



Tema 9: Movimiento plano

Física I, 1º, Grado en Ingeniería Energética, Robótica y
Mecatrónica

Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

- Definición y propiedades
- Centro instantáneo de rotación
 - Definición
 - Determinación gráfica y analítica
- Teorema de los tres centros
- Campo de aceleraciones
- Base y ruleta

Definición

Los movimientos de todos los puntos son paralelos a un plano dado, llamado plano director

Condición matemática $d\vec{r}_{21}^P(t) \cdot \vec{u}_\pi = 0$

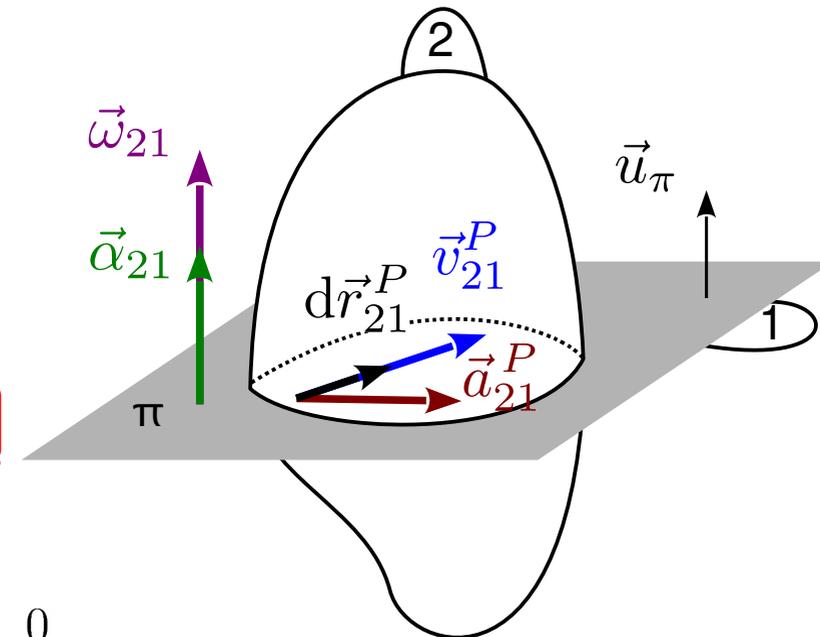
Propiedades

Las velocidades y aceleraciones son paralelas al plano director

$$d\vec{r}_{21}^P \cdot \vec{u}_\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad dt \vec{v}_{21}^P(t) \cdot \vec{u}_\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_{21}^P(t) \cdot \vec{u}_\pi = 0}$$

Diferenciando respecto al sólido "1"

$$d(\vec{v}_{21}^P(t) \cdot \vec{u}_\pi)_1 = 0 = d\vec{v}_{21}^P(t) \cdot \vec{u}_\pi + \vec{v}_{21}^P(t) \cdot d\vec{u}_\pi = dt \vec{a}_{21}^P(t) \cdot \vec{u}_\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{21}^P(t) \cdot \vec{u}_\pi = 0}$$



Propiedades

Los vectores velocidad angular y aceleración son perpendiculares al plano director

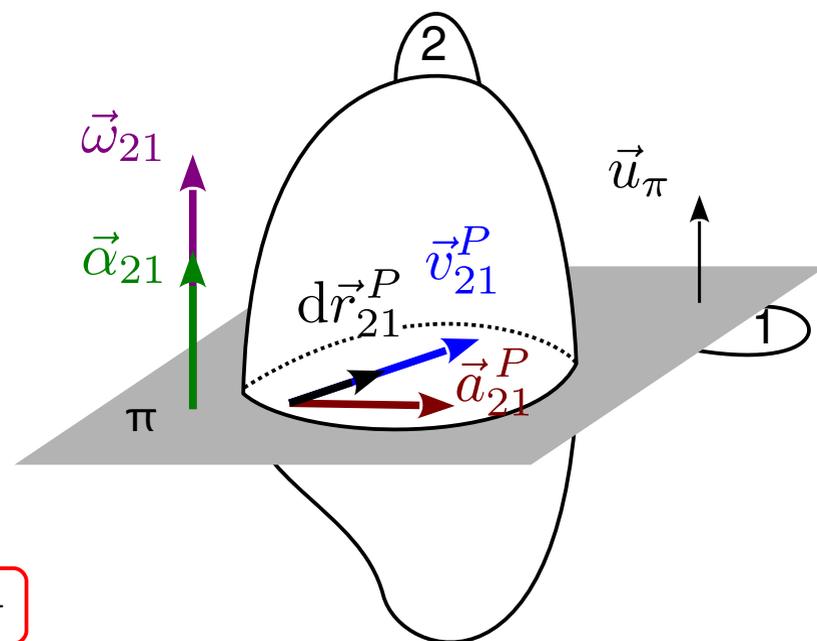
$$\vec{u}_\pi \cdot [\vec{v}_{21}^P - \vec{v}_{21}^Q] = 0 = \vec{u}_\pi \cdot [\vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{QP}(t)]$$

