Departamento de Física Aplicada III
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Camino de los Descubrimientos s/n
41092 Sevilla

MECÁNICA RACIONAL, 2° CURSO, INGENIERÍA CIVIL, 2018/19

BOLETÍN DE PROBLEMAS DEL TEMA 10: DINÁMICA ANALÍTICA

1. Se tiene un aro circular de radio R contenido en un plano vertical. Engarzado en él hay una masa m que puede deslizar siguiendo la circunferencia del aro bajo la acción de la gravedad.

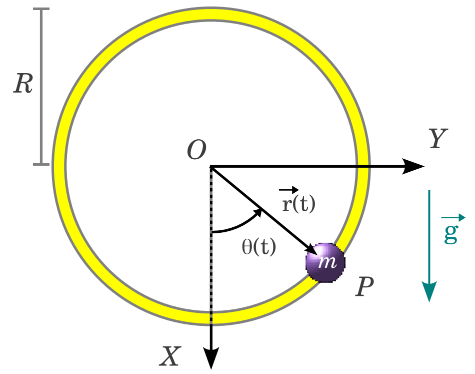
   a) Suponiendo que el contacto es liso, encuentra las ecuaciones que describen el movimiento de la masa en función del ángulo θ de la figura usando la energía cinética y fuerzas generalizadas.

   b) Suponiendo que el contacto es liso, encuentre las ecuaciones que describen el movimiento de la masa en función del ángulo θ de la figura usando la lagrangiana.

   c) Encuentra las ecuaciones de movimiento usando el Prinicipio de Liberación.

   d) Encuentra las ecuaciones de movimiento usando la técnica de los multiplicadores de Lagrange.

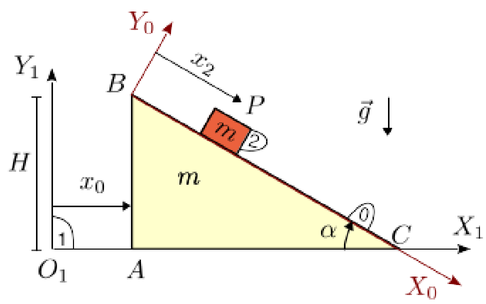
   e) Consideremos ahora que el vínculo entre la partícula y el aro es rugoso, con un coeficiente de rozamiento dinámico μ. Determina las ecuaciones de movimiento usando el Principio de Liberación.



2. Un bloque de masa m (sólido "2") desliza sobre una cuña también de masa m (sólido "0"). El ángulo de la cuña con la horizontal es α. En el instante inicial, el bloque está en el punto más alto de la cuña, y el extremo izquierdo de ésta se encuentra sobre el origen de coordenadas, ambos sólidos en reposo. Todos los contactos son lisos y el sistema está sometido a la acción de la gravedad, como se indica en la figura.

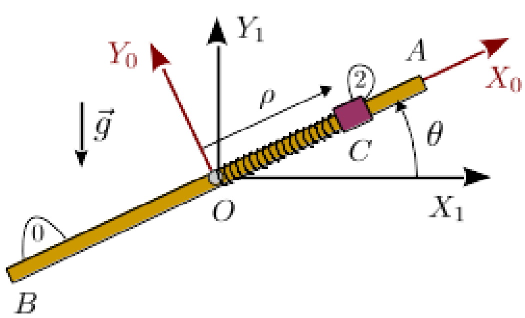
   a) Encuentra las ecuaciones de movimiento del bloque y la cuña.

   b) ¿Puedes encontrar alguna magnitud física que se conserve? ¿Se relacionan con alguna magnitud física de la Mecánica Vectorial?



$\overline{BA} = l = 2\overline{OA} = 2a\,(\text{cte})$

3. Los sólidos "2" y "0" forman el sistema de la figura, cuya configuración viene descrita por las coordenadas generalizadas $\{\rho, \theta\}$. Los dos sólidos tienen masa m y se mueven únicamente en el plano de la figura. La barra, de longitud $l = 2a$, está articulada en su punto medio O y soporta el deslizamiento de C (sólido "2"), que a su vez está unido al punto O por un resorte de constante elástica k y longitud natural nula. El sistema está sometido a la acción de la gravedad. Resuelve los siguientes supuestos físicos:



I: El sistema no sufre ninguna acción activa adicional. Encuentra las ecuaciones de movimiento.

