Tema 1: Introducción y fundamentos matemáticos

Antonio González Fernández
Departamento de Física Aplicada III
Universidad de Sevilla

Parte 3/4
Vectores en física I: Definiciones y propiedades

Las magnitudes se clasifican en diversos tipos: escalares, vectoriales,...

Las diferentes magnitudes se pueden clasificar según la información que las define

Magnitudes escalares:
- un número (con o sin signo)
- una unidad

Ejemplos: masa, temperatura, energía, presión, carga, tiempo

Magnitudes vectoriales:
- un número (sin signo): módulo
- una unidad
- una dirección
- un sentido

Ejemplos: velocidad, fuerza, campo eléctrico, campo gravitatorio, aceleración

El principio de homogeneidad también se aplica al carácter de la magnitud

En toda igualdad o suma las magnitudes deben ser del mismo tipo

Escalar + Escalar = Escalar

Vector + Vector = Vector

Vector + Escalar

Vector = Escalar

NUNCA

$\vec{F} = ma$

Para distinguirlos, los vectores se indican con flechita o en **negrita**

$m\ q\ t\ p$	Escalar
$\vec{v}\ \vec{F}\ \vec{E}\ \vec{a}$ $\mathbf{v}\ \mathbf{F}\ \mathbf{E}\ \mathbf{a}$	Vector

Operaciones con magnitudes escalares: se suman y se multiplican

Suma de magnitudes escalares

Sumatorio

$$Q = q_1 + q_2 \qquad M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Debe respetar la homogeneidad dimensional

Producto de magnitudes escalares

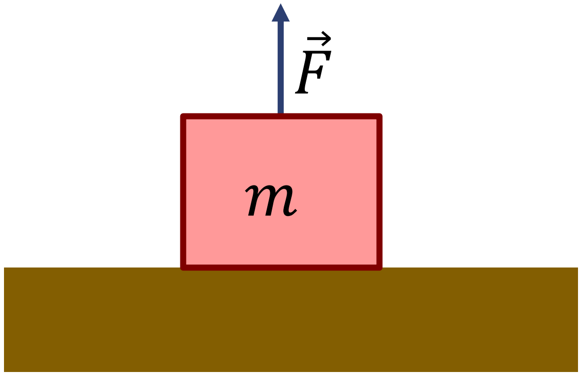
Dimensiones del producto = producto de dimensiones

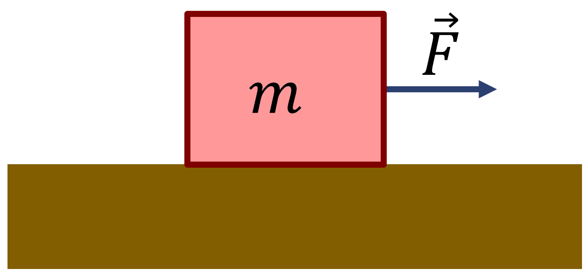
$$U = mgh \qquad [U] = M\frac{L}{T^2}L = M\frac{L^2}{T^2}$$

Pueden sumarse y multiplicarse

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

Las magnitudes vectoriales tienen módulo, dirección y sentido





El efecto de una fuerza no depende solo de su magnitud

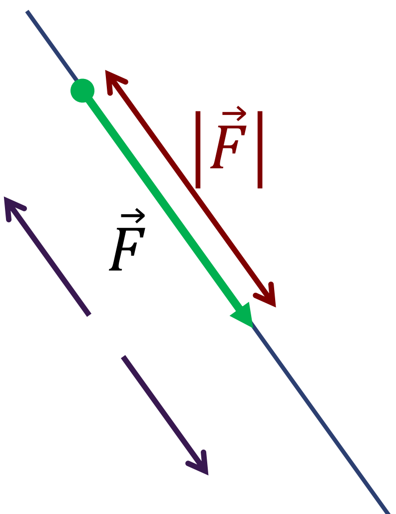
Elementos:

Módulo: valor de la magnitud (siempre positivo)