$$\overrightarrow{QP}(t) \cdot [\vec{u}_\pi \times \vec{\omega}_{21}] = 0 \quad \forall \overrightarrow{QP}(t)$$

$$\vec{u}_\pi \times \vec{\omega}_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\omega}_{21} = \omega_{21}(t) \vec{u}_\pi}$$

Diferenciando respecto al sólido "1"

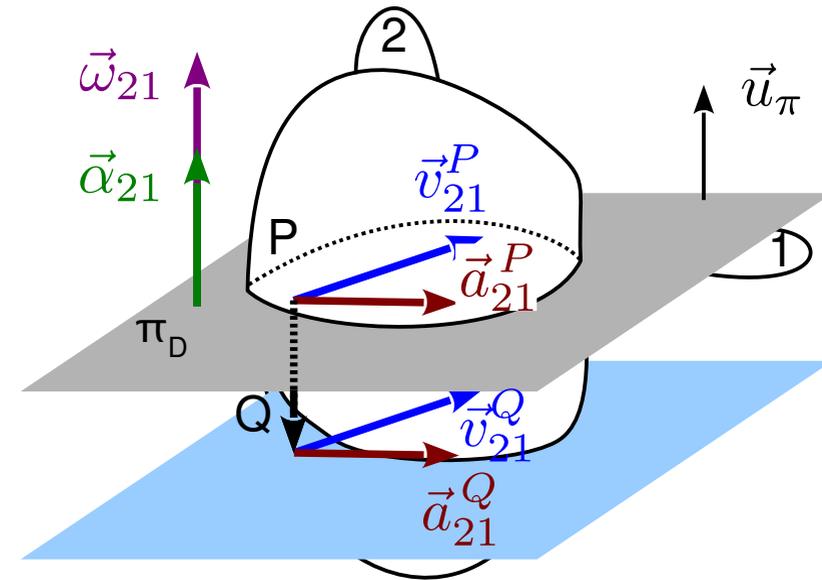
$$\vec{\alpha}_{21} = \left. \frac{d\vec{\omega}_{21}}{dt} \right|_1 = \frac{d\omega_{21}}{dt} \vec{u}_\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\alpha}_{21} = \alpha_{21}(t) \vec{u}_\pi}$$



Propiedades

Las distribuciones de velocidad y aceleración son iguales en planos paralelos al director

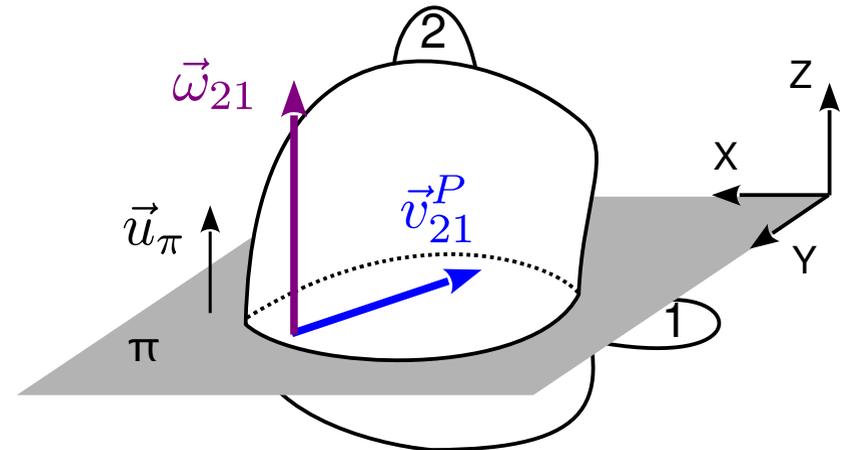
$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} \parallel \vec{u}_\pi \\ \overrightarrow{PQ} \parallel \vec{\omega}_{21} \\ \overrightarrow{PQ} \parallel \vec{\alpha}_{21} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{v}_{21}^P(t) = \vec{v}_{21}^Q(t) \\ \vec{a}_{21}^P(t) = \vec{a}_{21}^Q(t) \end{array}$$



