Tema 3: Cinemática del punto

FISICA I, 1º Grado en Ingeniería Civil

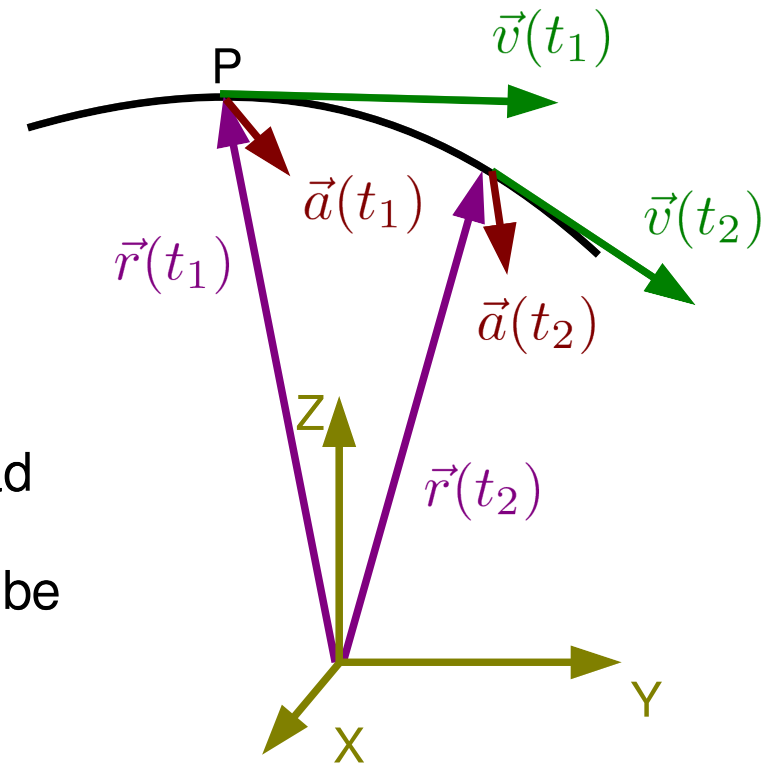
Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Índice

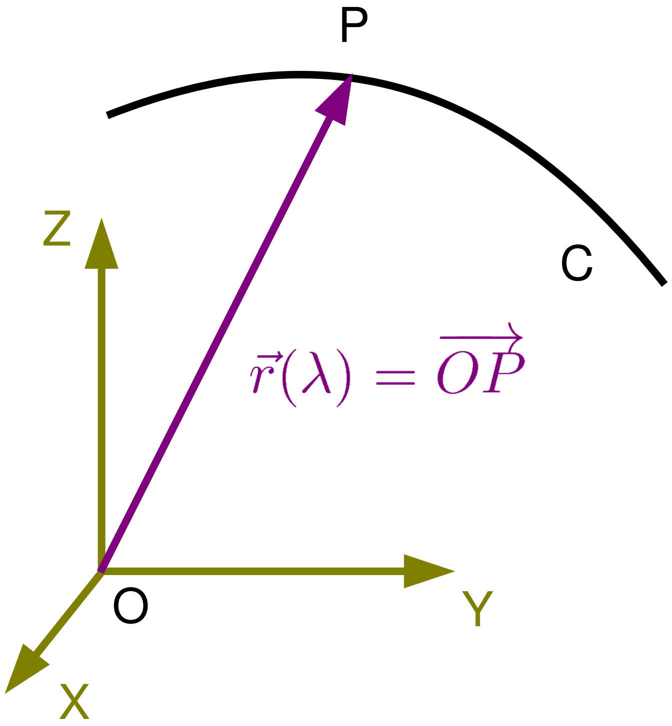
- Introducción
- Ecuaciones de una curva
- Velocidad y aceleración
- Movimientos elementales
  - Rectilíneo
  - Circular
- Geometría de curvas

- Punto material: la partícula es un punto sin dimensiones
- La posición en cada instante viene dada por el vector de posición $\vec{r}=\overrightarrow{OP}$
  - El punto describe una curva en el espacio, la trayectoria
- La velocidad $\vec{v}$ da la tasa de variación de la posición
- La aceleración $\vec{a}$ da la tasa de variación de la velocidad
- El tiempo es el parámetro en función del que se describe el movimiento



- Introducción
- Ecuaciones de una curva
- Velocidad y aceleración
- Movimientos elementales
  - Rectilíneo
  - Circular
- Geometría de curvas

La posición del punto se describe con un vector de posición referido al origen del triedro de referencia



$$\vec{r} = \vec{r}(\lambda) = \overrightarrow{OP}(\lambda)$$

Ecuaciones parámetricas de la curva C

$$\vec{r} = \vec{r}(\lambda) = \overrightarrow{OP} = \begin{cases} x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda) \\ z = z(\lambda) \end{cases}$$

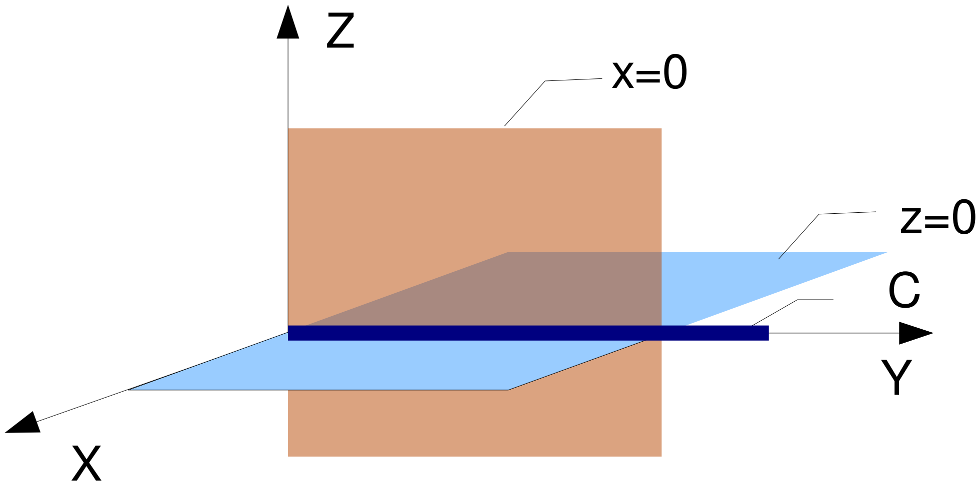
- El parámetro λ varía al recorrer la curva
- Se puede reparametrizar las ecuaciones

$$\lambda = \lambda(\eta)$$

Ecuaciones implícitas de la curva C

$$\vec{r} = \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Ecuaciones de una curva: ejemplo



Curva C : Eje OY

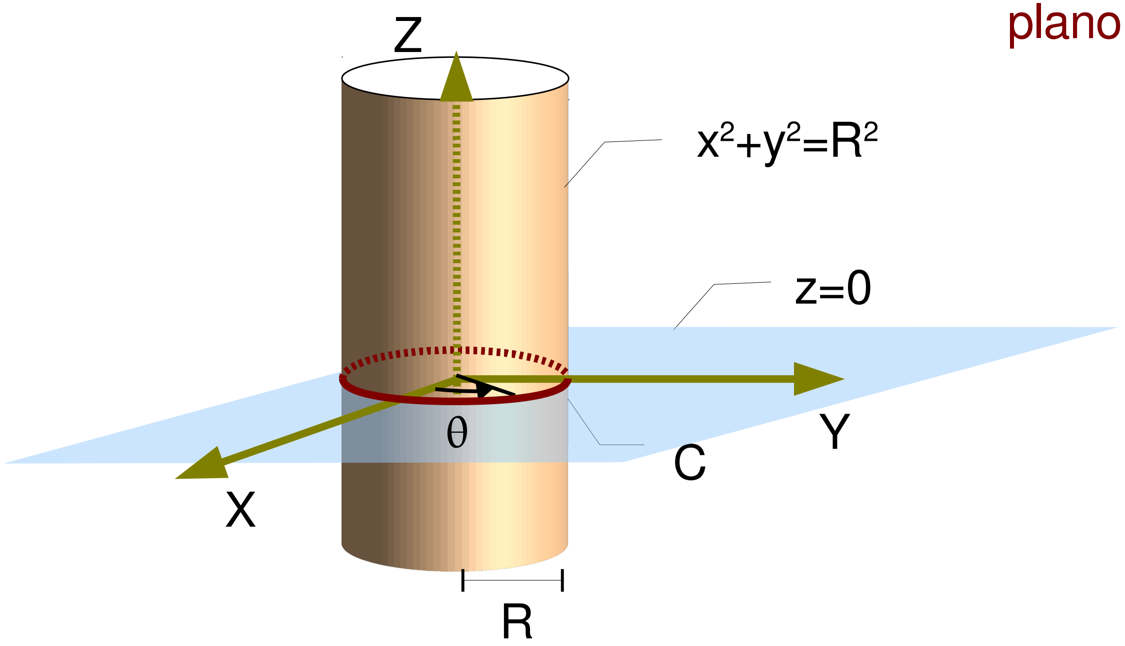
Ecuaciones parámetricas

$$C \equiv \vec{r}(\lambda) = \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