Dirección: la de la recta soporte de la magnitud

Unidad: las magnitudes vectoriales tienen dimensiones

Sentido: uno de los dos posibles para la misma recta

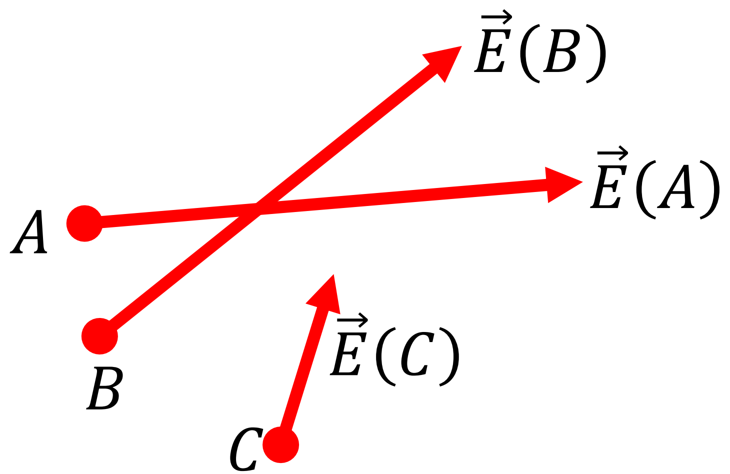


Vectores libres y ligados: el punto de aplicación es importante

Las magnitudes vectoriales están asociadas a un punto del espacio: **punto de aplicación**

Se toma como origen del vector

Se llaman **vectores ligados**



Los vectores ligados no pueden moverse del sitio

pero…

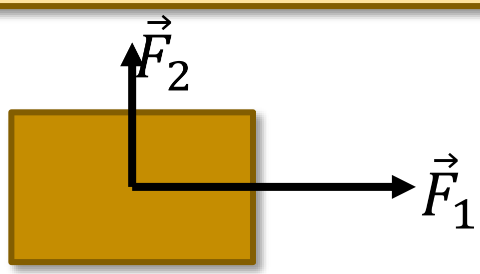
Existen magnitudes cuyos efectos no dependen del punto de aplicación

Un vector que puede cambiarse de punto de aplicación se denomina **vector libre**

P.ej. $\vec{g}$

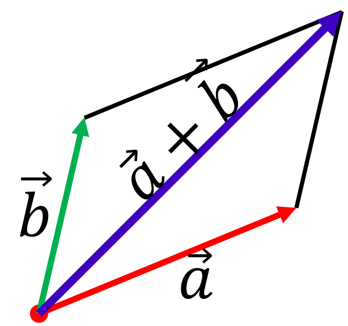
Suma de magnitudes vectoriales

El efecto de dos fuerzas aplicadas en el mismo punto es igual a la suma vectorial de ellas (llamada **resultante**)

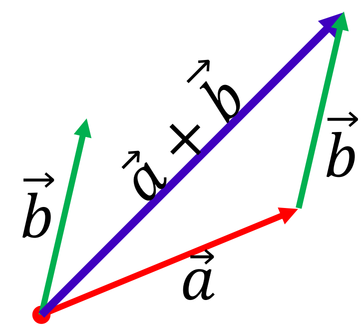


$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Dos vectores ligados pueden sumarse solo si tienen el *mismo punto de aplicación*



Regla del paralelogramo



Regla del triángulo

Los vectores libres se pueden sumar siempre

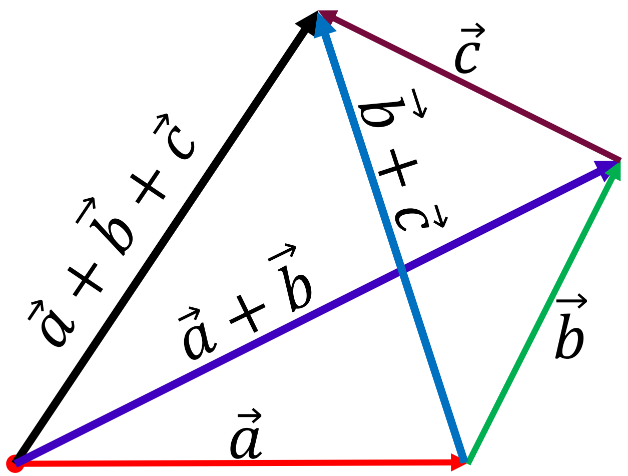
La suma de vectores tiene las mismas propiedades que la suma habitual