El movimiento tiene tres grados de libertad y en el caso más general es una rotación instantánea

$$\vec{\omega}_{21} = \omega_{21} \vec{u}_\pi \quad \vec{v}_{21}^P = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

$$\vec{v}^{\text{mín}} = \vec{v}_{21}^P \cdot \vec{\omega}_{21} = \vec{0}$$



- Definición y propiedades
- Centro instantáneo de rotación
 - Definición
 - Determinación gráfica y analítica
- Teorema de los tres centros
- Campo de aceleraciones
- Base y ruleta

Definición

Es la intersección del eje instantáneo de rotación y el plano director

$$I_{21} \equiv \Delta_{\text{EIR}\{21\}} \cap \pi_D$$

Propiedades

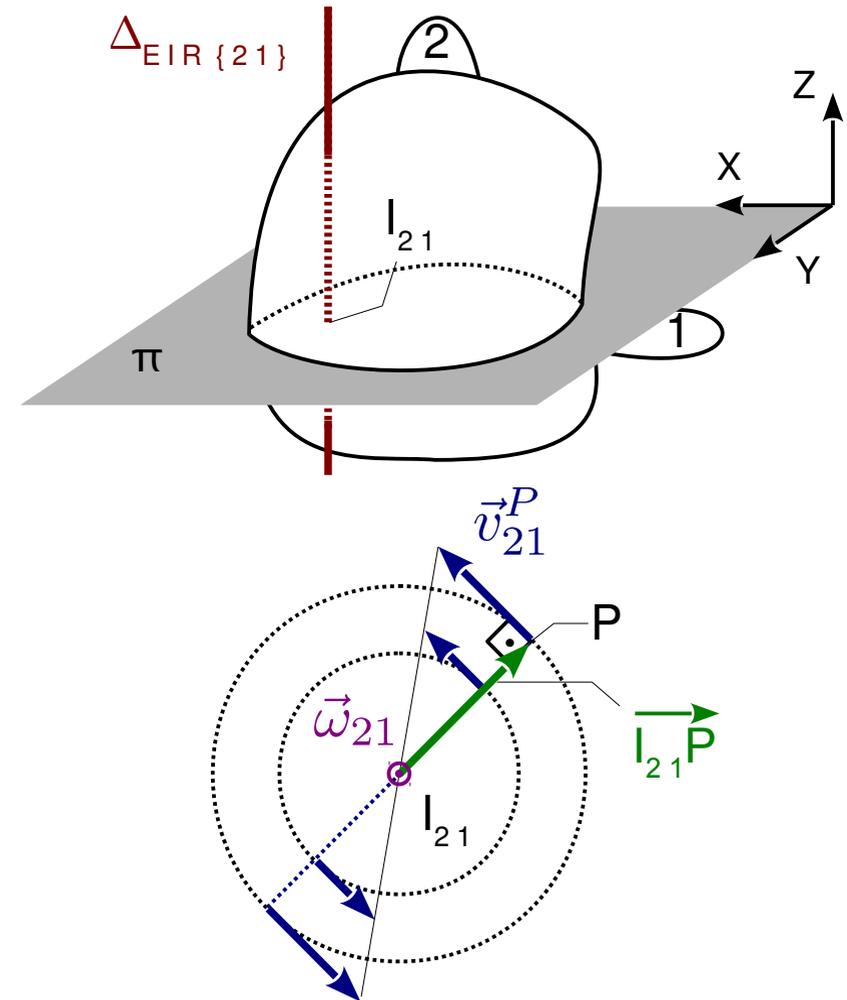
Es el único punto del sólido "2" con velocidad instantánea nula

$$\vec{v}_{21}^{I_{21}} = \vec{0}$$

El campo de velocidades tiene simetría rotacional alrededor de I_{21}

$$\vec{v}_{21}^P = \vec{v}_{21}^{I_{21}} + \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{I_{21}P}$$