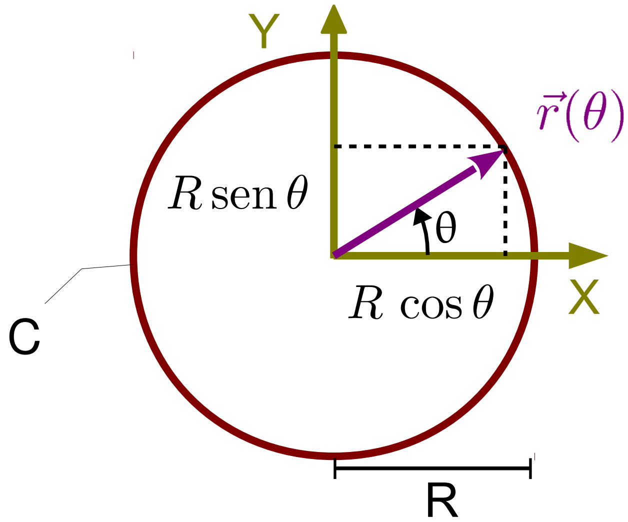
$$\lambda \in (-\infty, +\infty)$$

Ecuaciones implícitas

$$C \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$



Curva C : Circunferencia de radio R, en el plano z=0 y centrada en el origen



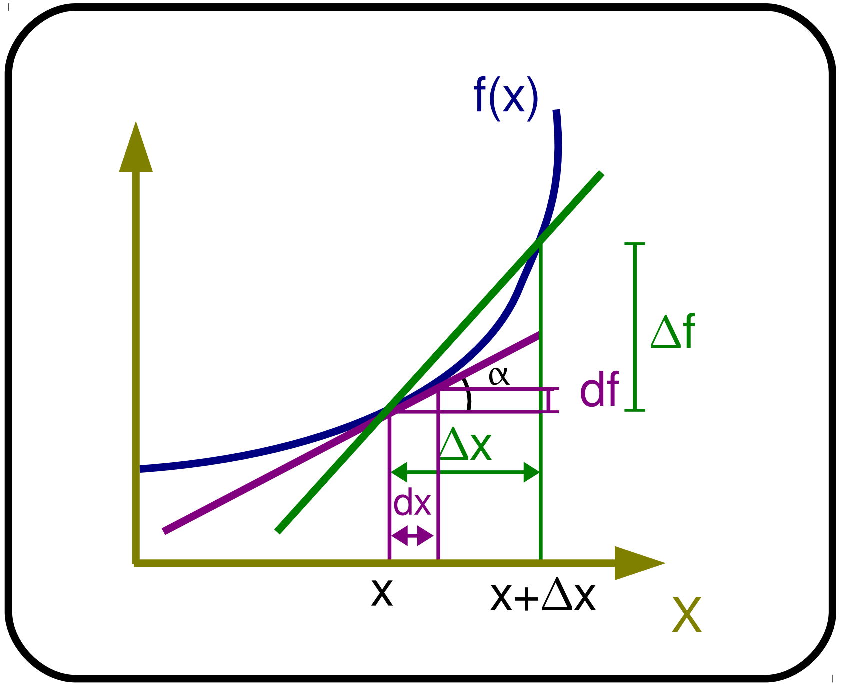
Ecuaciones parámetricas

$$C \equiv \vec{r}(\theta) = \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

Ecuaciones implícitas

$$C \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 - R^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$



$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$\Delta x \to 0$$

$$\mathrm{d}f = f(x+\mathrm{d}x) - f(x) = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_x \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}f = \tan\alpha\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

- La derivada da la tasa de variación de la función
- El diferencial de una función es el cambio de la función ante una variación muy pequeña de la variable independiente
- En Física, la derivada se puede tratar como el cociente de dos diferenciales

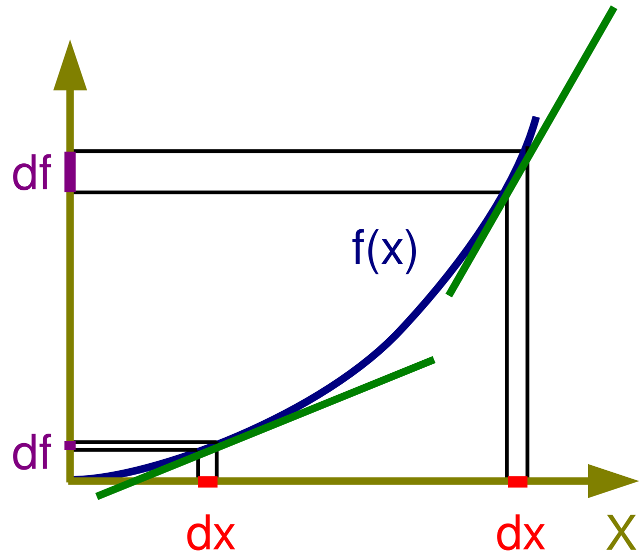
- Ejemplo

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

- Diferencial de la función

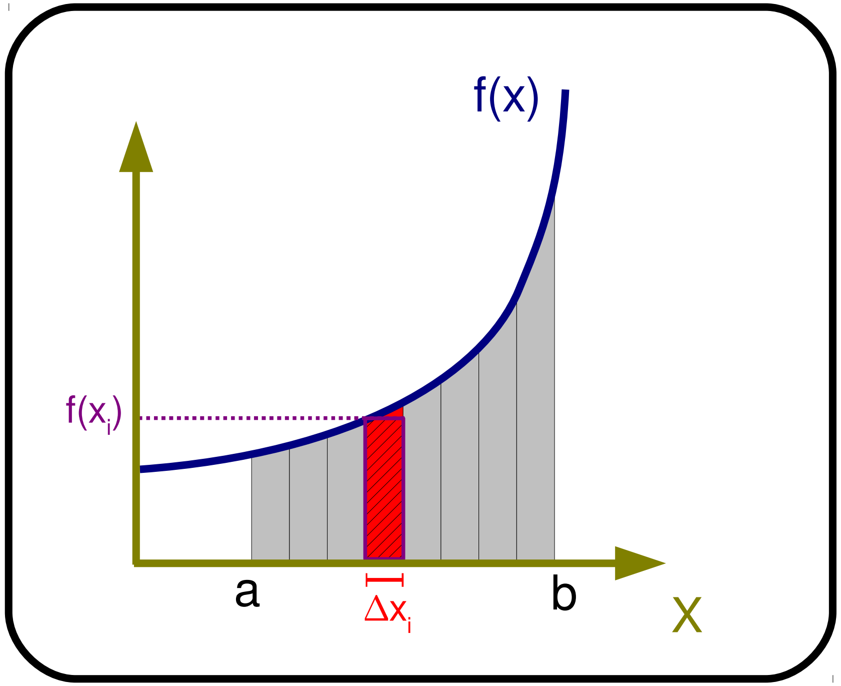
$$\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}x$$

- Un dx produce df distintos según en que punto de la curva nos encontremos



$$\begin{array}{lcl} x = 0 & \rightarrow & df = 0 \\ x = 0.1 & \rightarrow & df = 0.1\mathrm{d}x \qquad (\mathrm{d}x = 0.1 \rightarrow \mathrm{d}f = 0.01) \\ x = 1 & \rightarrow & df = 1\mathrm{d}x \qquad (\mathrm{d}x = 0.1 \rightarrow \mathrm{d}f = 0.1) \end{array}$$

Integral definida



$$\text{Área}[a,b] \simeq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

$$\Delta x \to 0$$

$$n \to \infty$$

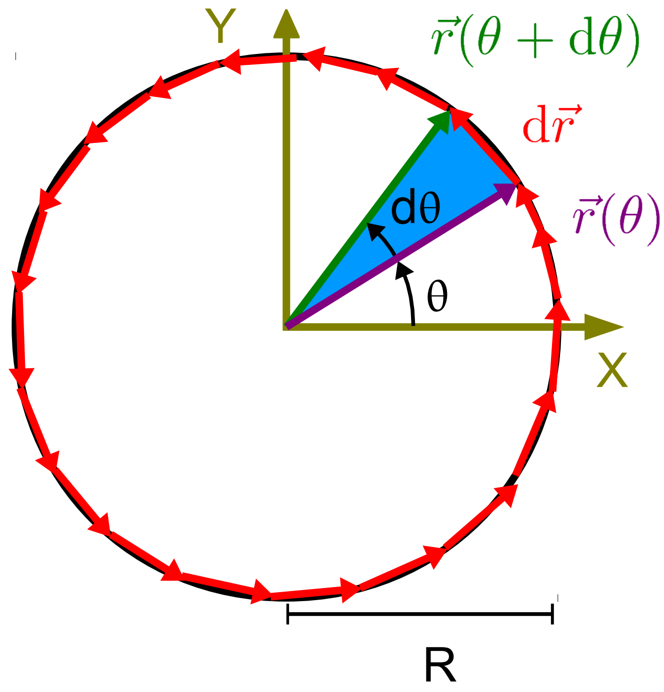
$$\text{Área}[a,b] = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x_i)x$$

- En Física, una integral definida es una suma de cosas pequeñas
- Se puede sumar cualquier objeto matemático: vectores, áreas, volúmenes, productos escalares....