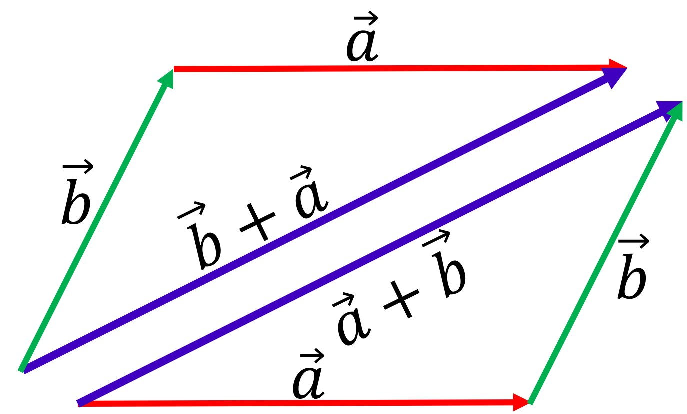
Asociativa

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

Conmutativa

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$



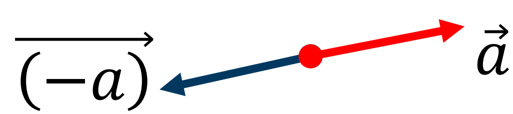


Elemento neutro:
el vector nulo $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

Lleva flecha

Elemento simétrico:
el vector opuesto

$$\vec{a}+\overrightarrow{(-a)}=\vec{0}$$



Los vectores se pueden multiplicar por magnitudes escalares

2ª ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$

Fuerza eléctrica $\vec{F} = q\vec{E}$

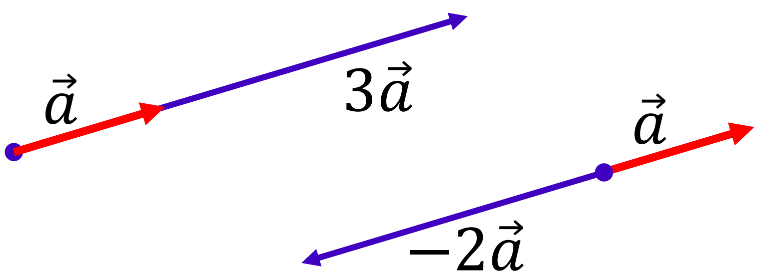
Escalar $\circ$ Vector $=$ Vector

Módulo: $|\vec{F}| = |q||\vec{E}|$

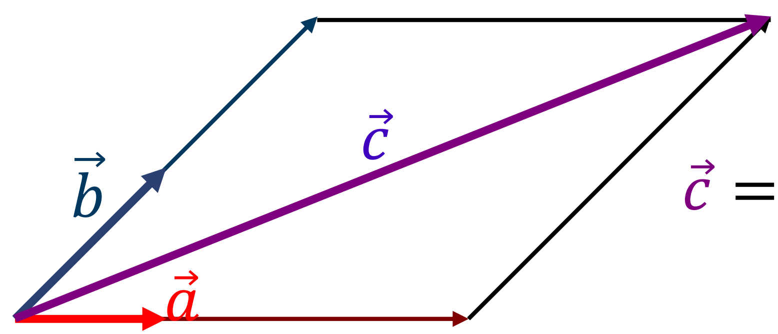
Misma dirección: $\vec{F} \parallel \vec{E}$

Sentido: Mismo si $q > 0$

Opuesto si $q < 0$



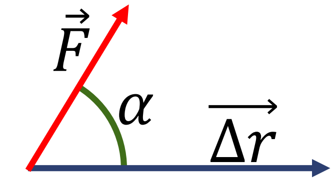
Una **combinación lineal** aúna suma de vectores y productos por escalares



$$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$$

El producto escalar de dos vectores produce una magnitud escalar

Definición de producto escalar: $\vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r} = |\vec{F}||\overrightarrow{\Delta r}|\cos(\alpha)$

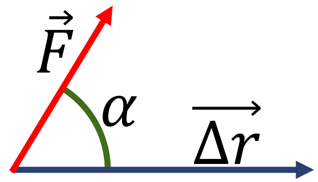


Lleva un puntito

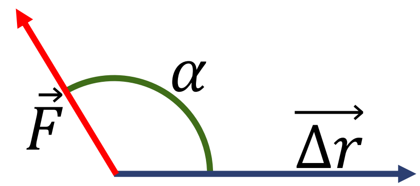
Vector ● Vector = Escalar

Es un escalar con signo

El signo depende de α



> 0



< 0

El producto escalar se anula si

- $|\vec{F}| = 0$ o $|\overrightarrow{\Delta r}| = 0$ → Uno de los dos vectores es nulo
- o
- $\cos(\alpha) = 0$ → Son ortogonales → $\vec{F} \perp \overrightarrow{\Delta r}$

Propiedades y aplicaciones del producto escalar

El producto escalar es conmutativo $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

El producto escalar NO es asociativo

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c}) \neq (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$$

WTF?

