

## Física I. Boletín 9. Diciembre de 2015

**9.1.** Se tiene un sólido formado por ocho partículas de masa  $m$  situadas en los vértices de un cubo de arista  $a$ . Halle el momento de inercia del cubo respecto a los siguientes ejes:

- Uno perpendicular a una cara y que pase por el centro del cubo.
- Uno que pase por dos vértices opuestos.
- Uno que pase por los centros de dos aristas opuestas.
- Uno que pase por una arista

**9.2.** Halle los siguientes momentos de inercia de sólidos de densidad homogénea:

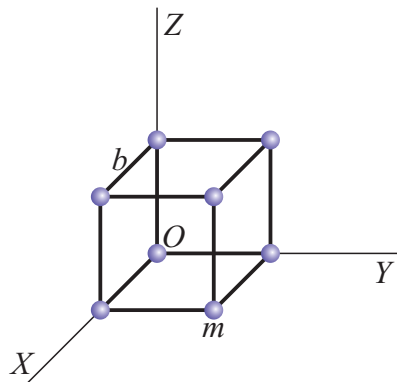
- Una superficie cilíndrica hueca, de masa  $M$ , radio  $R$  y altura  $h$ .
- Un cilindro macizo, de masa  $M$ , radio  $R$  y altura  $h$ .
- Una corona cilíndrica de masa  $M$ , radio interior  $R_1$  y exterior  $R_2$ , con altura  $h$

En todos los casos, el momento de inercia debe hallarse respecto al eje del cilindro.

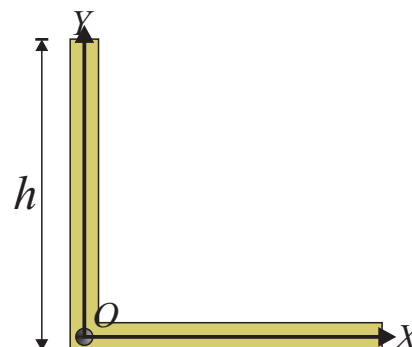
**9.3.** Calcule el momento de inercia de una esfera maciza, de masa  $M$  y radio  $R$  alrededor de un eje que pasa por su centro.

A partir del resultado anterior, halle el momento de inercia de una esfera hueca, de masa  $M$ , radio interior  $R_1$  y exterior  $R_2$  respecto a un eje que pasa por su centro. ¿A qué se reduce el resultado cuando la corona se reduce a una superficie esférica de radio  $R$ ?

**9.4.** Se tiene un sólido en forma de L de un metal homogéneo, siendo  $h$  la longitud de los brazos y  $M$  su masa total. Calcule el momento de inercia del sólido respecto a un eje perpendicular al plano de la L y que pasa por un punto del interior del cuadrado de lado  $h$  que define. ¿En qué punto es mínimo este momento de inercia?



**Problema 9.1**



**Problema 9.4**

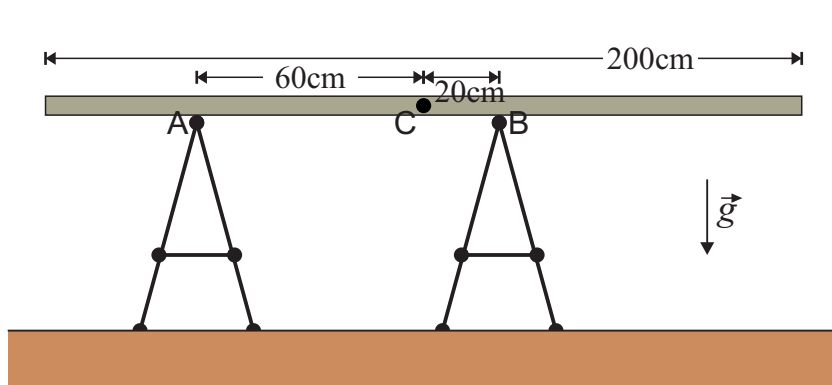
- 9.5.** Supongamos dos masas iguales  $m$  unidas por una barra rígida de longitud  $b$ , sin masa. Las masas reposan sobre un plano, sobre el que pueden moverse sin rozamiento. A una de las masas se le comunica una velocidad inicial  $v_0$  perpendicular a la línea de la barra, mientras que la otra se encuentra inicialmente en reposo. ¿Cómo es el movimiento siguiente de la barra?
- 9.6.** Supongamos que tenemos una barra de masa  $M$  y longitud  $b$  apoyada en el suelo y en una pared vertical, sometida a la acción del peso (vertical y hacia abajo) y a las fuerzas de reacción en los puntos de contacto.
- Suponga primero que no hay rozamiento con las superficies y que la barra forma un ángulo  $\theta$  con la pared. ¿Puede quedarse en equilibrio la barra para algún valor de  $\theta$ ?
  - Suponga ahora que la barra posee un coeficiente de rozamiento estático  $\mu$  con el suelo. ¿Para qué ángulos puede alcanzarse entonces el equilibrio?
- 9.7.** Sobre una barra de longitud  $b$  y masa  $M$  situada en reposo horizontalmente en una superficie sin rozamiento se aplica una fuerza  $F_0$  también horizontal. El punto de la aplicación se encuentra a una distancia  $d$  del centro de la barra.
- Si la fuerza es perpendicular a la barra, ¿cuánto valen la aceleración del CM y la aceleración angular de la barra? ¿Alrededor de qué punto comienza a girar la barra?
  - Suponga ahora que la fuerza forma un ángulo  $\beta$  con la barra, ¿cuánto valen ese caso las aceleraciones y donde se encuentra el centro instantáneo de rotación?
  - Suponga que la barra se encuentra articulada en un extremo de forma que sólo puede girar en torno a este punto. ¿Cuánto valen las aceleraciones en ese caso? ¿Cuánto vale la fuerza que el punto de articulación ejerce sobre la barra?
  - Si la barra estuviera empotrada en su extremo, de forma que no pudiera moverse de ninguna manera, ¿cuánto valdrían la fuerza y el momento de reacción ejercidos por el soporte?
- 9.8.** Se tiene una plataforma de masa  $m = 6.0$  kg y longitud  $b = 2.00$  m (estando la masa distribuida uniformemente) que se apoya horizontalmente sobre dos caballetes de forma que los puntos de apoyo A y B están a 60 cm y 20 cm del centro C de la tabla, respectivamente.
- Calcule la fuerza que cada caballete ejerce sobre la tabla.
  - Halle el valor máximo de la masa que se puede apoyar en el borde izquierdo de la plataforma si no se quiere que esta vuelque.
  - Suponga que sobre el extremo *derecho* de la plataforma se apoya una masa de 2.2 kg. ¿Volará la tabla? Si es así, determine la aceleración angular que adquiere la tabla al comenzar a girar en torno al punto de apoyo, así como la fuerza que ejerce ese caballete sobre la mesa en el instante en que empieza a volcar.