- Longitud de una circunferencia

$$\vec{r}(\theta) = R\cos\theta\,\vec{\imath} + R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\mathrm{d}\vec{r}(\theta) = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\theta}\right)\mathrm{d}\theta = R\,\mathrm{d}\theta\,\left(-\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}\right)$$



  - La longitud es la suma de los módulos de todos los $\vec{\mathrm{dr}}$

$$L = \int |\mathrm{d}\vec{r}|(\theta) = \int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}\theta = R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi R$$

- Área del círculo

$$\mathrm{d}A(\theta) = \frac{1}{2}|\vec{r}(\theta)\times\mathrm{d}\vec{r}(\theta)| = \frac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ R\cos\theta & R\,\mathrm{sen}\,\theta & 0\\ -R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}\theta & R\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta & 0\end{array}\right\| = \frac{1}{2}R^2\mathrm{d}\theta$$

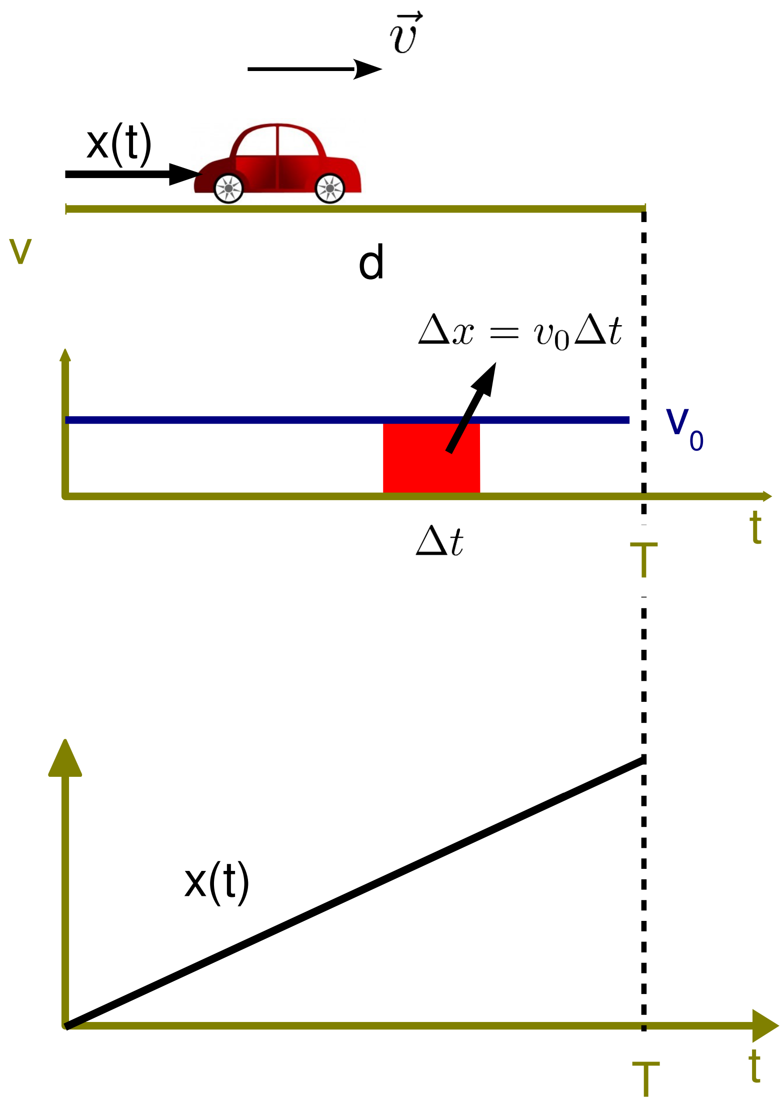
  - El área del círculo es la suma de las áreas de todos los triángulos

$$A = \int\mathrm{d}A = \int\frac{1}{2}|\vec{r}(\theta)\times\mathrm{d}\vec{r}(\theta)| = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}R^2\mathrm{d}\theta = \pi\,R^2$$

Índice

- Introducción
- Ecuaciones de una curva
- Velocidad y aceleración
- Movimientos elementales
  - Rectilíneo
  - Circular
- Geometría de curvas

Velocidad uniforme

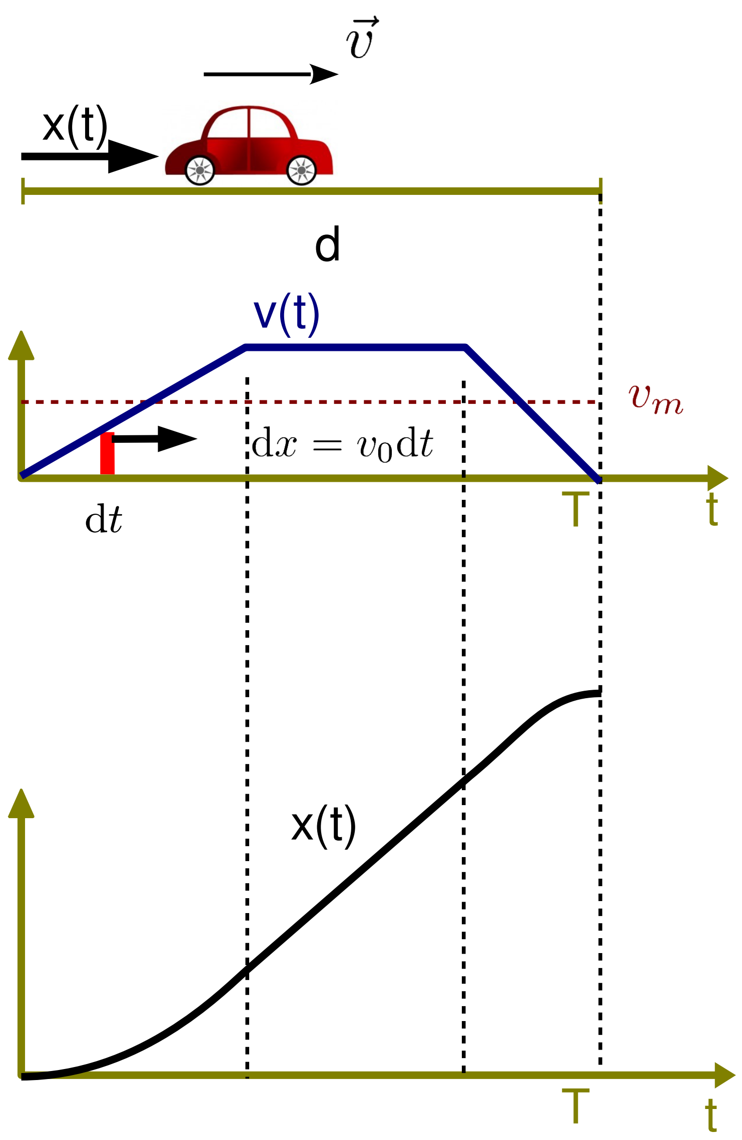


$$v = \frac{d}{T} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

El cociente es siempre el mismo independientemente del intervalo de tiempo considerado

$$\Delta x = v_0 \Delta t \rightarrow x(t) = x(0) + v_0\, t$$

Velocidad no uniforme

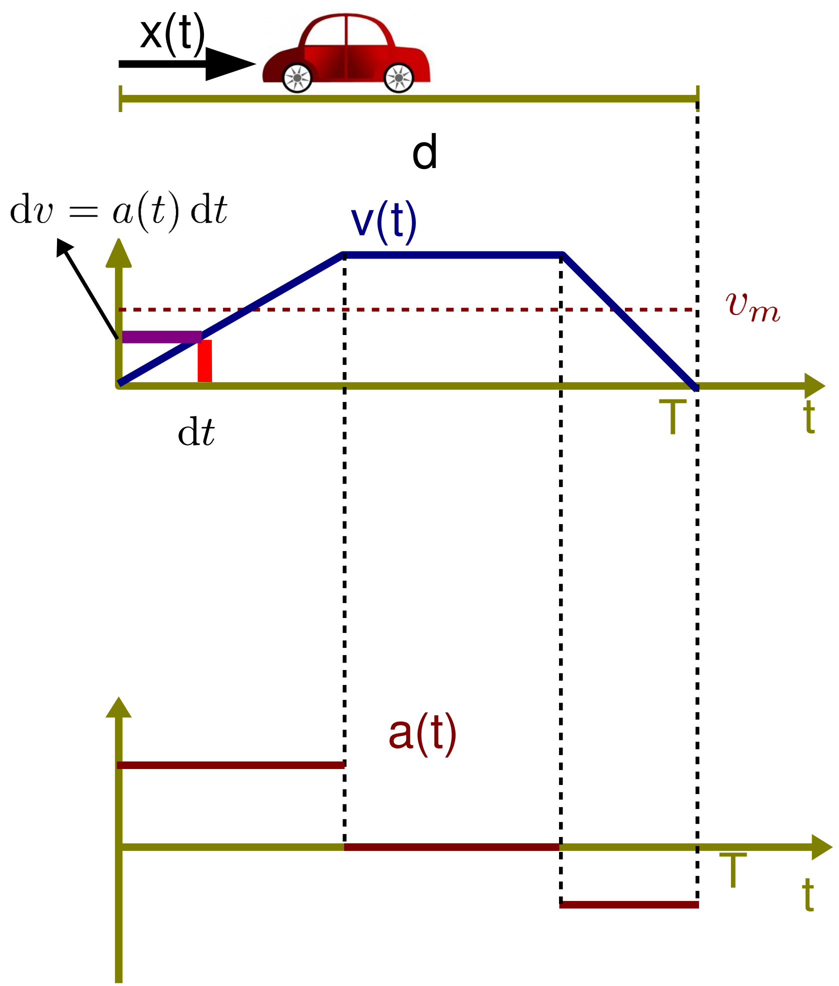


- Velocidad media $$v_m = \frac{d}{T}$$
  - El intervalo de tiempo de muestreo es muy grande
  - No da una descripción precisa del movimiento
- Velocidad instantánea $$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$
  - El intervalo de tiempo de muestreo es muy pequeño
  - Proporciona una funcion v(t)
  - La descripción del movimiento es precisa

$$\mathrm{d}x = v(t)\,\mathrm{d}t \to x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t$$