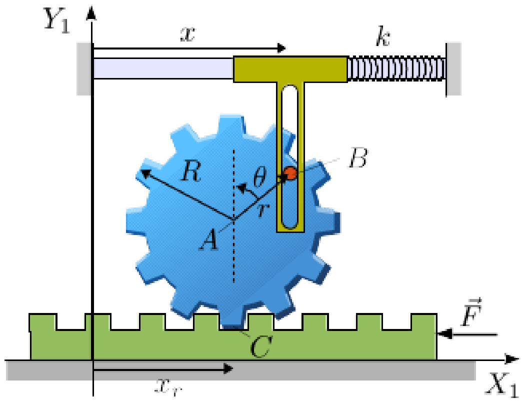
II: El sistema sufre las siguientes acciones activas adicionales: {"2": Fuerza $\vec{F}(t) = F_0\cos(\Omega t)\,\vec{\imath}_0$ en C; "0": par motor $\vec{\tau}(t) = \tau_0\,\text{sen}(\Omega t)\,\vec{k}$}. Obtén las ecuaciones diferenciales de movimiento.

III: Las coordenadas generalizadas están obligadas a cumplir las condiciones $\{\rho(t) = a/2 + v_0 t;\ \theta(t) = \omega t\}$. Aplica el principio de liberación y obtén el valor de las acciones vinculares $\{\vec{\Phi}, \vec{\Gamma}\}$ responsables de las condiciones sobre las coordenadas. Particulariza para $v_0 = 0$ y comenta el resultado.

IV: El sistema está obligado a cumplir con la ligadura geométrica $\{f(\rho,t) = \rho - v_0 t - a/2 = 0\}$ y la cinemática $\{g(\dot\theta) = \dot\theta - \omega = 0\}$. Aplicado el Método de los Multiplicadores de Lagrange, obtén el valor de los multiplicadores $\{\lambda, \mu\}$ asociados respectivamente a los vínculos descritos. Interpreta físicamente estos coeficientes para buscar sus correspondientes acciones vinculares $\{\vec{\Phi}, \vec{\Gamma}\}$. Particulariza para $v_0 = 0$ y comenta el resultado.

Nota: Los datos $\{F_0, \tau_o, \Omega, v_0, \omega_0\}$ son constantes conocidas.

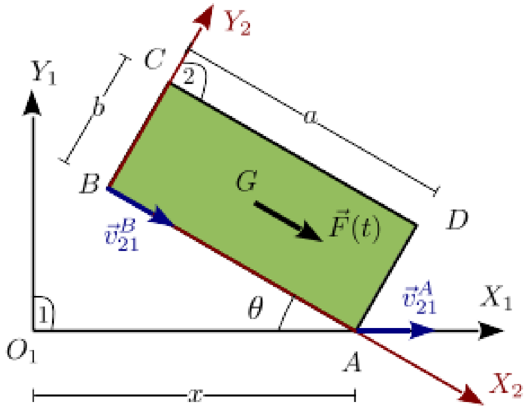
4. La figura muestra un sistema mecánico formado por un engranaje que rueda sobre una cremallera y está conectado a un deslizador con una ranura que desliza respecto al pasador en B. El deslizador está acoplado a un muelle, de constante elástica k, que se encuentra relajado cuando $x = 2R$. En ese instante se tiene $\theta = 0$. Las masas del engranaje, el deslizador y la cremallera son $m_A = m_S = m_r = m$. El contacto entre el pasador y la ranura es liso. El mecanismo es accionado por una fuerza aplicada sobe la cremallera como se indica en la figura.



   a) Encuentra el número de grados de libertad y elige un conjunto de coordenadas generalizadas para describir el movimiento.

   b) Encuentra las ecuaciones diferenciales del movimiento.