∄ producto de 3 vectores

Escalar

Vector

$$\underbrace{\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})}_{\parallel \vec{a}} \neq \underbrace{(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}}_{\parallel \vec{c}}$$

Permite hallar el módulo de un vector

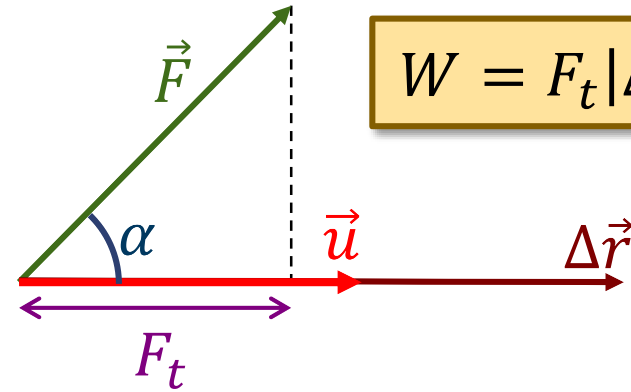
$$\vec{F}\cdot\vec{F}=\left|\vec{F}\right|^2 \quad\Rightarrow\quad \left|\vec{F}\right|=\sqrt{\vec{F}\cdot\vec{F}}$$

Unitario en la dirección de un vector

$$\vec{T}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad\Rightarrow\quad \vec{T}\cdot\vec{T}=\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}=1$$

Proyección ortogonal de un vector sobre otro

El producto escalar da la **proyección ortogonal** de un vector sobre otro

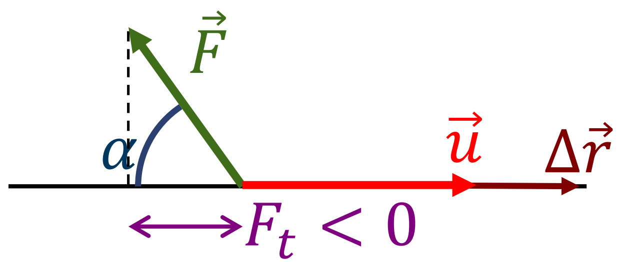


$$W = F_t|\Delta\vec{r}|$$

P.ej.: Solo la fuerza en la dirección de $\Delta\vec{r}$ realiza trabajo

Es la longitud de la sombra obtenida perpendicularmente

Puede ser negativa



$$F_t = |\vec{F}|\cos(\alpha) =$$

$$= \frac{\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|} = \vec{F}\cdot\vec{u}$$

Unitario

Ejemplo: aceleración tangencial

$$a_t = \vec{a}\cdot\vec{T} = \vec{a}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

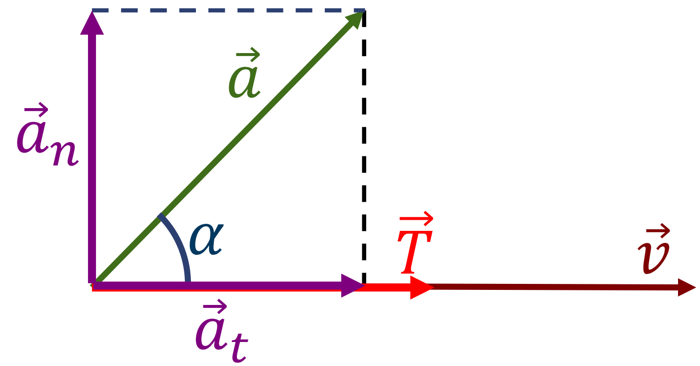
Los vectores pueden separarse en componentes respecto a otro

Todo vector puede separarse en suma de dos vectores

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$\vec{a}_t$: $\parallel \vec{v}$

$\vec{a}_n$: $\perp \vec{v}$



Una parte tangencial $\vec{a}_t$

$$\vec{a}_t = a_t\vec{T} = (\vec{a}\cdot\vec{T})\vec{T} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{v})\vec{v}}{|\vec{v}|^2}$$