Velocidad no uniforme

- Aceleración $$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$



- El intervalo de tiempo de muestreo es muy pequeño
- Proporciona una funcion a(t)
- La descripción del movimiento es precisa

$$\mathrm{d}v = a(t)\,\mathrm{d}t \rightarrow v(t) = v(0) + \int_0^t a(t)\,\mathrm{d}t$$

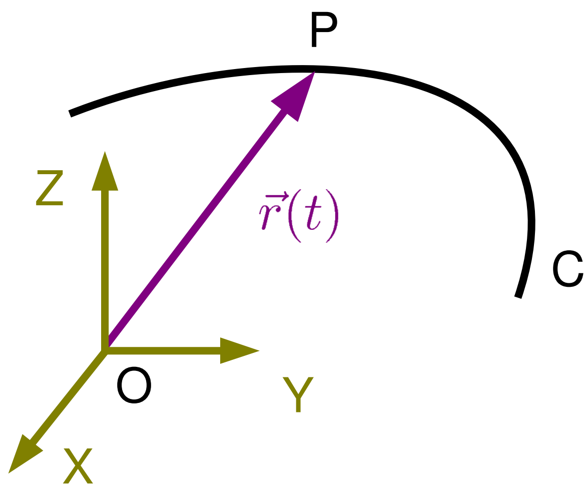
- La aceleración es la derivada segunda de la posición

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$a(t) = \dot{v} = \ddot{x}$$

- La curva C es la trayectoria de la partícula: el conjunto de puntos que recorre durante su movimiento

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

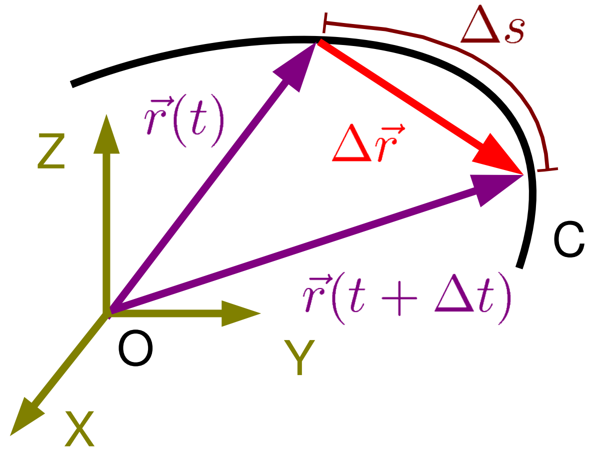


- $\vec{r}$ (t) es la ley horaria
- Las ecuaciones de las componentes en función del tiempo son las ecuaciones horarias

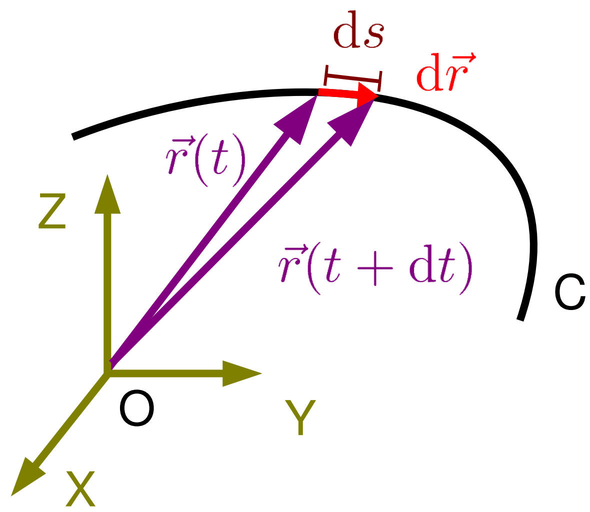
$$\vec{r}(t) \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

- La misma trayectoria puede describirse de diferentes modos, es decir, con diferente velocidad y aceleración

- Intervalo temporal de muestreo grande
  - $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$
  - No da una descripción precisa del movimiento



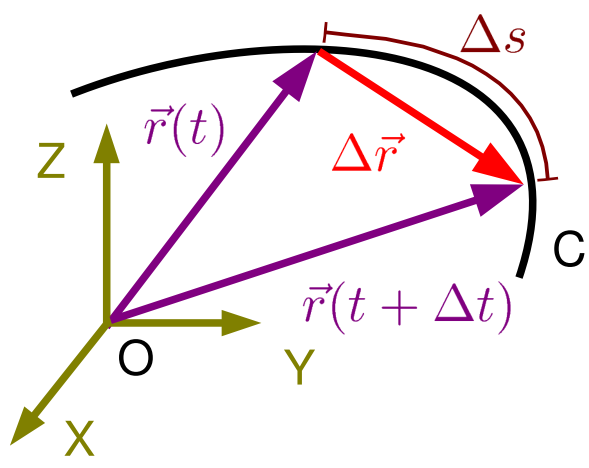
- Intervalo temporal de muestreo pequeño
  - $|\mathrm{d}\vec{r}| \simeq \mathrm{d}s$
  - La descripción del movimiento es precisa
  - En cada instante, $\mathrm{d}\vec{r}$ es tangente a la trayectoria



- Velocidad media

$$\boxed{\vec{v}_m(t) = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$

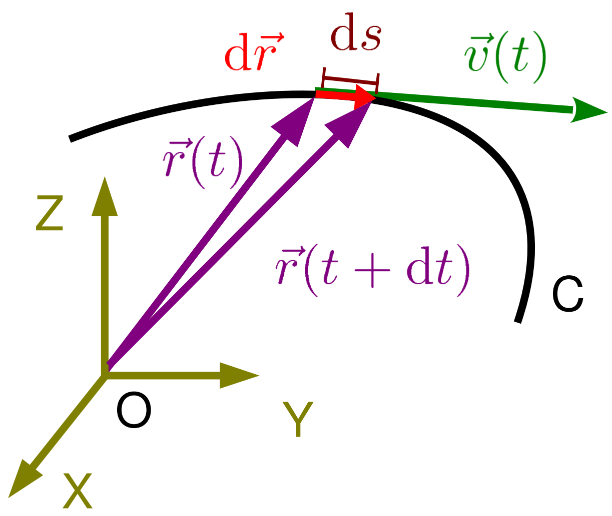
  - No da una descripción precisa del movimiento



- Velocidad instantánea

$$\boxed{\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}}$$

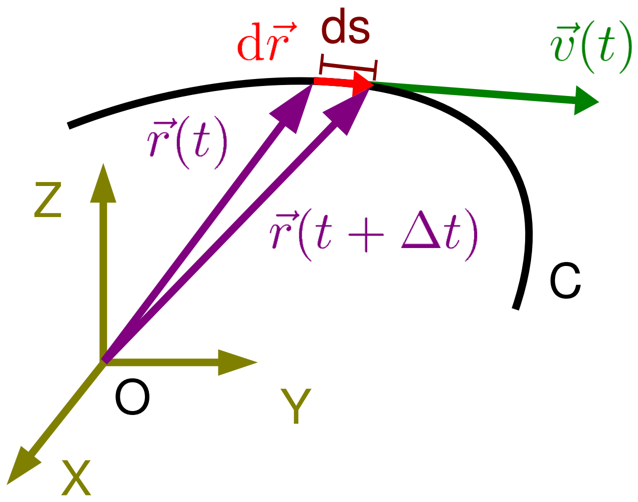
  - La descripción del movimiento es precisa
  - El dt es físico, no matemático



- Unidades en SI $[\vec{v}] = \mathrm{m/s}$

Velocidad instantánea

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}$$



- En cada instante es tangente a la trayectoria
- El desplazamiento en un instante dt y en un intervalo Δt son

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{r}\,(t) = \vec{r}\,(0) + \int_0^t \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t$$

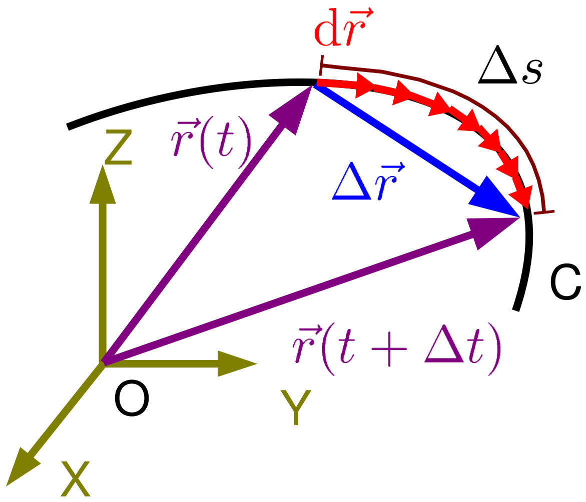
- Puede expresasrse como tres ecuaciones vectoriales, una para cada componente

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x(t) & \rightarrow & x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(t)\,\mathrm{d}t \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y(t) & \rightarrow & y(t) = y(0) + \int_0^t v_y(t)\,\mathrm{d}t \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_z(t) & \rightarrow & z(t) = z(0) + \int_0^t v_z(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

- La distancia recorrida en un instante dt y en un intervalo Δt son

$$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{r}| = |\vec{v}(t)|\,\mathrm{d}t$$