5. La maniobra de aparcamiento de un vehículo se puede modelar (despreciando la energía cinética de las ruedas) mediante una placa rectangular homogénea $ABCD$ de masa m y dimensiones $a \times b$ (sólido "2"), que se mueve en el plano horizontal fijo $O_1X_1Y_1$ (sólido "1"). Dicho movimiento consiste en que mientras el vértice A se desplaza sobre el eje fijo O_1X_1, el vértice contiguo B persigue a A de modo que la velocidad $\vec{v}^{B}_{21}$ es colineal en todo instante con el lado AB. Además, la acción del motor se modela con una única fureza activa conocida $\vec{F} = F(t)\,\vec{\imath}_2$, aplicada en el centro de masas G de la placa.



   a) Demuestra que los parámetros geométricos x y θ verifican en todo instante la relación $\dot{x}\,\mathrm{sen}\,\theta + a\dot\theta = 0$.

   b) Encuentra la expresión de la energía cinética T.

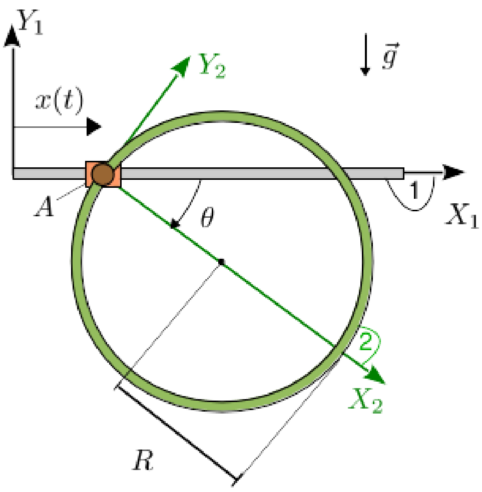
   c) Verifica que el vínculo del primer apartado es integrable y, trabajando con una sola coordenada generalizada, obtén las ecuaciones de movimiento del sistema mecánico descrito.

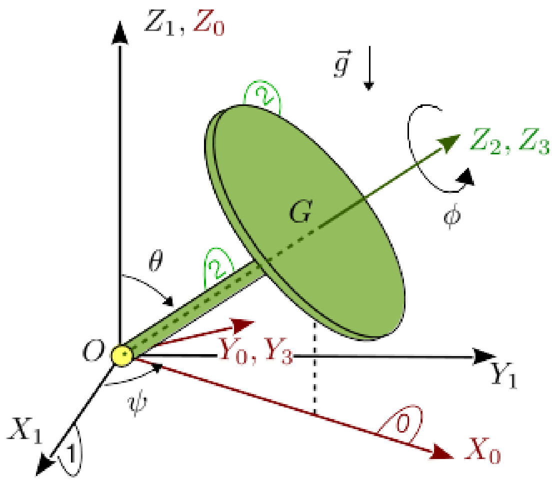
6. Se muestran en la figura dos sistemas que se han estudiado con los métodos de la Dinámica Vectorial. Se trata ahora de encontrar las ecuaciones de movimiento con los métodos de la Dinámica Analítica, así como comentar cuales son las integrales primeras homólogas con las de la Dinámica Vectorial.

   a) El aro de la figura tiene masa m, radio R, y se mueve con su punto A apoyado sobre el eje OX_1. Trabaja con la expresión de la energía cinética: $T = m(R^2\dot\theta^2 + \dot{x}^2/2 - R\dot{x}\dot\theta\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

   b) El sólido "2" tiene su masa m concentrada en el disco de radio R, siendo despreciable la masa de la barra OG, de longitud a, cuyo extremo fijo O está en el origen de coordenadas, mientras que el extremo móvil está perpendicularmente empotrado al disco en G. Utiliza los tres ángulos de Euler $\{\psi, \theta, \phi\}$ y trabaja con la expresión de la energía cinética siguiente:

$$T = \frac{1}{2}\left[I_1\left(\dot\psi^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + \dot\theta^2\right) + I_2\left(\dot\psi\cos\theta + \dot\phi\right)^2\right], \qquad I_1 = I + ma^2, \qquad I_2 = 2I, \qquad I = \frac{1}{4}mR^2$$