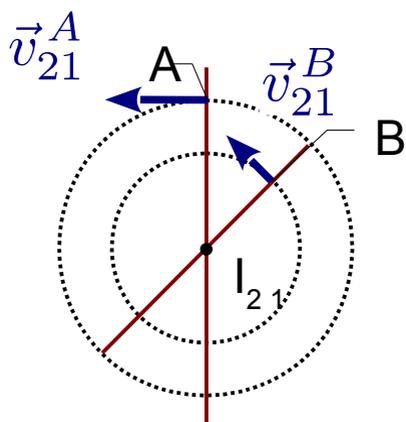
$$\vec{v}_{21}^P \perp \overrightarrow{I_{21}P} \quad |\vec{v}_{21}^P| = |\vec{\omega}_{21}| |\overrightarrow{I_{21}P}|$$



Caso 1

$\vec{v}_{21}^A, \vec{v}_{21}^B$ no paralelas

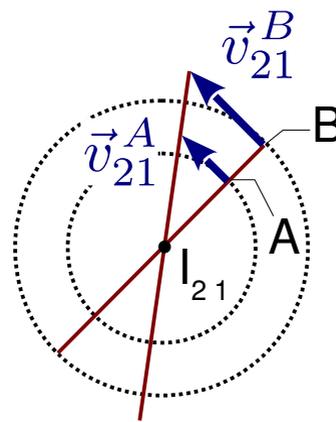
I_{21} es la intersección de las rectas trazadas por cada punto perpendicularmente a las velocidades respectivas



Caso 2

$\vec{v}_{21}^A, \vec{v}_{21}^B$ paralelas

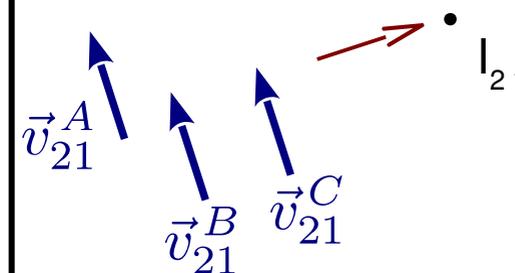
I_{21} es la intersección de la perpendicular común y la recta que une los extremos de los vectores velocidad



Traslación paralela

\vec{v}_{21} es la misma en todos los puntos

I_{21} se considera en el infinito, en dirección perpendicular a la velocidad de traslación

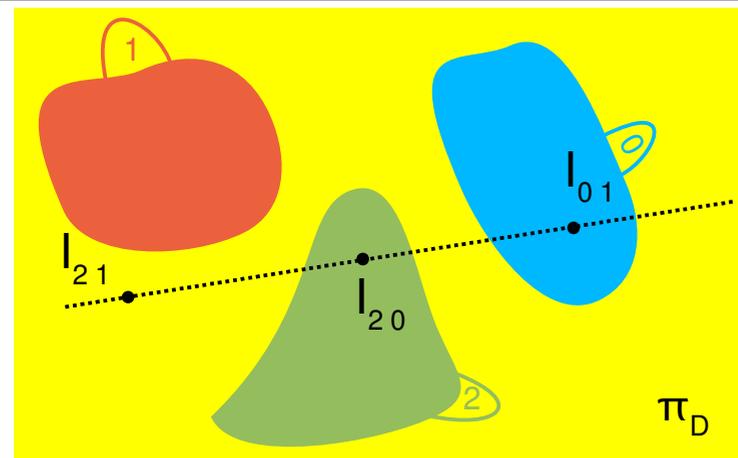


Determinación a partir de la reducción

$$\vec{OI}_{21} = \frac{\vec{\omega}_{21} \times \vec{v}_{21}^O}{|\vec{\omega}_{21}|^2}$$

- Definición y propiedades
- Centro instantáneo de rotación
 - Definición
 - Determinación gráfica y analítica
- Teorema de los tres centros
- Campo de aceleraciones
- Base y ruleta

Si tres sólidos rígidos realizan movimientos relativos planos y paralelos entre sí, y se elige un plano director común, entonces los tres centros instantáneos de rotación están alineados

