

Tema 5: Dinámica de la partícula

FISICA I, 1º Grado en Ingeniería Electrónica, Robótica y
Mecatrónica

Departamento de Física Aplicada III

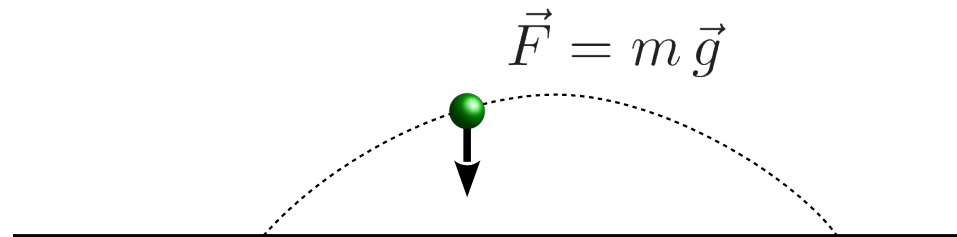
Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

- **Introducción**
- Leyes de Newton
- Fuerzas activas y de reacción vincular
- Estática del punto
- Fuerzas de rozamiento: Leyes de Coulomb
- Dinámica del punto material
- Coordenadas polares
- Rozamiento dependiente de la velocidad: velocidad terminal

- La **Dinámica** estudia las causas que originan el movimiento de los cuerpos
- Junto con la **Cinemática**, permite determinar los movimientos de los cuerpos
- Estas causas se caracterizan con la magnitud física de **fuerza**
- La masa de un cuerpo determina la “**intensidad**” con que una fuerza afecta a su estado de movimiento

- Es la causa que **cambia** el estado de reposo o movimiento de un cuerpo, o de producir en él estados de tensión
- Es **vectorial**: magnitud, dirección y sentido
- En general depende del tiempo, la posición y la velocidad $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$
- Puede provocar diferentes efectos
 - **Acelerar un cuerpo: empujar un coche**
 - **Deformar un cuerpo: estirar un muelle**
 - **Provocar una rotación: rueda girando**
 - **No producir ningún efecto (aparentemente): empujar un edificio**
- La representación de una fuerza es un **vector**

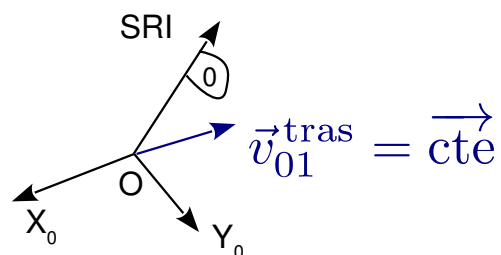
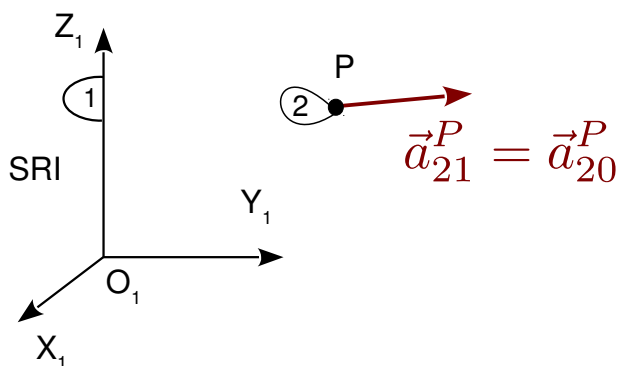


- Introducción
- **Leyes de Newton**
- Fuerzas activas y de reacción vincular
- Estática del punto
- Fuerzas de rozamiento: Leyes de Coulomb
- Dinámica del punto material
- Coordenadas polares
- Rozamiento dependiente de la velocidad: velocidad terminal

- Fueron enunciadas por Isaac Newton en 1687: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*
- Primera Ley o Ley de Inercia
 - Introduce el concepto de inercia y sistema de referencia inercial
- Segunda Ley
 - Relaciona fuerza, masa y aceleración
- Tercera Ley o Principio de acción y reacción
 - Relaciona las fuerzas mutuas que ejercen los cuerpos entre sí
 - Esta relacionada con la conservación de la cantidad de movimiento

Todo punto material libre, no sometido a ninguna interacción, se mantiene indefinidamente en estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme respecto a un sistema de referencia inercial

- Un sistema de referencia inercial (SRI) es un sistema en **reposo** o con **velocidad constante**
 - Su **aceleración es cero**
 - Su **rotación es cero**
 - Un sistema que se traslada con **velocidad uniforme** respecto a un SRI también es un SRI
- Todos los SRI miden **la misma aceleración** para un punto material cualquiera

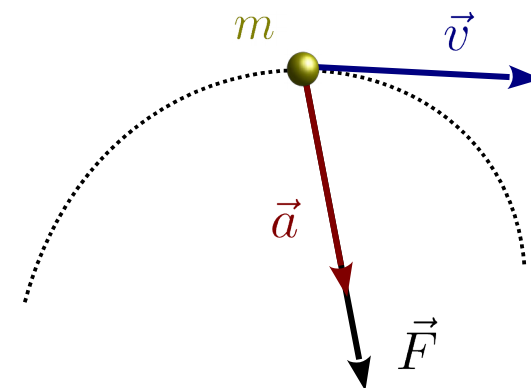


$$\vec{a}_{21}^P = \vec{a}_{20}^P$$

Todo punto material sometido a una fuerza experimenta una aceleración en la misma dirección y sentido en que actúa la fuerza y de módulo proporcional al módulo de la fuerza

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

- La magnitud m es la **masa inercial** de la partícula
 - Mide la **resistencia** de la partícula a **cambiar** su estado de movimiento (su inercia)
- La fuerza se mide en Newtons en el S.I. : $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$
- Se puede leer de 3 maneras diferentes
 - Si se conoce la fuerza y la masa proporciona una ecuación diferencial para describir el movimiento
 - Si se conoce la masa y la aceleración permite determinar la fuerza
 - Si se conoce la fuerza y la aceleración permite determinar la masa inercial

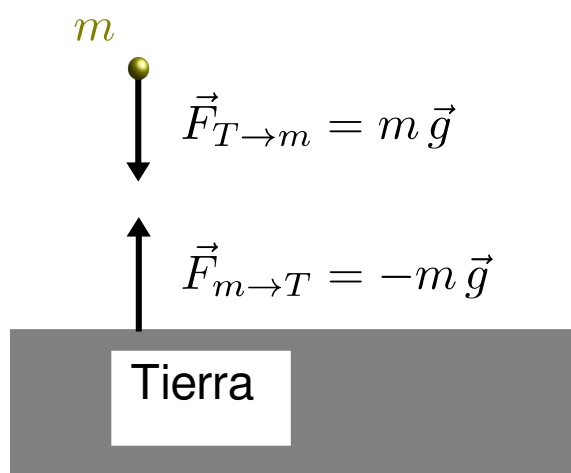


Si un punto material A ejerce una fuerza ($\vec{F}_{A \rightarrow B}$) sobre otro punto material B, entonces B ejerce otra fuerza sobre A ($\vec{F}_{B \rightarrow A}$) de igual módulo y dirección, pero de sentido contrario

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$$



- Cada fuerza se aplica en cuerpos diferentes
- La aceleración que adquiere cada partícula depende de su masa inercial