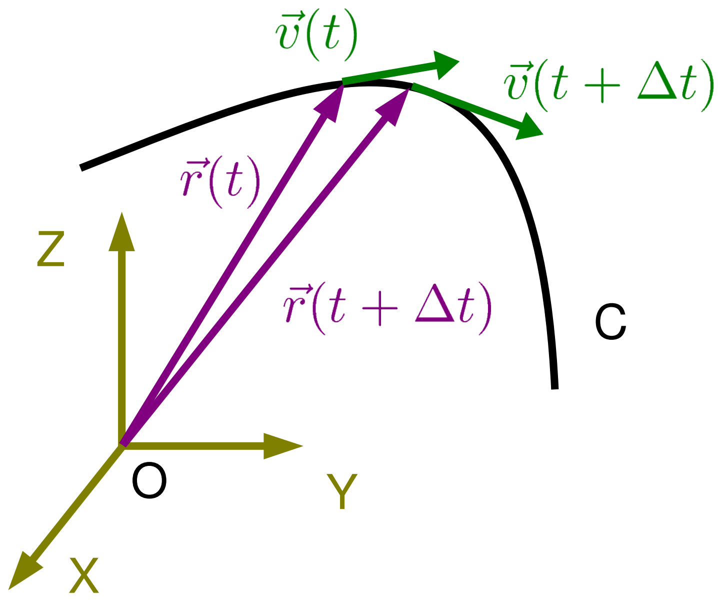
$$\Delta s = s(t) - s(0) = \int_0^t |\mathrm{d}\vec{r}| = \int_0^t |\vec{v}(t)|\,\mathrm{d}t$$



- El módulo de la velocidad es la celeridad o rapidez

$$|\vec{v}| = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$$

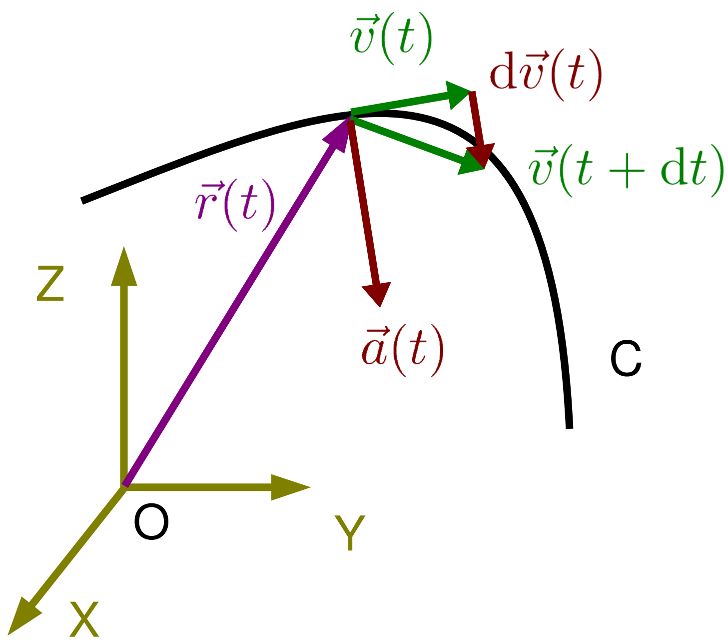
- Durante el movimiento, la velocidad puede cambiar su módulo y su dirección
  - La variación del módulo está relacionada con la celeridad
  - El cambio en la dirección está relacionado con como se curva la trayectoria



- La aceleración es la tasa de variación de la velocidad

$$\boxed{\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{v}}}$$

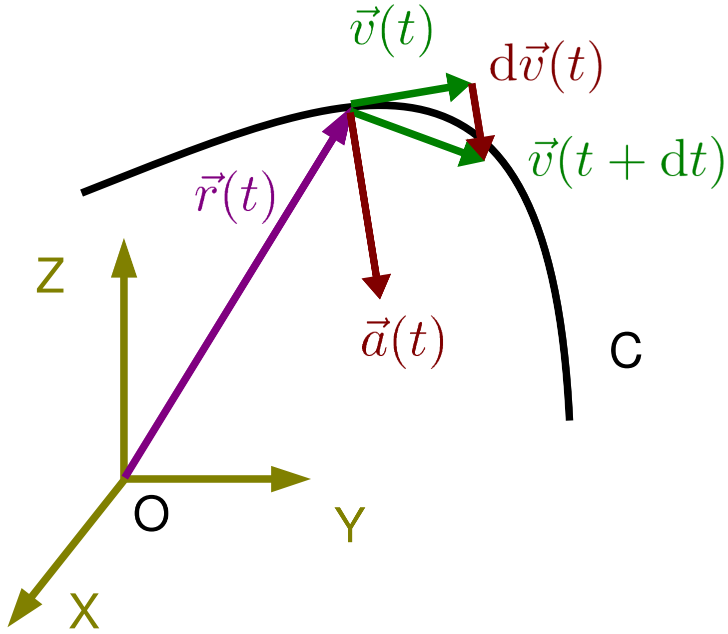
  - Apunta hacia la parte cóncava de la trayectoria



- Unidades en SI

$$[\vec{a}] = \mathrm{m/s^2}$$

- Dada la aceleración, podemos calcular la velocidad en cada instante



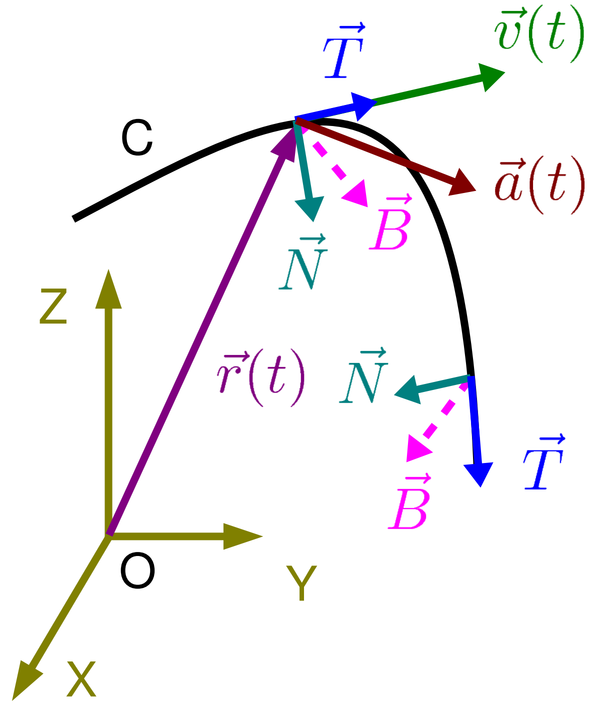
$$\mathrm{d}\vec{v} = \vec{a}(t)\,\mathrm{d}t \implies \vec{v}\,(t) = \vec{v}\,(0) + \int_0^t \vec{a}(t)\,\mathrm{d}t$$

- Puede expresasrse como tres ecuaciones vectoriales, una para cada componente

$$\mathrm{d}\vec{v} = \vec{a}(t)\,\mathrm{d}t \quad \implies \quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = a_x(t) & \rightarrow \quad v_x(t) = v_x(0) + \int_0^t a_x(t)\,\mathrm{d}t \\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = a_y(t) & \rightarrow \quad v_y(t) = v_y(0) + \int_0^t a_y(t)\,\mathrm{d}t \\ \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = a_z(t) & \rightarrow \quad v_z(t) = v_z(0) + \int_0^t a_z(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

- Vector unitario tangente a la trayectoria

$$\vec{T} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{|\mathrm{d}\vec{r}|} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$ Vector tangente



- Descomponemos la aceleración en una componente tangente a la velocidad y otra perpendicular

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}$$

$$\vec{N} = \frac{1}{a_N}\left(\vec{a} - a_T\vec{T}\right)$$ Vector normal

- Completamos el triedro

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$ Vector binormal

El triedro es intrínseco a la curva. No depende de cómo se recorra ni del sistema de ejes y coordenadas que se utilice

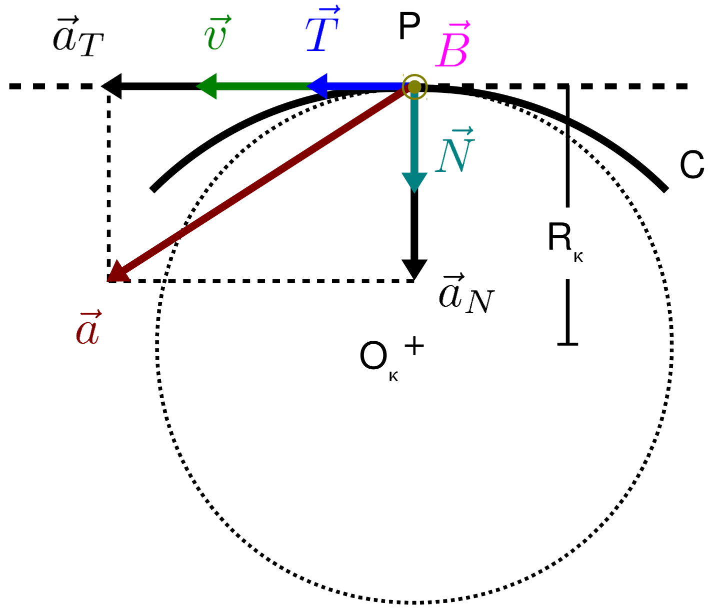
Velocidad y aceleración en el triedro intrínseco