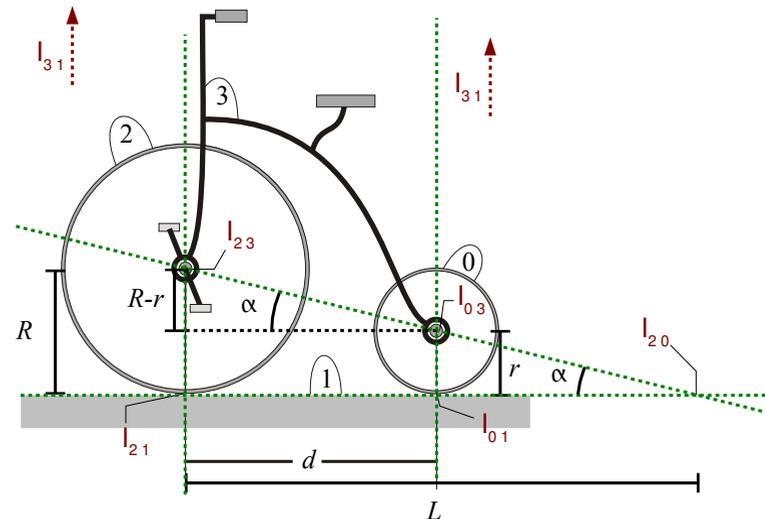


Aplicación

I_{20} se encuentra como intersección de $I_{23}I_{03}$ y $I_{21}I_{01}$

I_{31} se sitúa en el infinito

$$L = \frac{R}{\tan \alpha} = \frac{Rd}{R-r}$$



Teorema de los tres centros: demostración

Punto A arbitrario

$$\vec{v}_{21}^A = \vec{v}_{20}^A + \vec{v}_{01}^A$$

Campos de velocidades

$$\vec{v}_{21}^0 + \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{I_{21}A} = \vec{v}_{20}^0 + \vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{I_{20}A} + \vec{v}_{01}^0 + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{I_{01}A}$$

Composición de velocidades angulares

$$(\vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01}) \times \overrightarrow{I_{21}A} = \vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{I_{20}A} + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{I_{01}A}$$

$$\vec{\omega}_{20} \times (\overrightarrow{I_{21}A} - \times \overrightarrow{I_{20}A}) = \vec{\omega}_{01} \times (\overrightarrow{I_{01}A} - \times \overrightarrow{I_{21}A}) \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{I_{21}I_{20}} = \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{I_{01}I_{21}}$$

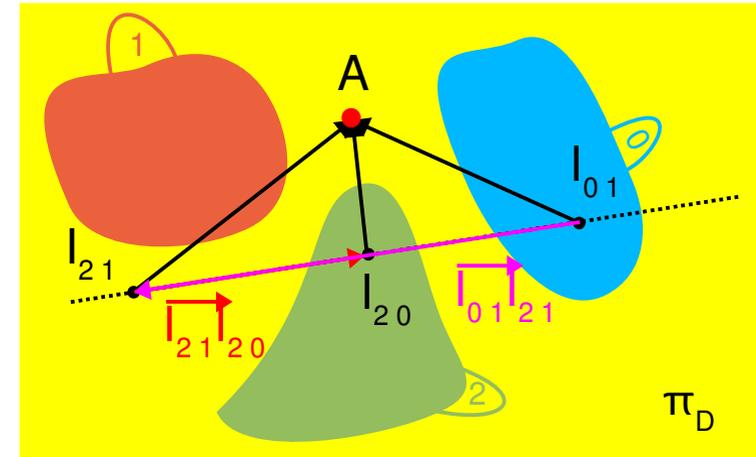
Multiplicando escalarmente por $\overrightarrow{I_{01}I_{21}}$

$$\overrightarrow{I_{01}I_{21}} \cdot (\vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{I_{21}I_{20}}) = \overrightarrow{I_{01}I_{21}} \cdot (\vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{I_{01}I_{21}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_{20} \cdot (\overrightarrow{I_{21}I_{20}} \times \overrightarrow{I_{01}I_{21}}) = 0$$

Como $\vec{\omega}_{20} \perp \pi_D$ y $\overrightarrow{I_{21}I_{20}} \times \overrightarrow{I_{01}I_{21}} \perp \pi_D$