Aceleración de la masa

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

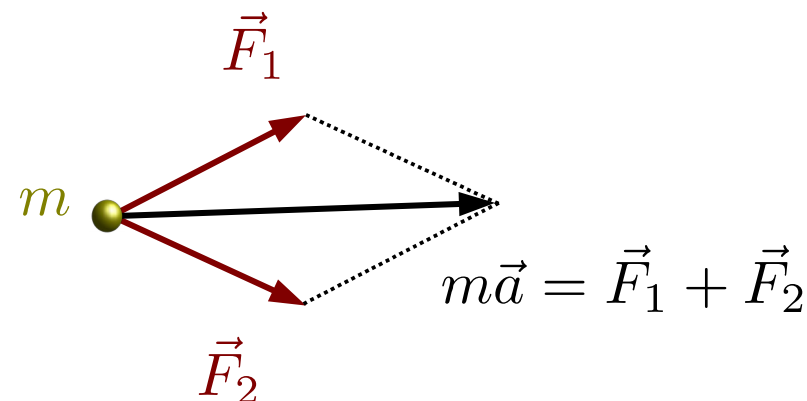
Aceleración de la Tierra

$$a_T = \frac{F_{m \rightarrow T}}{m_T} = g \frac{m}{m_T}$$

$$\left. \begin{array}{l} m = 1 \text{ kg} \\ m_T \simeq 6 \times 10^{24} \text{ kg} \end{array} \right| \longrightarrow a_T \simeq 2 \times 10^{-25} \text{ m/s}^2$$

Si sobre un mismo punto material actúan dos fuerzas simultáneamente, la aceleración que adquiere es la suma vectorial de las aceleraciones que le comunicarían cada una de las fuerzas por separado

$$\vec{a} = \frac{1}{m}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$



- Cuando la partícula está sometida a n fuerzas se generaliza

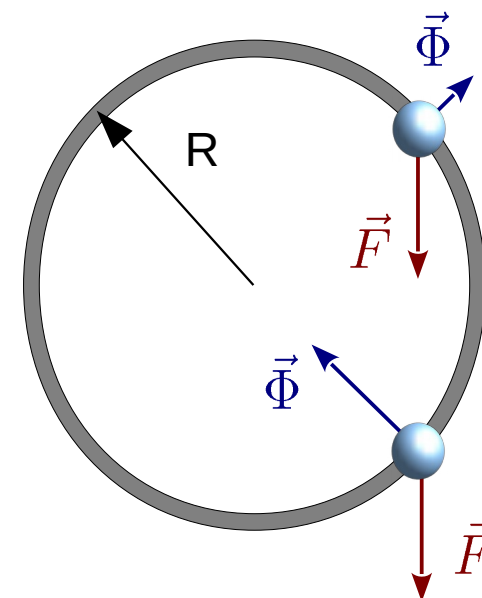
$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}_{neta}$$

$$\vec{F}_{neta} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

- Introducción
- Leyes de Newton
- Fuerzas activas y de reacción vincular
- Estática del punto
- Fuerzas de rozamiento: Leyes de Coulomb
- Dinámica del punto material
- Coordenadas polares
- Rozamiento dependiente de la velocidad: velocidad terminal

■ Fuerzas activas $\vec{F}_i$

- Son conocidas antes de resolver el problema
- Ejemplos de fuerzas activas
 - Fuerza gravitatoria
 - Fuerza de un muelle
 - Fuerzas eléctricas y magnéticas



■ Fuerzas de reacción vincular (f.r.v.) $\vec{\Phi}_i$

- Son responsables de que se cumplan las ligaduras
- Son incógnitas del problema: se adaptan a las fuerzas activas
- Vínculo liso: la fuerza vincular es perpendicular al vínculo
- Vínculo rugoso: la fuerza vincular es paralela al vínculo
- Ejemplos: plano inclinado, cuerda tensa, partícula en un aro

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \vec{u}_{12} = -G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

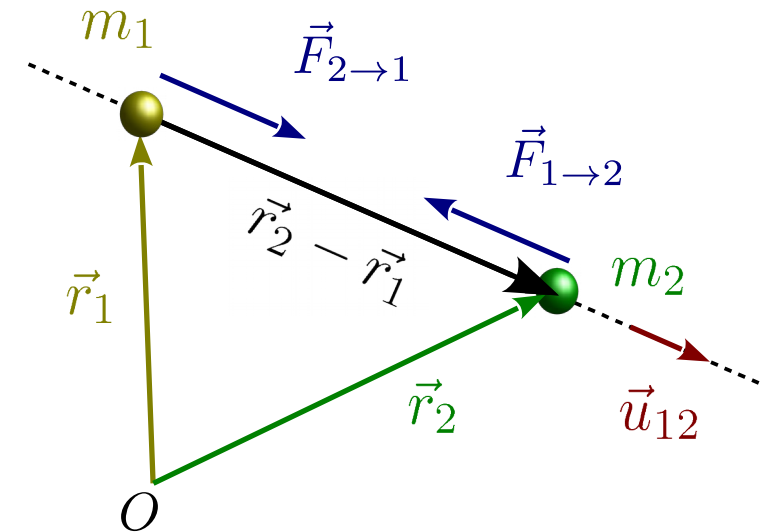
■ Propiedades

- Siempre atractiva
- Proporcional al producto de las masas
- Inversamente proporcional al cuadrado de la distancia
- Dirigida en la dirección que une las dos masas
- Constante de gravitación universal

$$G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$$

- Cumple la tercera ley

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$



$$\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

$$\vec{F}_m = -G m M \frac{\vec{r}_m}{|\vec{r}_m|^3} = m \vec{g}(\vec{r}_m)$$

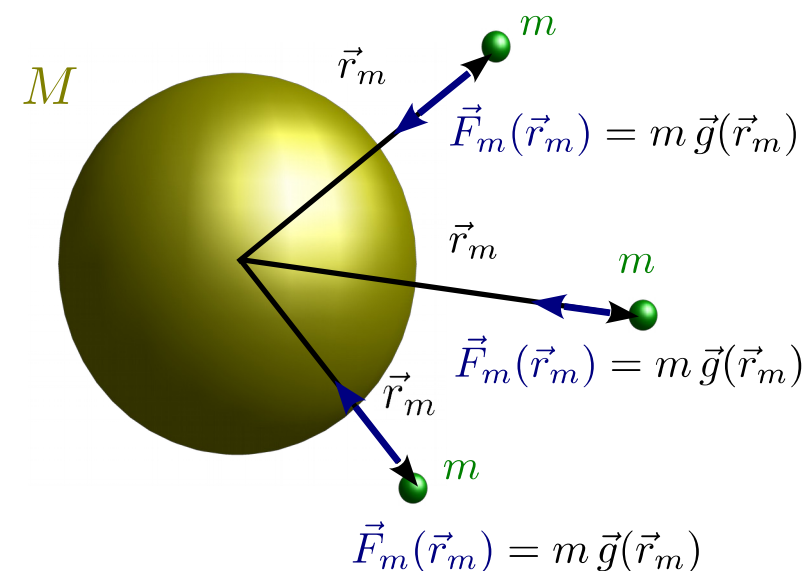
- A cada punto del espacio alrededor de la masa M se le asigna un vector $\mathbf{g}$ (aceleración de la gravedad)