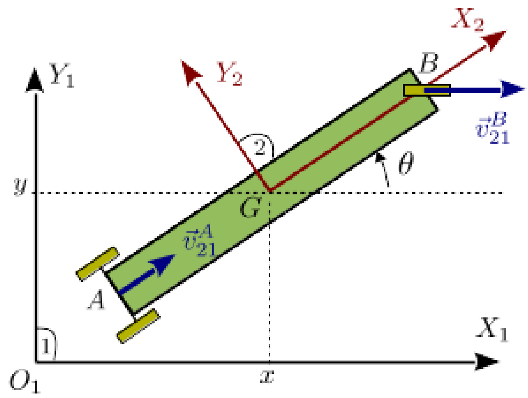


7. El sistema de la figura representa un model muy simple de triciclo. Está formado por una barra homogénea $\overline{AB}$ (sólido "2", masa m, longitud $l = 2a$, centro de masas G) contenida en el plano horizontal OX_1Y_1 y obligada a moverse de modo que su extremo A tiene una velocidad apuntando a B, mientras que la velocidad de B se mantiene siempre paralela al eje OX_1. Se propone trabajar con las coordenadas generalizadas $\{x, y, \theta\}$ indicadas en la figura.

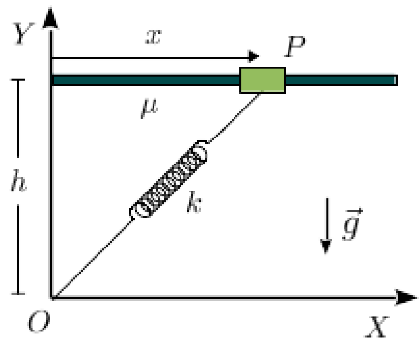
   a) Demuestra que las condiciones de movimiento implican las siguientes ecuaciones de ligadura para los puntos A y B: $\{a_1 \operatorname{sen}\theta\dot{x} + a_2\cos\theta\dot{y} + a_3\dot{\theta} = 0;\ b_1\dot{x} + b_2\dot{y} + b_3\dot{\theta}\cos\theta = 0\}$, donde $\{a_i, b_i\}$ son constantes a determinar.

   b) Desarrolla las ecuaciones de Lagrange con ligaduras correspondientes al sistema mecánico.

   c) Calcula los valores de las fuerzas vinculares $\{\vec{\Phi}_A, \vec{\Phi}_B\}$ responsables de las ligaduras del primer apartado en función de los multiplicadores de Lagrange del problema.



8. Una partícula P de masa m se ecuentra en un plano vertical y desliza libremente sobre una barra horizontal fija y rugosa (coeficiente dinámico μ) situada en la posición $y = h(cte)$. Un resorte ideal de constante recuperadora k y longitud natural nula tiene uno de sus extremos en P y el otro en el origen de coordenadas O. Considera que la partícula se está moviendo hacia la derecha ($\dot{x} > 0$). Aplica el principio de liberación y, usando los métodos de la Mecánica Analítica, obtén la ecuación diferencial de movimiento de P y el valor de la fuerza normal.



9. Dos partículas puntuales de masa m están unidas por una barra de longitud L y masa despreciable. Las partículas deslizan sobre un plano fijo OX_1Y_1, pero una de las partículas tiene una cuchilla, de modo que su velocidad sólo puede tener componente paralela a la cuchilla. Una fuerza $\vec{F} = F_0\,\vec{\imath}_1$ constante actúa sobre la partícula que no tiene la cuchilla.

   a) Encuentra la expresión del vínculo no holónomo del sistema.

   b) Escribe las ecuaciones de Lagrange utilizando la técnica de los multiplicadores de Lagrange.

   c) Identifica el significado físico del multiplicador de Lagrange.