$\vec{T}$: Unitario

Una parte normal, $\vec{a}_n$

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t$$

OJO

$$\vec{a}_t \neq a_t$$

Relaciones entre módulos

$$\begin{cases} |\vec{a}_t| = |\vec{a}||\cos(\alpha)| \\ |\vec{a}_n| = |\vec{a}||\mathrm{sen}(\alpha)| \\ |\vec{a}|^2 = |\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_n|^2 \end{cases}$$

El producto vectorial de dos vectores, $\vec{A} \times \vec{B}$ da como resultado un vector

Vector × Vector = Vector

Lleva un aspa

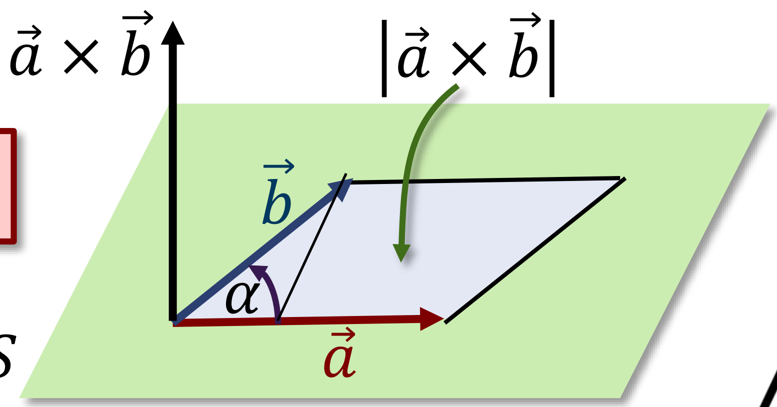
$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

Ej. Fuerza magnética $\vec{F}_m = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$

Módulo:

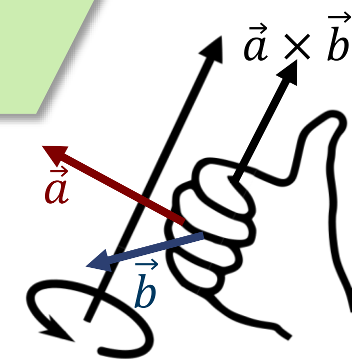
$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right||\mathrm{sen}(\alpha)|$$

$$|\vec{a}|\left(\left|\vec{b}\right|\mathrm{sen}(\alpha)\right) = bh = S$$



Dirección: Perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{b}$

Sentido: Regla de la mano derecha



Propiedades y no propiedades del producto vectorial

El producto vectorial NO es conmutativo:

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$

Es anticonmutativo:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

El producto vectorial NO es asociativo

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

El producto vectorial se anula si

- $|\vec{a}| = 0$
- $|\vec{b}| = 0$

Uno de los dos vectores es nulo

o

- $\mathrm{sen}(\alpha) = 0$ Son paralelos $\vec{a} \parallel \vec{b}$

Más allá del producto vectorial: el doble producto vectorial y el mixto

Doble producto vectorial $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{c})}_{\parallel \vec{b}}\vec{b} - \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{b})}_{\parallel \vec{c}}\vec{c}$$

No se anulan

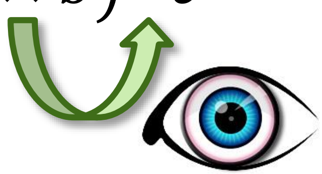
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$$

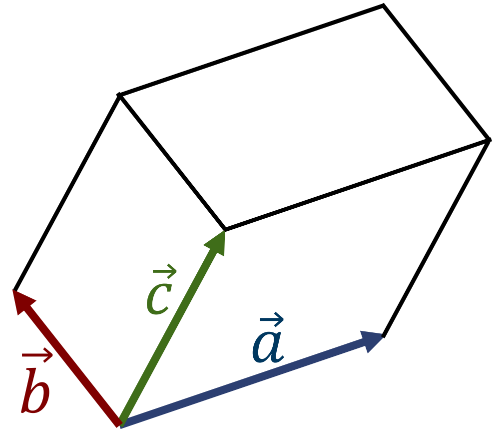
Producto mixto: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

Volumen del paralelepípedo

Es un escalar

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$





$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

Descomposición de un vector en una parte paralela y una ortogonal a otro

Multiplicando por el mismo vector

$$\vec{v}\times(\vec{a}\times\vec{v}) = \underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{v})}_{=|\vec{v}|^2}\vec{a} - (\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v}$$