$$\vec{g}(\vec{r}_m) = -G M \frac{\vec{r}_m}{|\vec{r}_m|^3}$$

- La fuerza sobre una masa en un punto alrededor de la masa M es

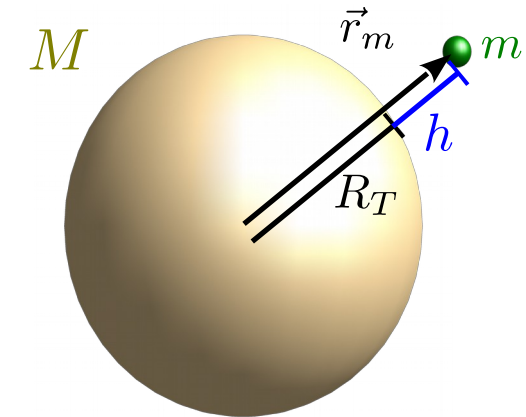
$$\vec{F}_m = m \vec{g}(\vec{r}_m)$$

- Se dice que la masa M crea un **campo de fuerzas** en el espacio



- En los puntos cerca de la superficie la aceleración de la gravedad es uniforme

$$|\vec{g}(\vec{r}_m)| = G M \frac{1}{|\vec{r}_m|^2} = \frac{G M}{R_T^2} \left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^{-2} \quad \frac{h}{R_T} \ll 1$$



$$|\vec{r}_m| = R_T + h = R_T \left(1 + \frac{h}{R_T}\right)$$

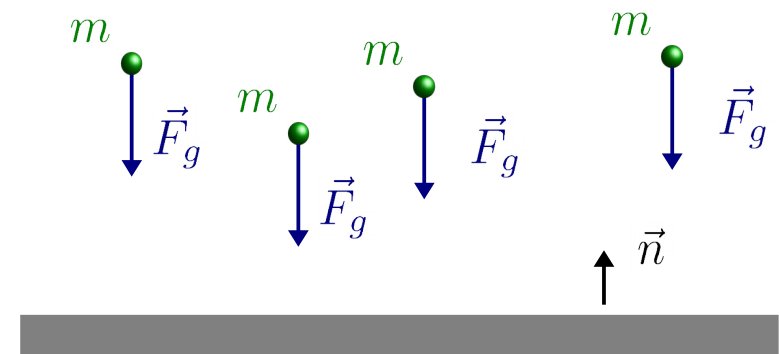
- Usando Taylor $(1 + \varepsilon)^n \simeq 1 + n \varepsilon$ si $\varepsilon \ll 1$

$$|\vec{g}(\vec{r}_m)| \simeq \frac{G M}{R_T^2} \left(1 - \frac{2h}{R_T}\right) \simeq \frac{G M}{R_T^2}$$

- Cerca de la superficie la dirección también es uniforme

$$\vec{F}_g = m \vec{g} = -mg \vec{n}$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$



- Útil para simplificar la expresión de una función complicada en el entorno de un punto

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) x + \frac{1}{2!} f''(0) x^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(0) x^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n + \dots$$

- Si x es pequeño, se pueden despreciar términos superiores

Orden 0: una constante

$$f(x) \simeq f(0)$$

Orden 1: una recta

$$f(x) \simeq f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) x$$

$$\simeq A + B x$$

Orden 2: una parábola

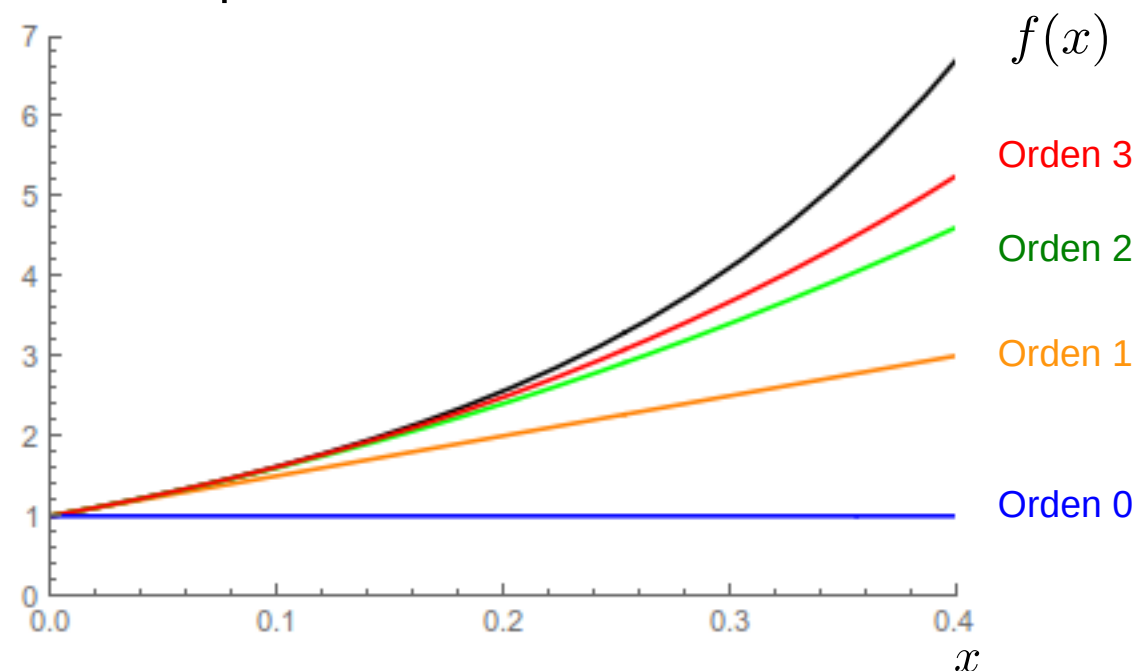
$$f(x) \simeq f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) x + \frac{1}{2!} f''(0) x^2$$

$$\simeq A + B x + C x^2$$

Orden 3: un polinomio cúbico

$$f(x) \simeq f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) x + \frac{1}{2!} f''(0) x^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(0) x^3$$

$$\simeq A + B x + C x^2 + D x^3$$



■ Ley de Hooke:

$$\vec{F}_k = -k (l - l_0) \vec{u}_{OP}$$

■ k es la constante elástica (N/m)

■ l_0 es la longitud natural

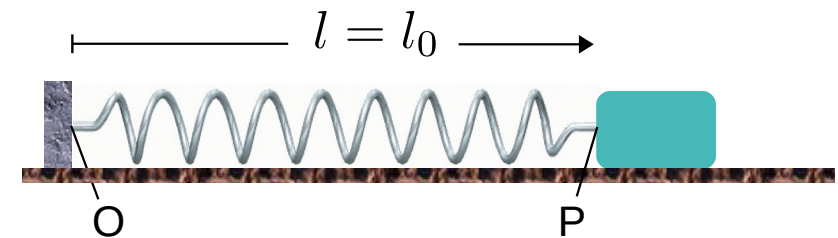
■ l es la elongación

■ Si la longitud natural es cero

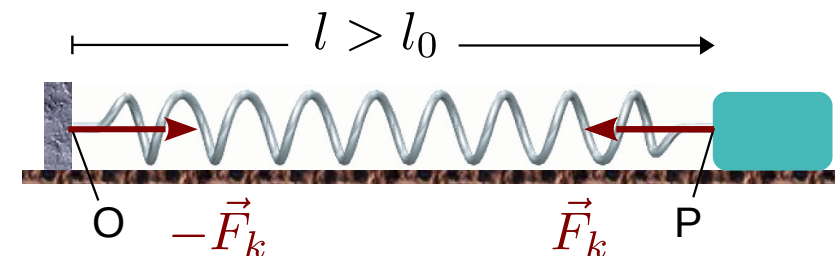
$$\vec{F}_k = -k l \vec{u}_{OP} = -k \overrightarrow{OP}$$

■ Un muelle calibrado permite medir la intensidad de una fuerza
(Dinamómetro)