- Velocidad

$$\vec{v} = v\,\vec{T}$$

- Aceleración

$$\vec{a} = a_T\,\vec{T} + a_N\,\vec{N}$$



- Tangencial

$$a_T = \vec{a}\cdot\vec{T} = \vec{a}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{|\vec{v}|}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}\right) = \frac{1}{|\vec{v}|}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{|\vec{v}|^2}{2}\right) = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}|}\frac{\mathrm{d}|\vec{v}|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}|\vec{v}|}{\mathrm{d}t}$$

- Normal

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = |\vec{a}\times\vec{T}| = \frac{|\vec{a}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

- Radio de curvatura

$$R_\kappa = \frac{v^2}{a_N}$$

- Curvatura

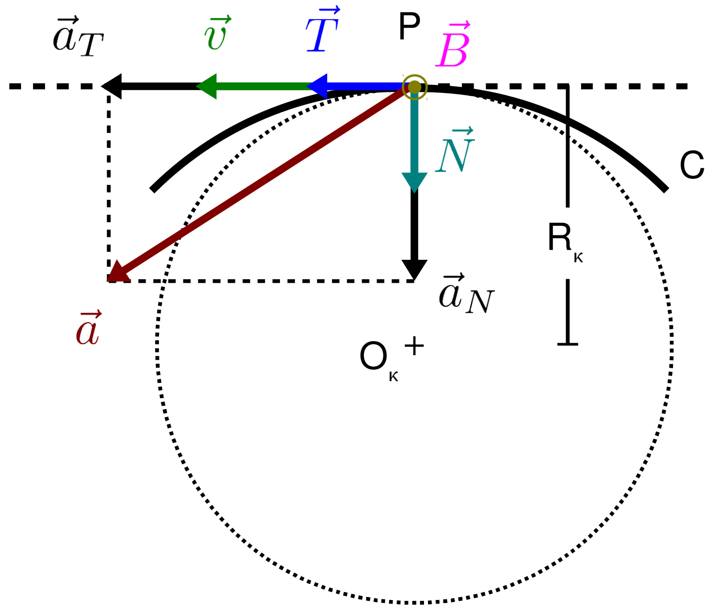
$$\kappa = \frac{1}{R_\kappa}$$

- Centro de curvatura

$$\vec{r}_{O_\kappa} = \vec{r} + R_\kappa\vec{N}$$

- Expresiones

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = v(t)\,\vec{T}$$



$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}|\vec{v}|}{\mathrm{d}t}\,\vec{T} + \frac{|\vec{v}|^2}{R_\kappa}\vec{N} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}$$

- Significado de las componentes de la aceleración

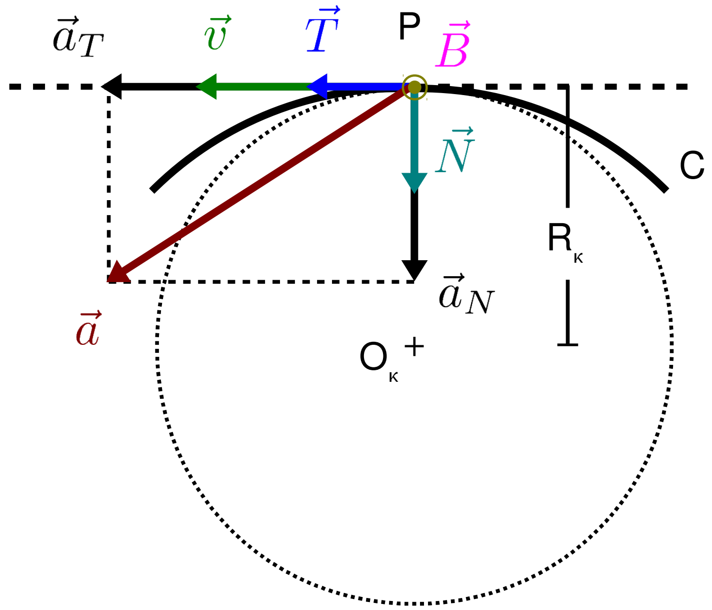
	a_T	a_N
Información	Variación del módulo de **v**	Variación de la dirección de **v**
signo	Positivo (acelerado) o negativo (retardado)	Siempre positivo
Nulidad permanente	Movimiento uniforme (|**v** | constante)	Movimiento rectilíneo

- Velocidad

$$v_T = \vec{v} \cdot \vec{T}$$

- Aceleración

$$a_T = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{v}|} \qquad a_N = \frac{|\,\vec{v} \times \vec{a}\,|}{|\vec{v}|}$$



- Curvatura

$$R_\kappa = \frac{|\vec{v}|^2}{a_N} = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|} \qquad \kappa = \frac{1}{R_\kappa} = \frac{a_N}{|\vec{v}|^2} = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|^3}$$

- Triedro intrínseco

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \qquad \vec{N} = \frac{\vec{a} - a_T\vec{T}}{a_N} \qquad \vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$

Índice

- Introducción
- Ecuaciones de una curva
- Velocidad y aceleración
- Movimientos elementales
  - Rectilíneo
  - Circular
- Geometría de curvas

- La trayectoria es una línea recta

$$\vec{T} = \text{cte} \qquad \kappa = 0 \qquad R_\kappa = \infty$$

- Aceleración

$$\vec{a} = a_T \vec{T}$$

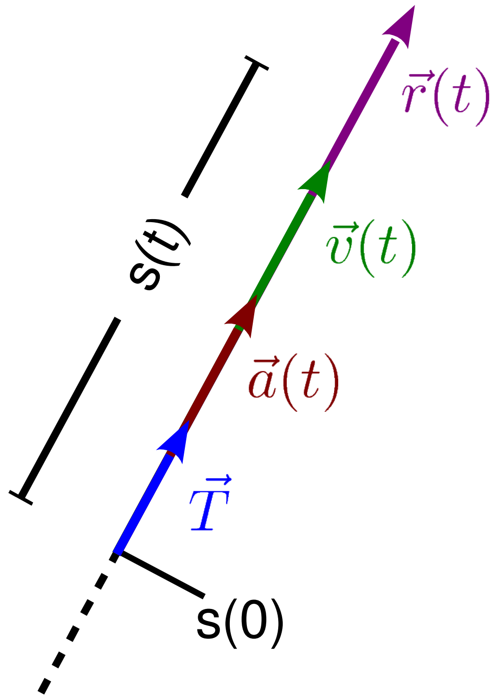
- Velocidad

$$\mathrm{d}\vec{v} = \vec{a}\,\mathrm{d}t \rightarrow \vec{v}(t) = \left(v(0) + \int_0^t a_T(t)\,\mathrm{d}t\right)\vec{T}$$

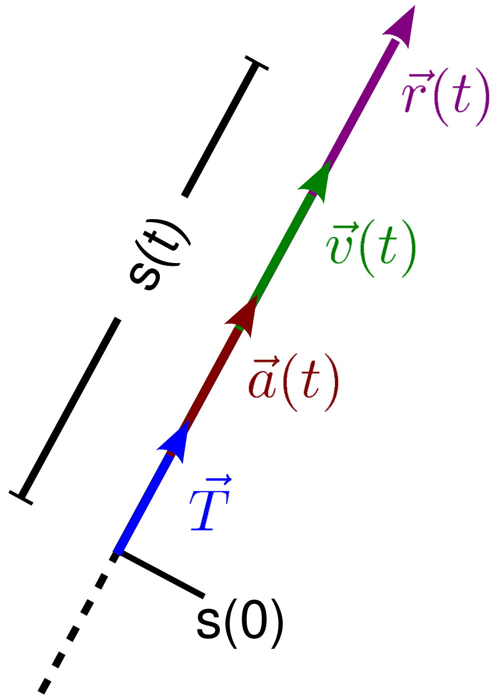
- Posición

$$\vec{r} = s(t)\vec{T}$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\,\mathrm{d}t \rightarrow \vec{r}(t) = s(t)\vec{T} = \left(s(0) + \int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t\right)\vec{T}$$

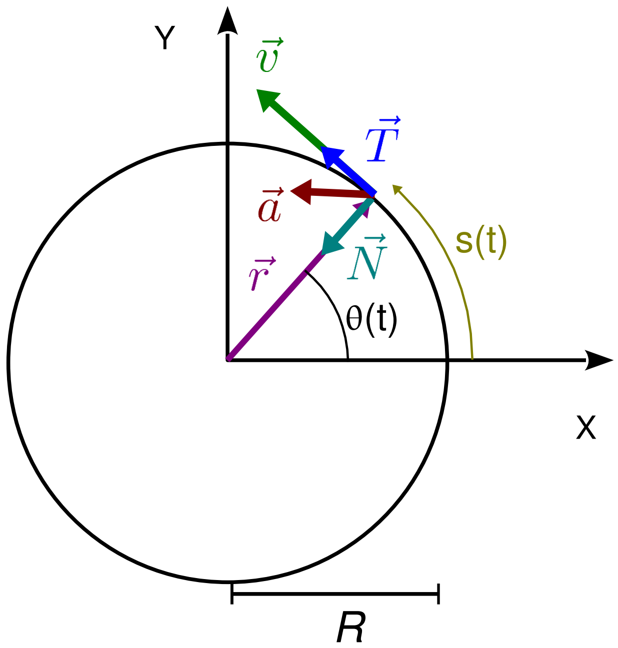


- Movimiento rectilíneo uniforme (m.r.u.)
  - Aceleración $\vec{a} = 0$
  - Velocidad $\vec{v} = \vec{v}(0) = \vec{\mathrm{cte}}$
  - Posición $s(t)\vec{T} = \left(s(0) + vt\right)\vec{T}$
- Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.)
  - Aceleración $\vec{a} = \vec{\mathrm{cte}}$
  - Velocidad $\vec{v} = \left(v(0) + at\right)\vec{T}$
  - Posición $\vec{r} = \left(s(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2\right)\vec{T}$