Despejando

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{\vec{v}(\vec{a}\cdot\vec{v})}{|\vec{v}|^2}}_{\parallel \vec{v}} + \underbrace{\frac{\vec{v}\times(\vec{a}\times\vec{v})}{|\vec{v}|^2}}_{\perp \vec{v}}$$

Tangencial

$$\vec{a}_t = \frac{\vec{v}(\vec{a}\cdot\vec{v})}{|\vec{v}|^2} = \vec{T}(\vec{a}\cdot\vec{T}) \qquad \vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \qquad |\vec{a}_t| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|} = |\vec{a}\cdot\vec{T}|$$

Normal

$$\vec{a}_n = \frac{\vec{v}\times(\vec{a}\times\vec{v})}{|\vec{v}|^2} = \vec{T}\times(\vec{a}\times\vec{T}) \qquad |\vec{a}_n| = \frac{|\vec{a}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|} = |\vec{a}\times\vec{T}|$$

¿Pueden despejarse los vectores en los productos escalares y vectoriales?

Si conocemos $k = \vec{A}\cdot\vec{X}$, ¿Podemos despejar $\vec{X}$?

$$\cancel{\vec{X} = \frac{k}{\vec{A}}}$$

NO

No puede dividirse un escalar por un vector

Si conocemos $\vec{C} = \vec{A}\times\vec{X}$, ¿Podemos despejar $\vec{X}$?

$$\cancel{\vec{X} = \frac{\vec{C}}{\vec{A}}}$$

NO

No puede dividirse un vector por otro vector

¿Y si conocemos $k = \vec{A}\cdot\vec{X}$ y $\vec{C} = \vec{A}\times\vec{X}$?

SÍ

$\vec{C}$ debe ser ortogonal a $\vec{A}$

$$\vec{X} = \frac{(\vec{A}\cdot\vec{X})\vec{A}}{|\vec{A}|^2} + \frac{(\vec{A}\times\vec{X})\times\vec{A}}{|\vec{A}|^2} = \frac{k\vec{A}}{|\vec{A}|^2} + \frac{\vec{C}\times\vec{A}}{|\vec{A}|^2}$$

Resumen de operaciones y el tipo de resultados

Operación	Ejemplo	Carácter				
Suma de escalares	$M = m_1 + m_2$	Escalar	$+$	Escalar	$=$	Escalar
Producto de escalares	$U = mgh$	Escalar	$\circ$	Escalar	$=$	Escalar
Suma de vectores	$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$	Vector	$+$	Vector	$=$	Vector
Producto por un escalar	$\vec{F} = m\vec{a}$	Escalar	$\circ$	Vector	$=$	Vector
Producto escalar	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	Vector	$\circ$	Vector	$=$	Escalar
Producto vectorial	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	Vector	$\times$	Vector	$=$	Vector

Expresiones potencialmente incorrectas con vectores y escalares

1 $\cancel{\vec{F} = \frac{m(\vec{v} \times \vec{a})}{\vec{v}}}$

2 $\cancel{\vec{F} \times (\vec{v} \times \vec{a}) = (\vec{p} \cdot \vec{a}) \times \vec{a}}$

3 $\cancel{\frac{\vec{L}}{R} = \vec{F}t - \vec{v}}$

4 $\cancel{(\vec{r} \times \vec{p})\vec{L} = R(\vec{r} \cdot \vec{p})\vec{p}}$

5 $\cancel{\frac{\vec{F} - \vec{p}/t}{m} = \frac{\vec{r} - \vec{v}t}{t^2 - t}}$

6 $\cancel{\frac{1}{\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{r^2}}$

7 $\cancel{L = \vec{r} \times \vec{p}}$

8 $\cancel{\frac{W}{t} = \vec{F} \times \left(\vec{v} - \frac{R}{t}\right)}$

9 $\cancel{\vec{r} = \frac{(\vec{v} - \vec{a}t)}{|\vec{a} - \vec{v}t|}}$

10 $\cancel{\Delta t = \frac{\Delta \vec{r}}{\vec{v}}}$

11 $R = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|}$

12 $\cancel{\vec{r} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v}}$

13 $\cancel{\vec{v} \times (\vec{a} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{a} \times \vec{v})}$

14 $\cancel{\vec{a}_t = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{v}|}}$

15 $\cancel{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vec{r}}\left(\frac{1}{2}|\vec{v}|^2\right)}$

Sevilla, octubre de 2014