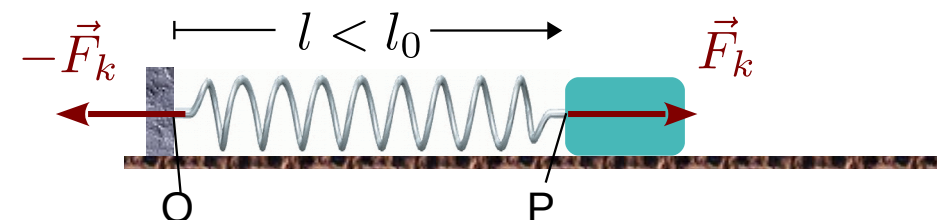
Relajado



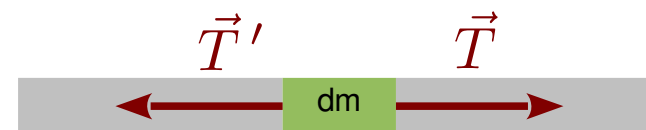
Estirado



Contraído



- Cuando un cuerpo empuja a otro, la interacción se modela con **fuerzas de contacto**
 - Estas fuerzas son de origen electromagnético
 - Pueden ser activas o de reacción vincular
 - Activas: mano empujando una caja
 - Reacción vincular: fuerza normal de una mesa sobre una caja
 - Si los cuerpos son sólidos rígidos no se deforman
- Una **cuerda** puede usarse para tirar de un objeto, pero no para empujarlo
 - Puede ser fuerza activa o de reacción vincular
 - La **tensión** de una cuerda es el módulo de la fuerza que un trozo de cuerda ejerce sobre otro
 - Si la masa de la cuerda es despreciable
 - la tensión es la misma en todos los puntos de la cuerda



$$dm \vec{a} = \vec{T} + \vec{T}'$$

$$dm = 0 \implies \vec{T} = -\vec{T}' \implies |\vec{T}| = \text{cte}$$

- Punto sujeto a **vínculos**: limitaciones impuestas a su posición o movimiento

- **Bilaterales**: cumplen una ecuación de ligadura

- Partícula engarzada en aro

- **Unilaterales**: sólo actúan en un sentido

- Partícula sobre una mesa sin adhesión, cuerdas

- **Geométrico**: no aparece explícitamente la velocidad

- Partícula engarzada en aro

- **Cinemático**: aparece explícitamente la velocidad

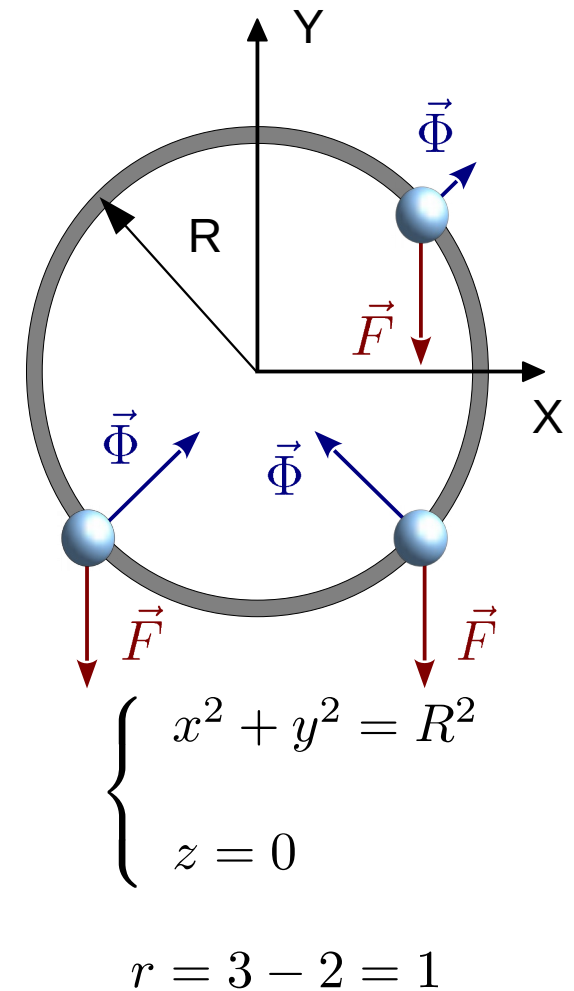
- Rodadura sin deslizamiento

- Grados de libertad $r = 3 - h$ (h es el número de vínculos)

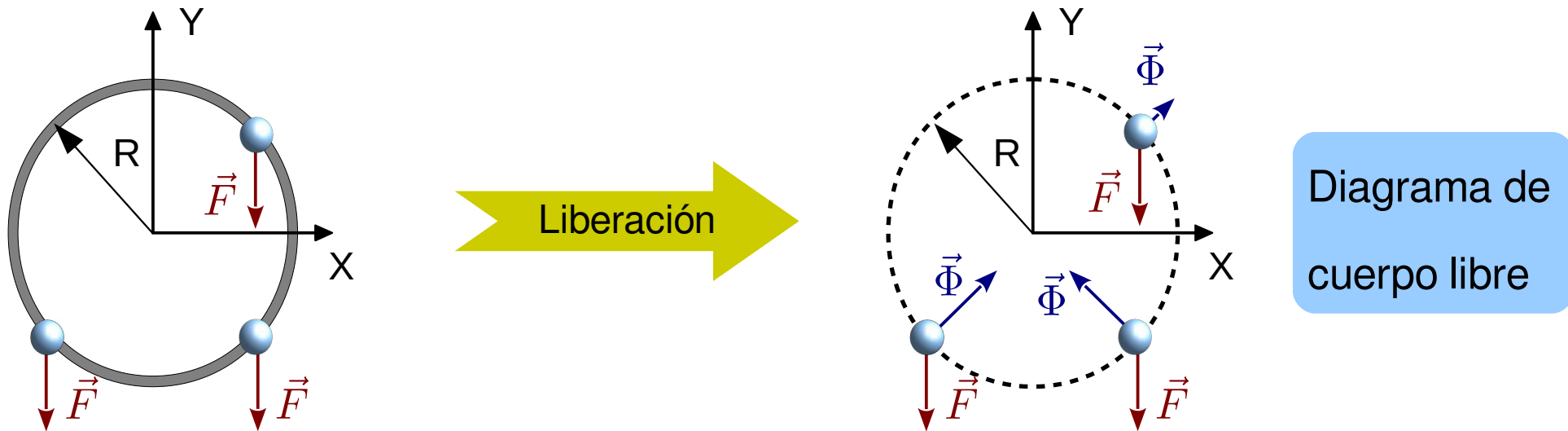
- Las **fuerzas de reacción vincular** (f.r.v.), Φ_i , hacen que el

vínculo se cumpla

- Se adaptan a las fuerzas activas: no son completamente conocidas a priori.