Movimiento circular

- La trayectoria es una circunferencia $\quad R_\kappa = R(\text{cte}) \qquad \kappa = \dfrac{1}{R}(\text{cte})$
  - Velocidad angular $\quad \dot{\theta} = \omega$
  - Aceleración angular $\quad \ddot{\theta} = \dot{\omega} = \alpha$



- Posición

$$\vec{r} = [R\cos\theta(t), R\,\text{sen}\,\theta(t)]$$

- Velocidad

$$\vec{v}(t) = R\dot{\theta}\,[-\text{sen}\,\theta(t), \cos\theta(t)]$$

- Aceleración

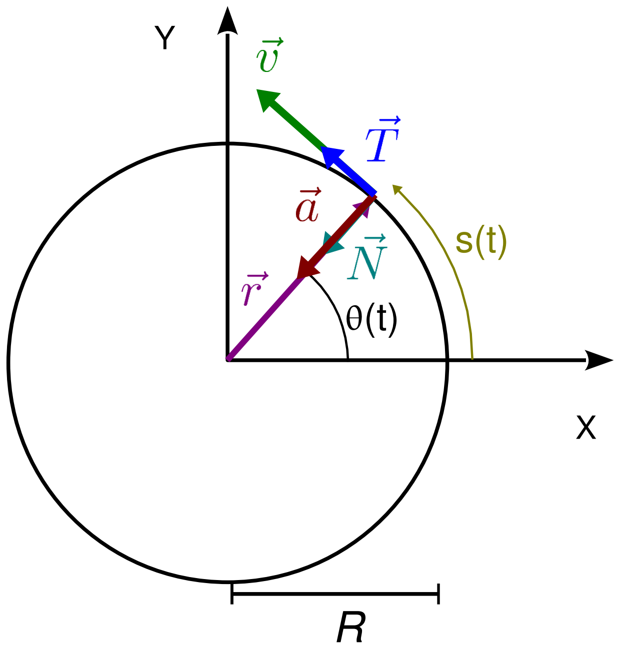
$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}} = R\ddot{\theta}\,\overset{\vec{T}}{[-\text{sen}\,\theta(t), \cos\theta(t)]} + R\dot{\theta}^2\,\overset{\vec{N}}{[-\cos\theta(t), -\text{sen}\,\theta(t)]}$$

  - Relación entre magnitudes lineales y circulares

$$s = R\,\theta \;\Big|\; v = R\dot{\theta} \;\Big|\; a_T = \vec{a}\cdot\vec{T} = R\ddot{\theta} \;\Big|\; a_N = \vec{a}\cdot\vec{N} = R\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{T} &= [-\text{sen}\,\theta(t), \cos\theta(t), 0] \\ \vec{N} &= [-\cos\theta(t), -\text{sen}\,\theta(t), 0] \\ \vec{B} &= [0, 0, 1] \end{aligned}}$$

- La aceleración angular es cero $\alpha = \dot{\omega} = 0$
  - Velocidad angular $\dot{\theta} = \omega = \mathrm{cte}$
  - Ángulo barrido $\theta = \theta(0) + \omega\, t$



- Variables cinemáticas

$$s(t) = R\theta(t) = R(\theta(0) + \omega\, t)$$

$$|\vec{v}| = R\omega = \mathrm{cte}$$

$$|\vec{a}| = a_N = R\omega^2 = \mathrm{cte}$$

  - El movimiento es periódico

$$\left.\begin{array}{l} \theta(T) = \theta(0) + 2\pi \\ \theta(T) = \theta(0) + \omega\, T \end{array}\right| \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- Se define el vector velocidad angular $\vec{\omega}$
  - Módulo $|\vec{\omega}| = |\omega| = |\dot{\theta}|$
  - Recta soporte: eje de giro
  - Sentido: regla del tornillo
- Se define el vector aceleración angular $\vec{\alpha}$

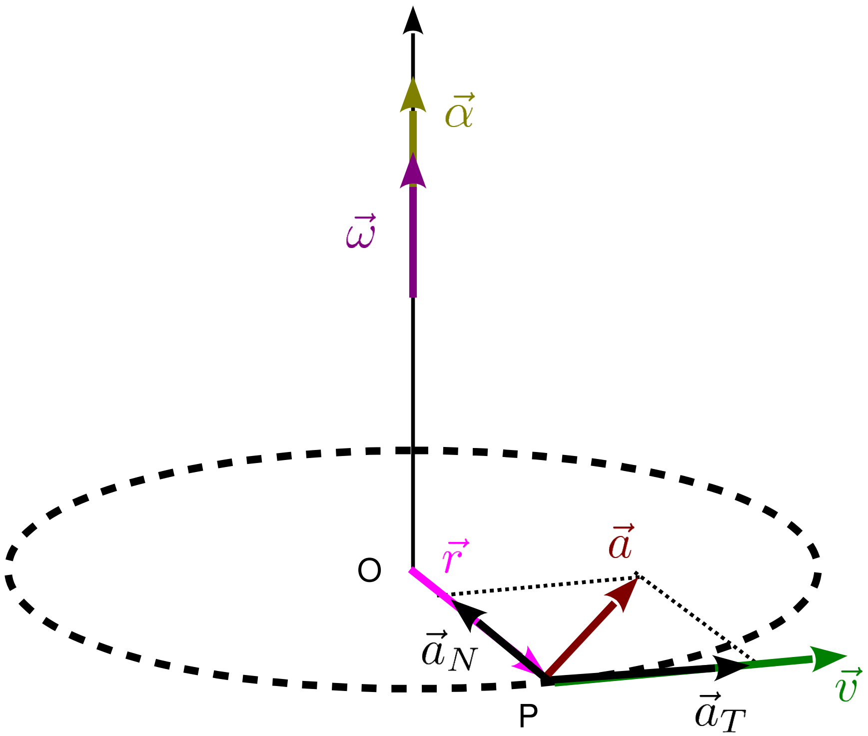
$$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{dt}}$$

- Velocidad y aceleración

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r} \qquad \vec{a}_N = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$



- Los vectores $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ son vectores deslizantes

Índice

- Una misma trayectoria puede ser recorrida con diferentes velocidades

- La geometría de la trayectoria es independiente de como se recorra
  - Una curva se puede parametrizar de muchas maneras
  - El triedro intrínseco en cada punto es independiente del parámetro que se utilice

Triedro intrínseco (de Frenet)

- Curva parametrizada en función de un parámetro λ

$$\vec{r} = \vec{r}(\lambda)$$

- Vector unitario tangente a la curva en cada punto

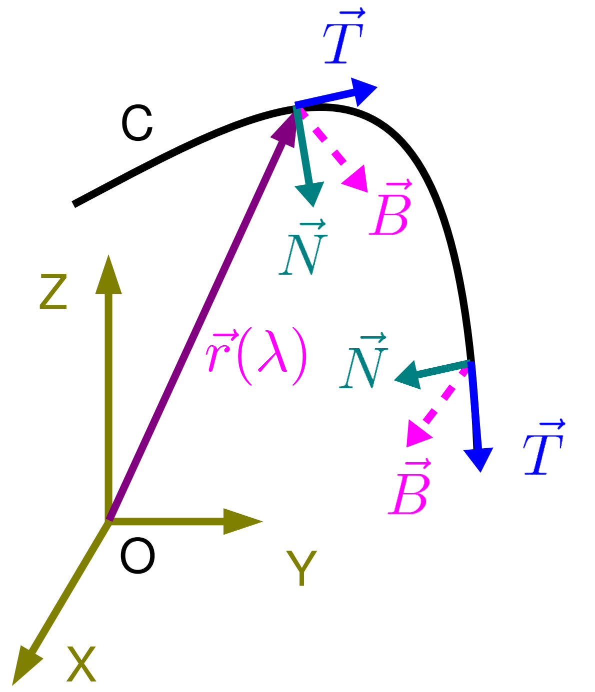
$$\vec{T} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}\lambda}{|\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}\lambda|}$$ Vector tangente

- El vector normal indica la variación de la dirección de $\vec{T}$

$$\vec{N} = \frac{\mathrm{d}\vec{T}/\mathrm{d}\lambda}{|\mathrm{d}\vec{T}/\mathrm{d}\lambda|}$$ Vector normal