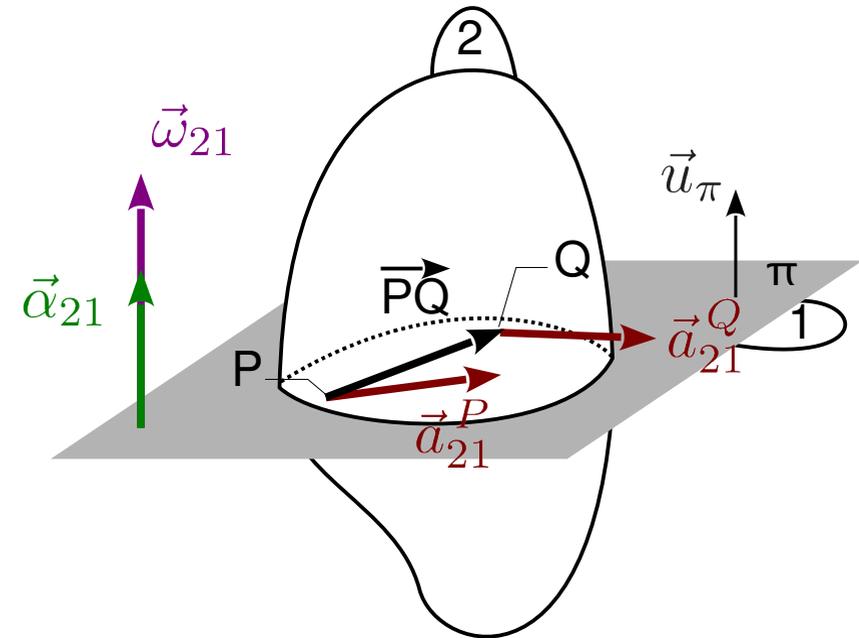
$$\overrightarrow{I_{21}I_{20}} \times \overrightarrow{I_{01}I_{21}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{I_{21}I_{20}} \parallel \overrightarrow{I_{01}I_{21}} \quad \Rightarrow$$

$\{I_0, I_1, I_2\}$ alineados



- Definición y propiedades
- Centro instantáneo de rotación
 - Definición
 - Determinación gráfica y analítica
- Teorema de los tres centros
- Campo de aceleraciones
- Base y ruleta

La ecuación del campo de velocidades se simplifica respecto al caso de movimiento tridimensional, pues ω_{21} y \mathbf{PQ} son perpendiculares

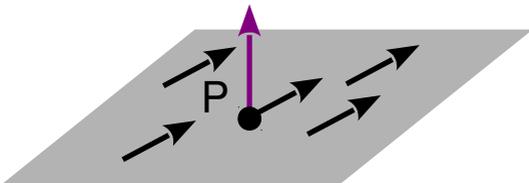


$$\vec{a}_{21}^Q = \vec{a}_{21}^P + \vec{\alpha}_{21} \times \overrightarrow{PQ} - |\vec{\omega}_{21}|^2 \overrightarrow{PQ}$$

El campo de aceleraciones recupera una cierta estructura

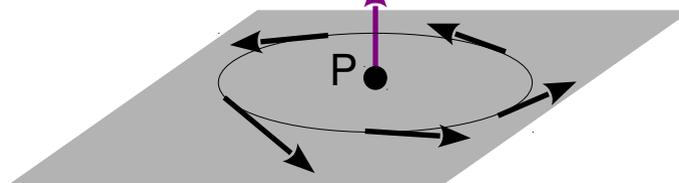
$$\vec{a}_{21}^P$$

$$\vec{\omega}_{21}$$



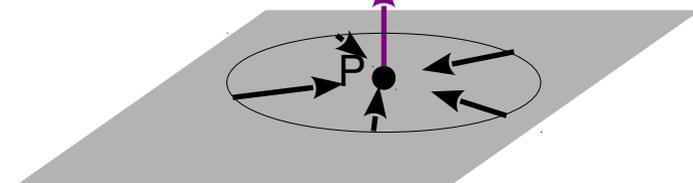
$$\vec{\alpha}_{21} \times \overrightarrow{PQ}$$