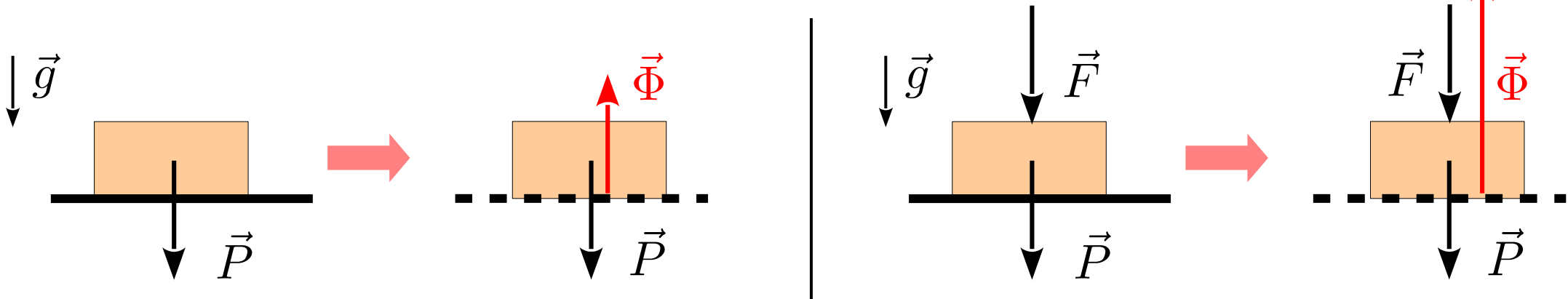
Todo punto material sometido a vínculos puede ser tratado como si estuviese libre de ellos si se sustituyen dichos vínculos por fuerzas de reacción vincular



- Las f.r.v. cumplen la misma función que los vínculos sustituidos: se oponen a cualquier estado de reposo o movimiento incompatible con ellos
- Son **perpendiculares** a los vínculos geométricos cuando el vínculo es liso
- Las f.r.v. son **incógnitas** del problema. Son desconocidas a priori
- Para construir el **diagrama de cuerpo libre** hay que identificar **todas** las fuerzas que actúan sobre el cuerpo: activas y de reacción vincular

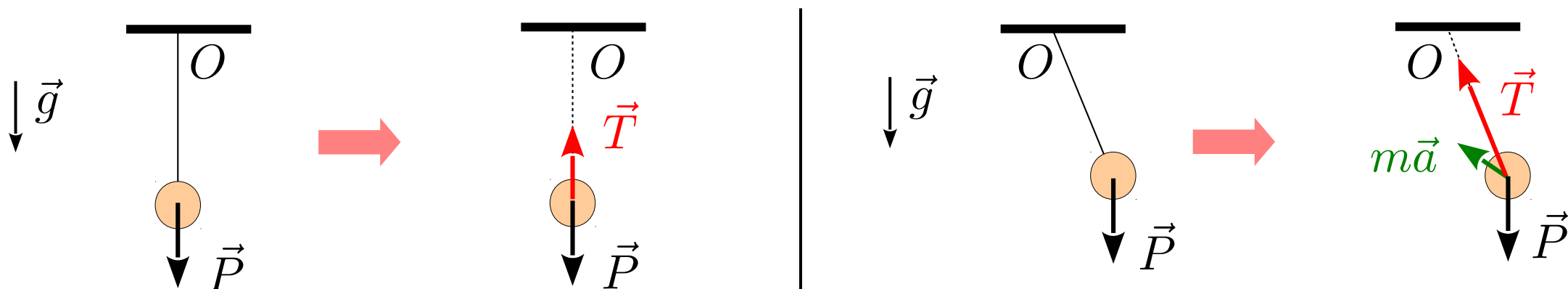
Fuerza normal

- El vínculo es que el bloque no atraviese la superficie horizontal



Tensión de una cuerda en un péndulo

- El vínculo es que la distancia entre la masa y el punto O no sea mayor que la longitud de la cuerda



- Introducción
- Leyes de Newton
- Fuerzas activas y de reacción vincular
- **Estática del punto**
- Fuerzas de rozamiento: Leyes de Coulomb
- Dinámica del punto material
- Coordenadas polares
- Rozamiento dependiente de la velocidad: velocidad terminal

- Equilibrio mecánico en un S.R.I. $\vec{v}(t) = 0 \quad \forall t \implies \vec{a}(t) = 0$
- La suma neta de fuerzas sobre la partícula debe ser nula

$$\vec{F}_{neta} = \vec{0}$$

- Punto libre: sólo hay fuerzas aplicadas

$$\vec{F}_{neta} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}$$

- Punto vinculado: hay que desvincular la partícula aplicando el Principio de Liberación

$$\vec{F}_{neta} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \vec{\Phi}_j = \vec{0}$$

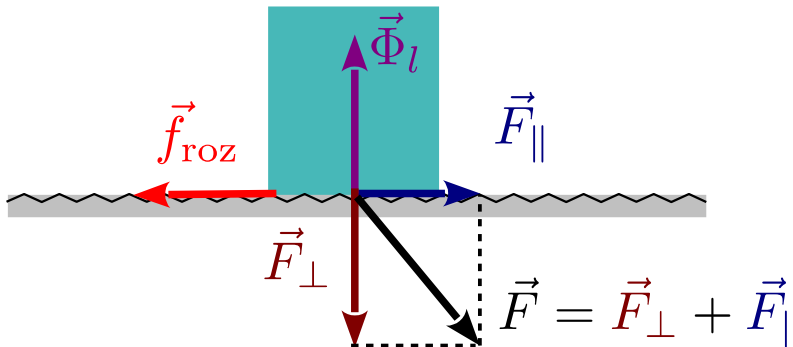
- Vínculo liso: sabemos que la fuerza vincular es normal al vínculo, pero su magnitud es una incógnita
- Vínculo rugoso: además de la fuerza vincular normal al vínculo, hay que añadir una fuerza de rozamiento tangente al vínculo

- Introducción
- Leyes de Newton
- Fuerzas activas y de reacción vincular
- Estática del punto
- **Fuerzas de rozamiento: Leyes de Coulomb**
- Dinámica del punto material
- Coordenadas polares
- Rozamiento dependiente de la velocidad: velocidad terminal

- Fuerza activa
- Fuerza de contacto del suelo

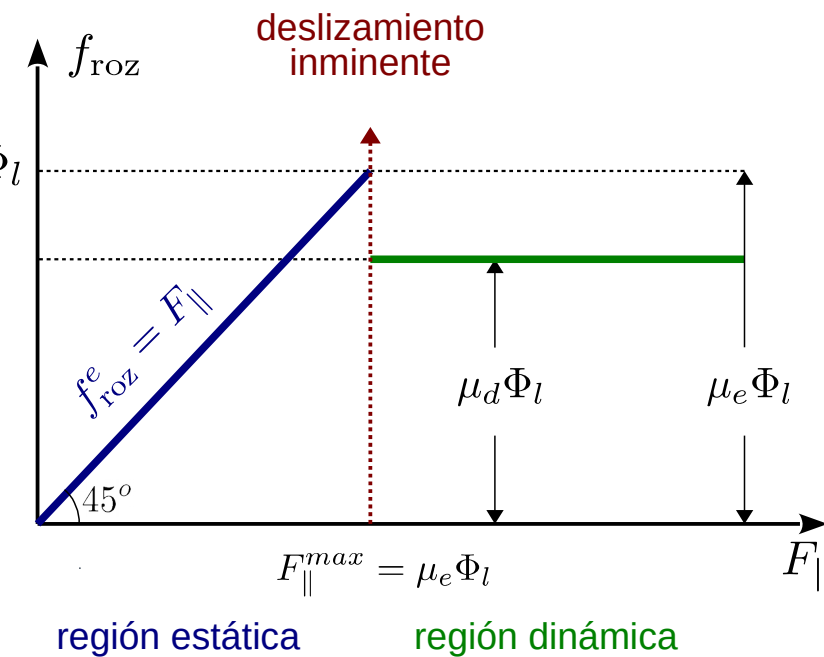
$$\vec{F} = \vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{\parallel}$$