- Completamos el triedro

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$ Vector binormal

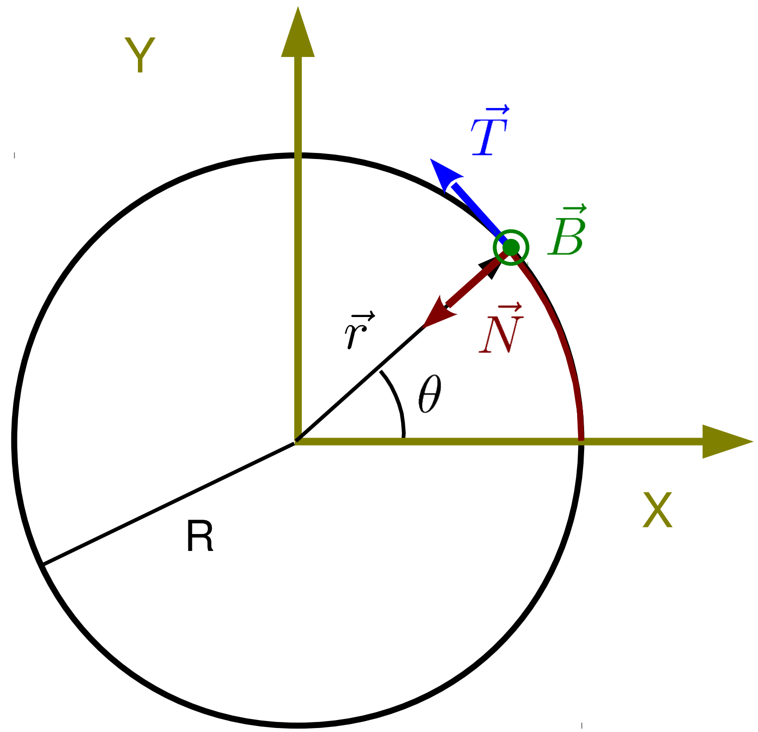


El triedro es intrínseco a la curva. No depende de cómo se recorra ni del sistema de ejes y coordenadas que se utilice

- Parametrización con el ángulo

$$\vec{r} = \vec{r}(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = R\cos\theta \\ y(\theta) = R\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z(\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$



- Triedro intrínseco
  - Vector tangente

$$\vec{T} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}\theta}{|\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}\theta|} = [-\mathrm{sen}\,\theta, \cos\theta, 0]$$

  - Vector normal

$$\vec{N} = \frac{\mathrm{d}\vec{T}/\mathrm{d}\theta}{|\mathrm{d}\vec{T}/\mathrm{d}\theta|} = [-\cos\theta, -\mathrm{sen}\,\theta, 0]$$

Indica la dirección en la que varía el vector tangente

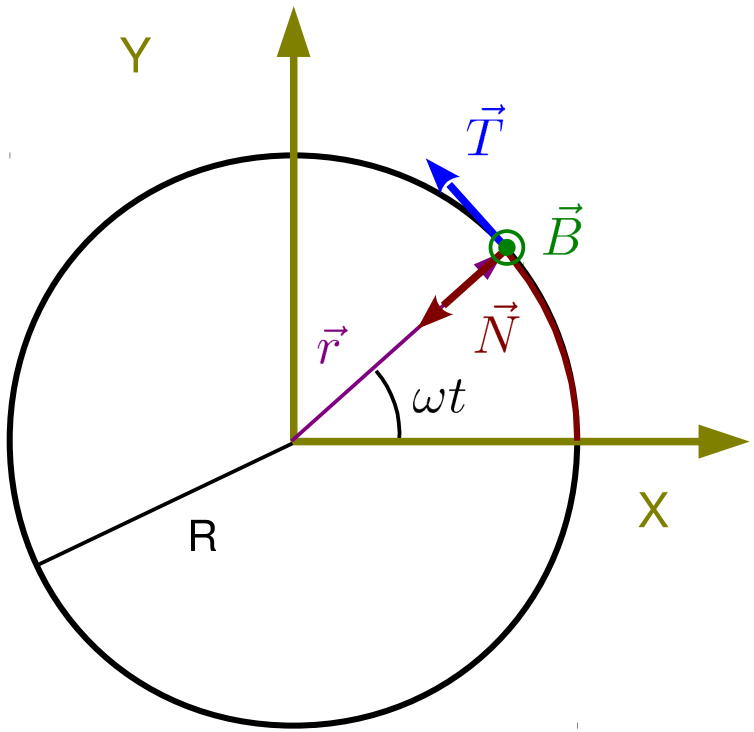
  - Vector binormal

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$

- Parametrización con el tiempo

$$\theta = \omega t$$

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\,\mathrm{sen}\,(\omega t) \\ z(t) = 0 \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi/\omega]$$



- Triedro intrínseco
  - Vector tangente

$$\vec{T} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t|} = [-\mathrm{sen}\,(\omega t), \cos(\omega t), 0]$$

  - Vector normal

$$\vec{N} = \frac{\mathrm{d}\vec{T}/\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\vec{T}/\mathrm{d}t|} = [-\cos(\omega t), -\mathrm{sen}\,(\omega t), 0]$$

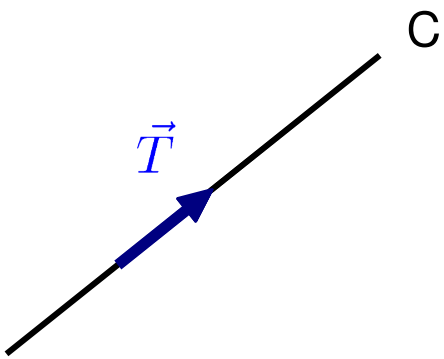
  - Vector binormal

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$

En cada punto de la curva los vectores del tridero son los mismos independientemente del parámetro que se utilice

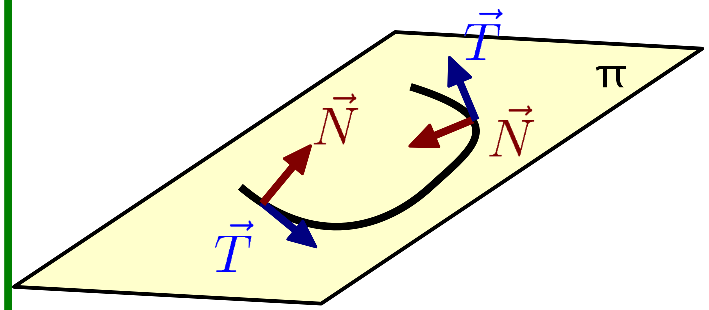
Triedro intrínseco o de Frenet: siginificado

Línea recta



Vector tangente uniforme

Línea plana

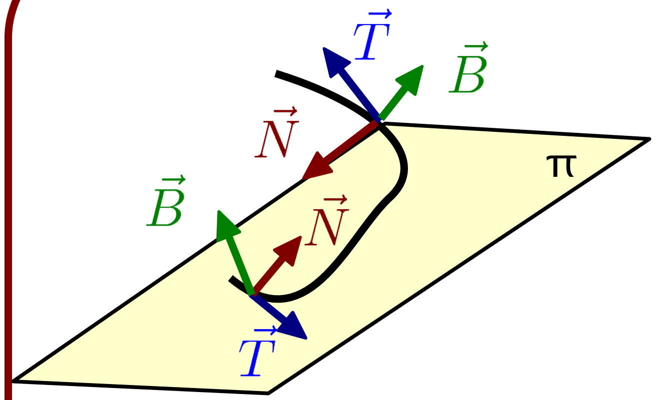


Contenida en un plano

Vector tangente variable

Vector normal $\vec{N}$ apunta en la dirección en que se tuerce la curva

Curva alabeada



No contenida en un plano

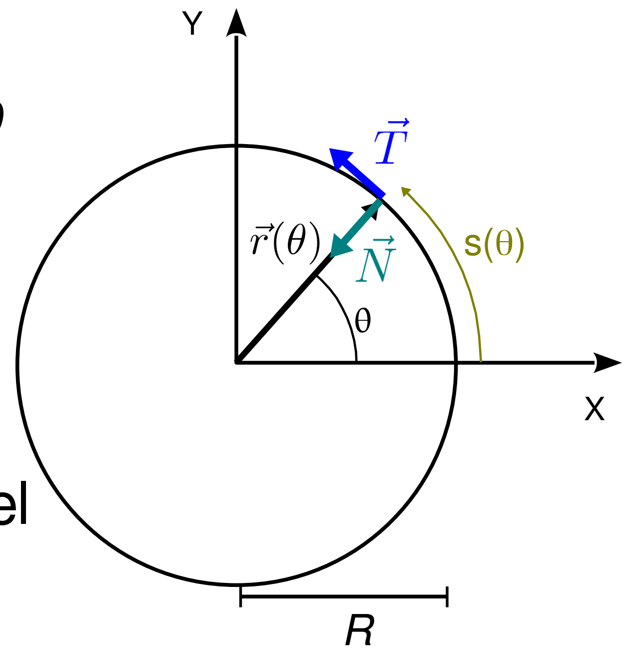
Vector binormal $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$

- El parámetro arco es la distancia recorrida sobre la curva

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = \begin{cases} x(s) = R\cos(s/R) \\ y(s) = R\,\mathrm{sen}\,(s/R) \\ z(s) = 0 \end{cases}$$

$$s = s(\theta) = R\,\theta$$

$$s \in [0, 2\pi\,R)$$



- La curvatura en cada punto es el módulo de la derivada del vector tangente cuando está expresado en el parámetro arco

$$\kappa(s) = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\right|$$

- Si se usa otro parámetro hay que utilizar la regla de la cadena

$$\lambda = \lambda(s) \Longrightarrow \kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}\lambda}\right|\left|\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s}\right|$$

Resumen

- Introducción
  - Punto material, posición, velocidad, aceleración, tiempo
- Ecuaciones de una curva
- Velocidad y aceleración
  - Triedro intrínseco: aceleración tangencial y normal
- Movimientos elementales
  - Rectilíneo
  - Circular

Resumen

- Geometría de curvas
  - Parametrización
  - Triedro de Frenet
  - Parámetro arco
  - Curvatura