$$\vec{\omega}_{21}$$



$$-|\vec{\omega}_{21}|^2 \overrightarrow{PQ}$$

$$\vec{\omega}_{21}$$

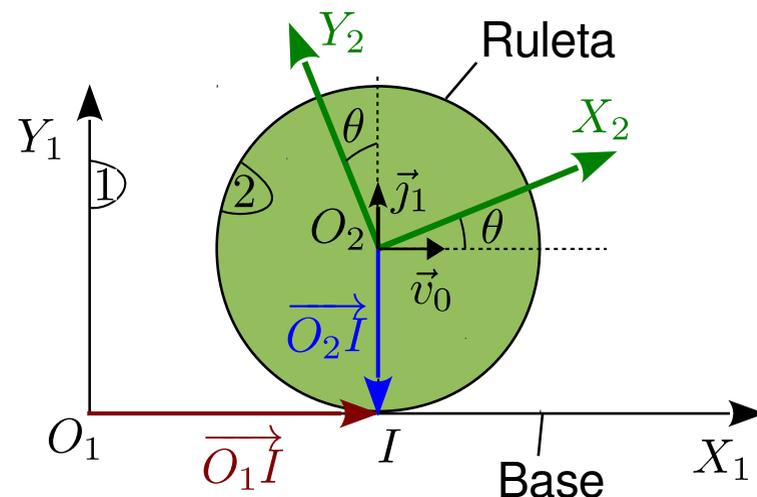


- Definición y propiedades
- Centro instantáneo de rotación
 - Definición
 - Determinación gráfica y analítica
- Teorema de los tres centros
- Campo de aceleraciones
- Base y ruleta

- La **base** de un movimiento plano es la curva que recorre el C.I.R. observado desde el sistema **fijo**
- La **ruleta** de un movimiento plano es la curva que recorre el C.I.R. observado desde el sistema **móvil**

Trayectoria en el sólido fijo: **base**

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{O_1\dot{I}} = v_0 t \vec{v}_1 + 0 \vec{j}_1 \\ \overrightarrow{O_1\dot{I}} = x_1^I \vec{v}_1 + y_1^I \vec{j}_1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x_1^I = v_0 t \\ y_1^I = 0 \end{array} \right\} \equiv O_1 X_1$$

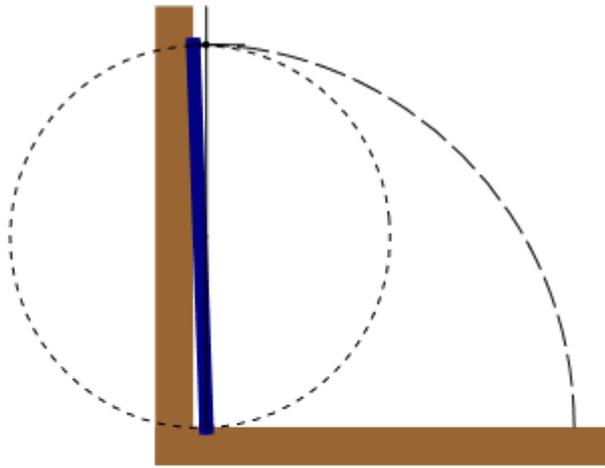


Trayectoria en el sólido móvil: **ruleta**

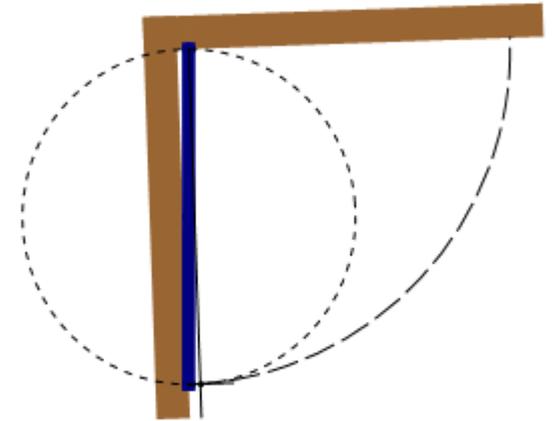
$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{O_2\dot{I}} = -R \vec{j}_1 = -R \operatorname{sen} \theta \vec{v}_2 - R \operatorname{cos} \theta \vec{j}_2 \\ \overrightarrow{O_2\dot{I}} = x_2^I \vec{v}_2 + y_2^I \vec{j}_2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x_2^I = -R \operatorname{sen} \theta \\ y_2^I = -R \operatorname{cos} \theta \end{array} \right\} \equiv (x_2^I)^2 + (y_2^I)^2 = R^2$$

- El movimiento puede describirse como una **rodadura sin deslizamiento** de la ruleta sobre la base (o al revés)

Ruleta sobre la base



Base sobre la ruleta



- Los movimientos con la misma base y ruleta son el mismo movimiento

Engranaje circular