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_l + \vec{f}_{\text{roz}}$$



$$f_{\text{roz}}^{\text{max}} = \mu_e \Phi_l$$

$$f_{\text{roz}}^d = \mu_d \Phi_l$$



$$\vec{f}_{\text{roz}} = \begin{cases} -\vec{F}_{\parallel} & \text{si } 0 \leq F_{\parallel} \leq F_{\parallel}^{\text{max}} = \mu_e \Phi_l \text{ y } \vec{v}_{21}^{\text{des}} = \vec{0} \\ -\mu_d \Phi_l \frac{\vec{v}_{21}^{\text{des}}}{|\vec{v}_{21}^{\text{des}}|} & \text{si } \vec{v}_{21}^{\text{des}} \neq \vec{0} \end{cases}$$

- Región estática

No se produce deslizamiento
(vínculo prohibitivo)

- Región dinámica

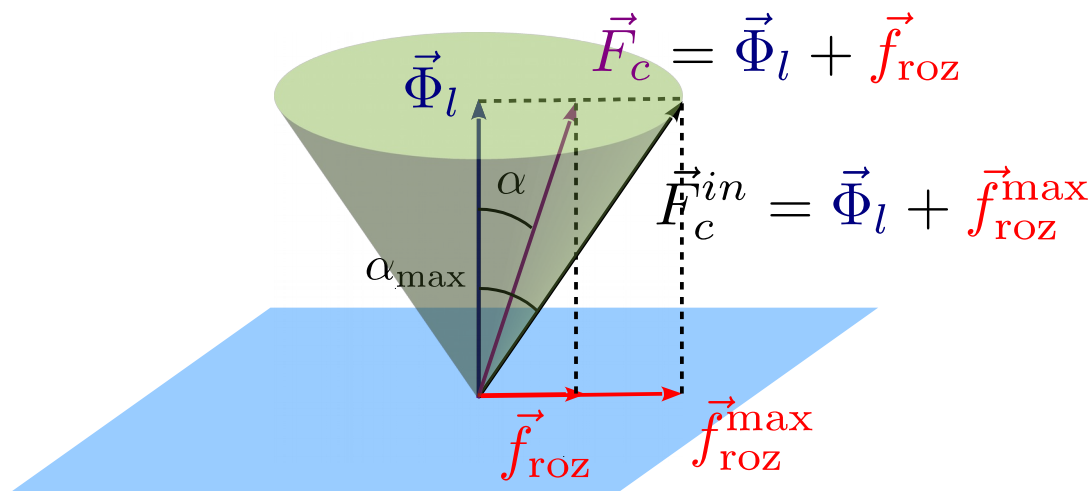
Se produce deslizamiento (vínculo resistivo)
Disipación de energía y deterioro de las superficies

■ Situación estática

- El módulo de la fuerza de rozamiento estático es una **incógnita** del problema
- El módulo **máximo** de la fuerza de rozamiento estático es **proporcional** a la fuerza **normal**
- El módulo **máximo** de la fuerza de rozamiento **no depende del área** de la superficie de contacto

$$|\vec{f}_{roz}| \leq |\vec{f}_{roz}^{max}| = \mu_e |\vec{\Phi}_l|$$

- μ_e es el coeficiente de rozamiento estático, depende de la naturaleza de las superficies de contacto
- El sentido de la fuerza de rozamiento se opone a la tendencia del movimiento relativo entre las superficies
- Cuando consideramos una superficie, la fuerza de contacto total de la superficie sobre la partícula tiene que estar dentro del **cono de rozamiento**



$$\tan \alpha_{\max} = \frac{|\vec{f}_{roz}^{max}|}{|\vec{\Phi}_l|} = \mu_e$$

$$\tan \alpha = \frac{|\vec{f}_{roz}|}{|\vec{\Phi}_l|} \leq \tan \alpha_{\max} = \mu_e$$

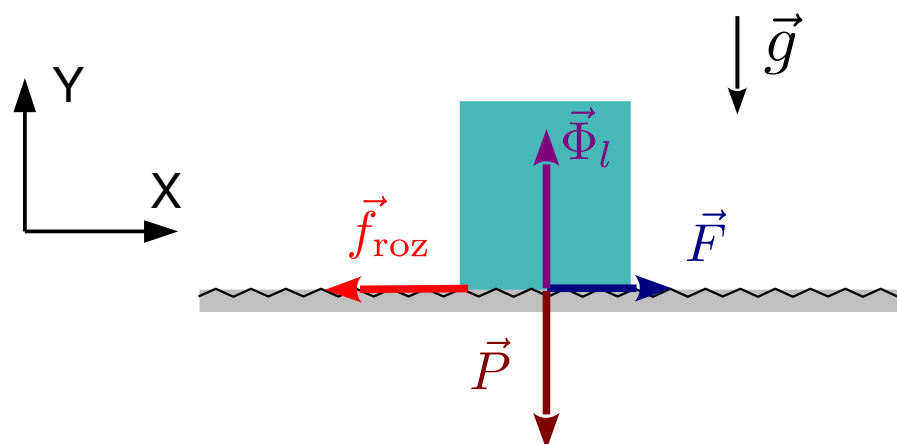
$$|\vec{f}_{roz}| \leq \mu_e |\vec{\Phi}_l|$$

■ Situación dinámica

- El módulo de la fuerza de rozamiento dinámico es conocido y proporcional a la fuerza normal

$$|\vec{F}_R| = \mu_d |\vec{\Phi}_l|$$

- μ_d es el coeficiente de rozamiento dinámico; depende de la naturaleza de las superficies de contacto; no depende de la velocidad (en el modelo de Coulomb)
- $\mu_e > \mu_d$
- La fuerza de rozamiento es paralela y de sentido opuesto a la velocidad relativa entre las superficies



Equilibrio: $\vec{F} + \vec{P} + \vec{\Phi}_l + \vec{f}_{roz} = \vec{0}$

Fuerzas

$$\vec{P} = -P \vec{j}$$

$$\vec{\Phi}_l = N \vec{j}$$

$$\vec{F} = F \vec{i}$$

$$\vec{f}_{roz} = f \vec{i}$$

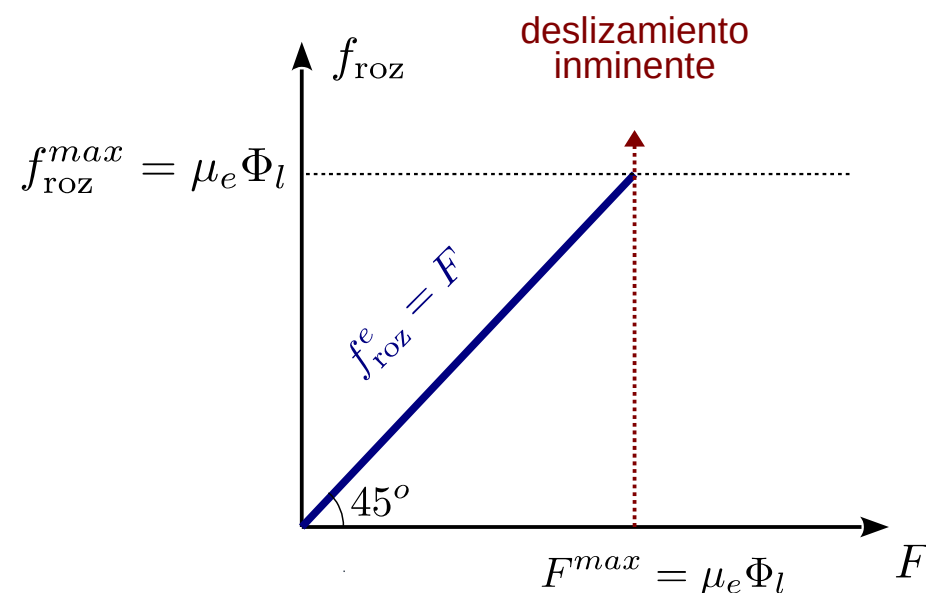
Incógnitas: $\{N, f\}$

$$(X) : f = -F$$

$$(Y) : N = P$$

$$\vec{f}_{roz} = -F \vec{i}$$

$$\vec{\Phi}_l = P \vec{j}$$



Condición de no deslizamiento

$$|\vec{f}_{roz}| \leq \mu_e |\vec{\Phi}_l| \quad \longrightarrow \quad |F| \leq \mu_e P$$

