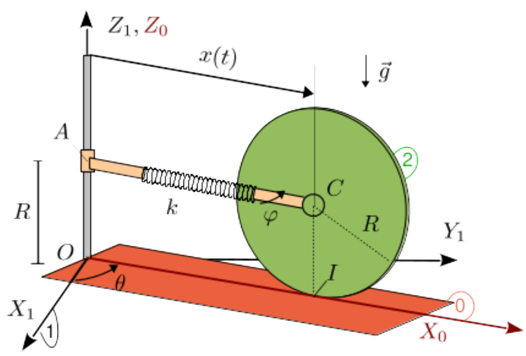
8. El sólido "2"de la figura es un modelo de giróscopo. Está formado por una barra OG de longitud L y masa despreciable, cuyo extremo O está conectado al eje vertical fijo, O_1Z_1, mediante una rótula ideal (sin rozamiento) que permite que la barra gire libremente. El extremo G de la barra está unido rígidamente al centro de un disco de radio R y masa m. Inicialmente ($t = 0$) tenemos $\psi(0) = 0$, $\phi(0) = 0$. Se le comunica al disco un giro propio con velocidad angular $\dot{\psi}(0) = \omega_0$.

a) Encuentra la reducción cinemática del movimiento $\{21\}$.

b) Aplicando los teroremas fundamentales y la aproximación de giróscopo veloz, determina la velocidad de precesión y las reacciones sobre el giróscopo.

c) Encuentra las integrales primeras del movimiento.

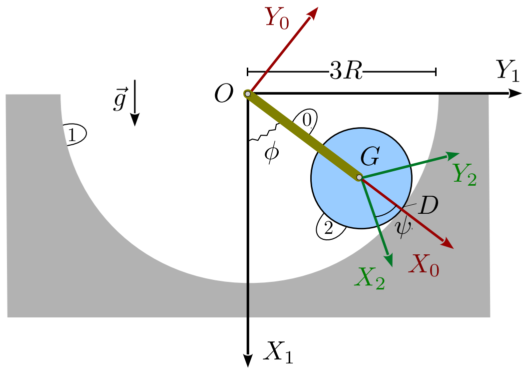
9. En el sistema mecánico de la figura, la lámina Π, de masa despreciable y dispuesta horizontalmente (sólido "0"), puede girar libremente alrededor del eje vertical OZ_1 de un sistema de referencia fijo $OX_1Y_1Z_1$ (sólido "1"). Un disco homogéneo de masa m, centro C, radio R y espesor despreciable (sólido "2"), rueda sin deslizar sobre el eje OX_0 ligado a la lámina Π. El disco se halla en todo instante contenido en el plano vertical OX_0Z_0 perpendicular a dicha lámina y rígidamente unido a ella, verificándose en todo instante que $OZ_0 \equiv OZ_1$. Además, un resorte de longitud natural nula y constante elástica k conecta con el centro del disco, C, con el punto fijo A del eje vertical OZ_1, situado a una altura R sobre O.



a) Desvincula el sistema de sólidos, discutiendo razonadamente el número de grados de libertad, así como el número total de incógnitas del problema.

b) Obtén las integrales primeras del movimiento del sistema.

Un disco de radio R y masa m (sólido "2") rueda sin deslizar sobre una superficie circular cóncava fija (sólido "1") de radio $3R$. En el centro del disco se articula una barra (sólido "0") de masa despreciable y longitud $2R$. El otro extremo de la barra se articula en un punto fijo O. La barra está conectada a su vez a un resorte de torsión en el punto O. Este resorte ejerce un momento sobre la barra $\vec{M}_0 = -k\phi\,\vec{k}_0$, siendo k una constante. La gravedad actúa como se indica en la figura.



a) Determina la reducción cinemática $\{21\}$ en el centro de masas del disco. ¿Cuantos grados de libertad tiene el sistema?

b) Para el disco, calcula su cantidad de movimiento, el momento angular respecto a su centro de masas y su energía cinética.

c) Encuentra las fuerzas vinculares que actúan sobre la barra y el disco.

d) Aplicando los teoremas fundamentales, encuentra las ecuaciones de movimiento y los valores de las reacciones vinculares.