La fuerza de rozamiento sólo es $\mu_e N$ en condiciones de deslizamiento inminente

μ_e puede ser infinitamente grande (cremallera)

- Introducción
- Leyes de Newton
- Fuerzas activas y de reacción vincular
- Estática del punto
- Fuerzas de rozamiento: Leyes de Coulomb
- **Dinámica del punto material**
- Coordenadas polares
- Rozamiento dependiente de la velocidad: velocidad terminal

- Conocidas las fuerzas, la **Segunda Ley** proporciona la **ecuación diferencial** del movimiento en un sistema de referencia inercial

- Elementos para resolver un problema de dinámica del punto

- Ecuación diferencial

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m} \left[\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{j=1}^s \vec{\Phi}_j \right]$$

- Ligaduras

$$f_j(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \qquad j = 1, \dots, s$$

- Condiciones iniciales

$$\vec{r}(0) \qquad \dot{\vec{r}}(0)$$

- A la inversa, conocida la aceleración y los vínculos, podemos determinar las fuerzas

- Introducción
- Leyes de Newton
- Fuerzas activas y de reacción vincular
- Estática del punto
- Fuerzas de rozamiento: Leyes de Coulomb
- Dinámica del punto material
- **Coordenadas polares**
- Rozamiento dependiente de la velocidad: velocidad terminal

- Movimiento en un plano
- Relación con las cartesianas

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = y/x$$

$$r \in [0, \infty)$$

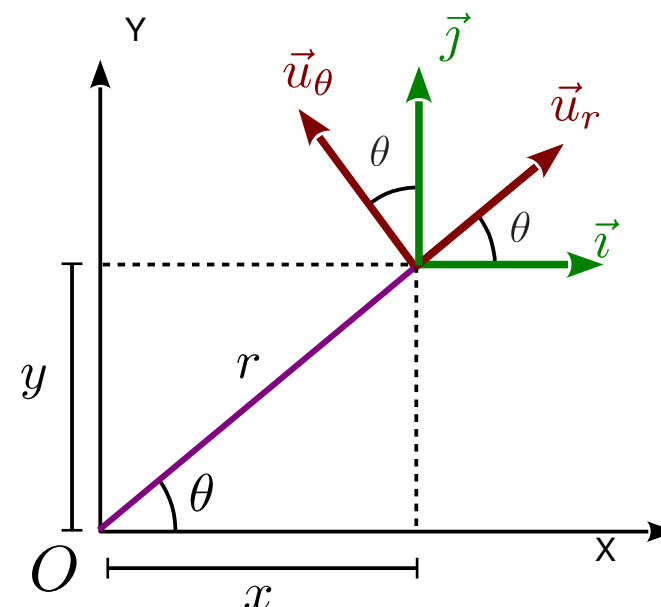
$$\theta \in [0, 2\pi)$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$y \in (-\infty, +\infty)$$



- Base vectorial

$$\vec{u}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{i} = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

$$\vec{j} = \sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta$$

■ $\vec{u}_r$ señala la dirección del desplazamiento cuando r varía y θ es constante

■ $\vec{u}_\theta$ señala la dirección del desplazamiento cuando θ varía y r es constante

- Derivadas de los vectores: los vectores de la base polar dependen de θ

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{u}_r$$

- Relación con las cartesianas

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = y/x$$

$$r \in [0, \infty)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$y \in (-\infty, +\infty)$$

- Vector de posición

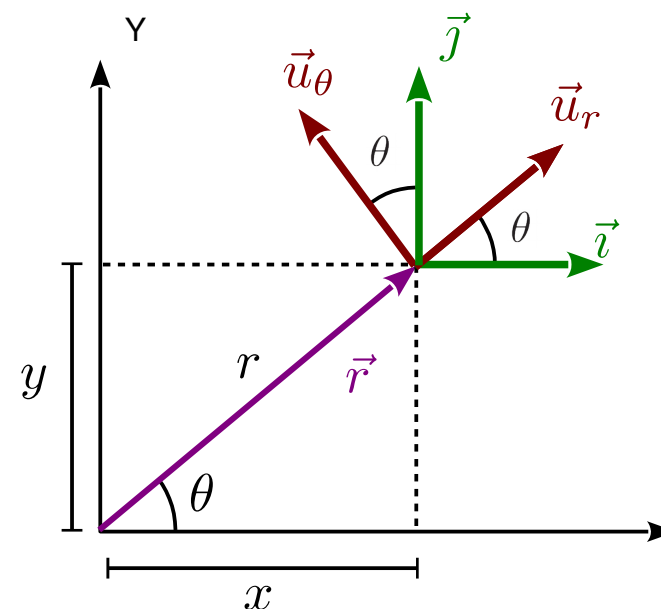
$$\vec{r} = r \vec{u}_r$$

- Vector velocidad

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\vec{u}}_r = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

- Vector aceleración

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$$



- Añadimos la dirección perpendicular al plano

- Posicionamiento del punto $P(r, \theta, z)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = y/x$$

$$z = z$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

$$r \in [0, \infty)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

$$z \in (-\infty, +\infty)$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$y \in (-\infty, +\infty)$$

$$z \in (-\infty, +\infty)$$

- Vector de posición

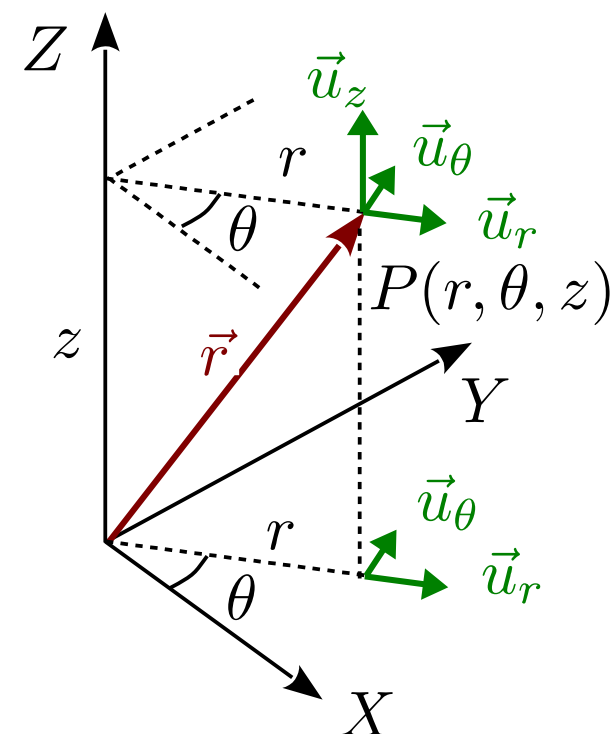
$$\vec{r} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$$

- Vector velocidad

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$$

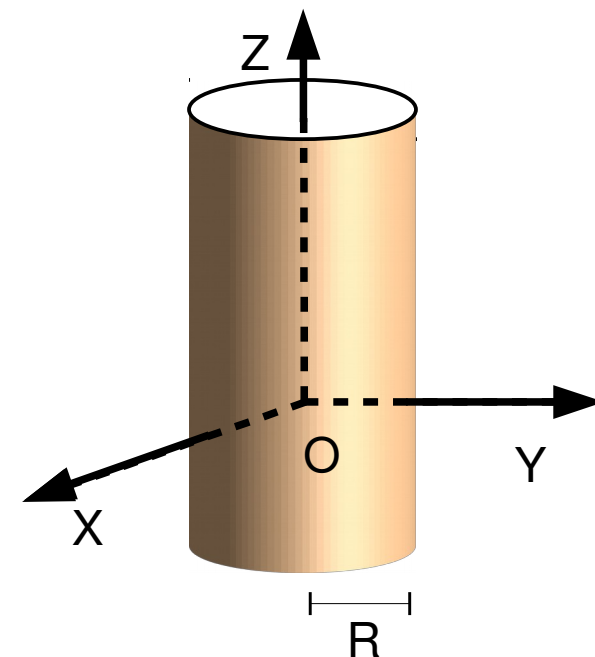
- Vector aceleración

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_k$$



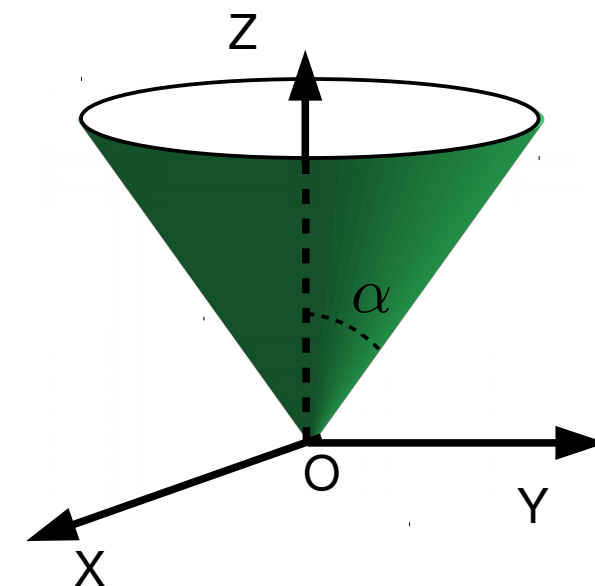
- Ejemplos de uso
- Superficie cilíndrica

$$r = R$$



- Superficie cónica

$$r = z \tan \alpha$$



- Identificar las fuerzas que actúan sobre el sistema
 - Dibujar el diagrama de cuerpo libre, con la dirección y sentido correcto de las fuerzas
 - A veces el sentido de una fuerza no es conocido a priori (muelles con elongación no nula, fuerzas vinculares y de rozamiento...)
 - Cada vínculo liso implica una fuerza vincular perpendicular al vínculo
 - Cada vínculo rugoso implica una fuerza vincular perpendicular al vínculo y otra tangente (rozamiento)
- Elegir un sistema de ejes y coordenadas
- Expresar las fuerzas en las coordenadas elegidas
 - Fuerzas activas: su valor en función de la posición y/o velocidad de la partícula
 - Fuerzas vinculares: su magnitud es una incógnita, su dirección es conocida
- Expresar las magnitudes cinemáticas (velocidad, aceleración)
- Aplicar la ecuación correspondiente
 - Estática: $\vec{F}_{neta} = \vec{0}$
 - Dinámica: $\vec{F}_{neta} = m\vec{a}$

- Introducción
- Leyes de Newton
- Fuerzas activas y de reacción vincular
- Estática del punto
- Fuerzas de rozamiento: Leyes de Coulomb
- Dinámica del punto material
- Coordenadas polares
- Rozamiento dependiente de la velocidad: velocidad terminal

- Cuando un cuerpo se mueve en el seno de un fluido, aparece una **fuerza de rozamiento** que depende de la velocidad

$$F_R = -b |\vec{v}|^n$$

- Si la velocidad respecto al fluido es pequeña, $n=1$

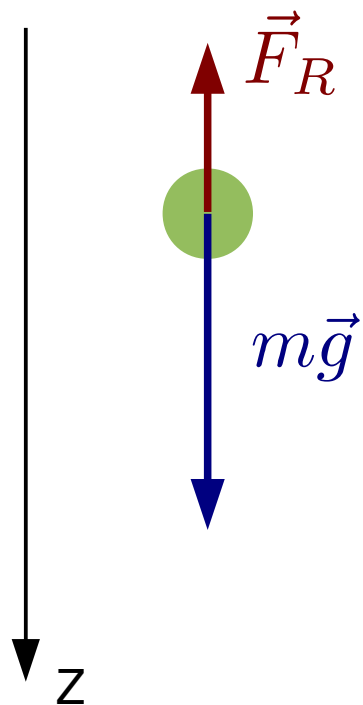
$$\vec{F}_R = -b\vec{v}$$

- El coeficiente b depende del **fluido** y de la **forma** del cuerpo
- Si esta fuerza de rozamiento actúa el tiempo suficiente, la velocidad del cuerpo se hace constante. El valor límite se llama **velocidad terminal**

- Supongamos una esfera que cae cerca de la superficie de la Tierra partiendo del reposo

$$\vec{a} = a \vec{k} \qquad \vec{v} = v \vec{k}$$

$$\left. \begin{array}{l} m\vec{g} = m g \vec{k} \\ \vec{F}_R = -b v \vec{k} \end{array} \right| \quad m a = m g - b v$$



- En $t=0$, no hay fuerza viscosa: $a(0) = g$
- Al aumentar la velocidad, el término viscoso aumenta, mientras que el gravitatorio permanece constante
- Cuando los dos términos se igualan, la velocidad es constante

$$v_T = \frac{mg}{b}$$

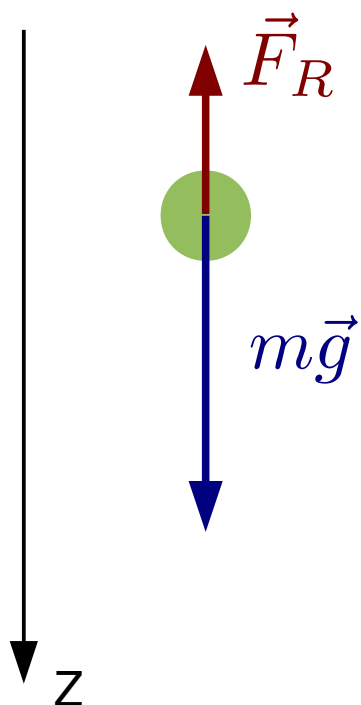
Velocidad
terminal

- Podemos resolver la ecuación diferencial (suponemos $v(0)=0$)

$$a = g - \frac{b}{m} v \quad \longrightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m} v \quad \longrightarrow$$

$$dv = \left(g - \frac{b}{m} v \right) dt \quad \longrightarrow \quad \int_0^{v(t)} \frac{dv}{g - \frac{b}{m} v} = \int_0^t dt$$

$$v(t) = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m} t} \right) = v_T \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$



$$v_T = \frac{mg}{b}$$

$$\tau = \frac{m}{b}$$