Tómese  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

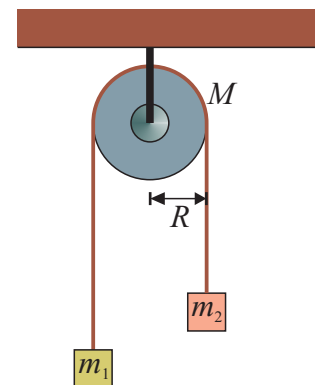
**Dato:** Momento de inercia de una barra de masa  $m$  y longitud  $b$  respecto a un eje perpendicular a ella y que pasa por su centro:  $I = mb^2/12$ .

- 9.9.** Se tiene un péndulo compuesto consistente en una barra de longitud  $b$  y masa  $M$  suspendida por un punto situado a una distancia  $d$  del centro de la barra ( $d < b/2$ ). Suponiendo que la barra se desvía un ángulo pequeño  $\theta_0$  respecto de la vertical y a partir de ahí se suelta:
- (a) Determine el periodo de oscilación de la barra
  - (b) Calcule la fuerza ejercida sobre el punto de anclaje cuando la barra pasa por la vertical en su oscilación.
- 9.10.** Dos masas  $m_1$  y  $m_2$  están unidas por una cuerda ideal, inextensible y sin masa. Esta cuerda pasa por una polea de masa  $M$ , que se puede modelar como un cilindro de radio  $R$ . La polea no tiene rozamiento que le impida girar en torno a su eje. Determine la aceleración con la que se mueven las masas, las tensiones en cada tramo de la cuerda, así como la fuerza en el punto de anclaje de la polea.
- 9.11.** Por un suelo horizontal se lanza un disco macizo de masa  $M$  y radio  $R$ . Inicialmente el disco no gira, sino que se desliza con velocidad  $v_0$ . Si el coeficiente de rozamiento dinámico con el suelo vale  $\mu$ , ¿cuánto tarda el disco en dejar de deslizar y empezar a rodar sin deslizar? Estudie cómo cambian durante el proceso las siguientes magnitudes:
- (a) Velocidad del centro del disco.
  - (b) Velocidad del punto superior del disco.
  - (c) Energía cinética de traslación del disco.
  - (d) Energía cinética de rotación.
  - (e) Energía cinética total.

¿Cómo cambian los resultados si en lugar de un disco macizo tenemos un aro de radio  $R$ ? ¿Y si tenemos una bola maciza de radio  $R$ ?



**Problema 9.8**



**Problema 9.10**

**9.12.** En lo alto de un plano inclinado de altura  $h$  y con una cierta pendiente se encuentran los siguientes objetos: (a) una superficie cilíndrica hueca, (b) un cilindro macizo, (c) una superficie esférica hueca y (d) una esfera maciza.

Si se sueltan a la vez desde el extremo superior del plano, ¿dependerá el orden de llegada de la masa y el radio de cada uno? ¿con qué rapidez del CM llega cada uno al punto más bajo del plano? ¿en qué orden llegarán y cuanto tarda cada uno en llegar? Si además se suelta un bloque que desliza sin rozamiento por el plano, ¿llegará antes o después que los objetos rodantes? ¿Cuánto?

**9.13.** Una esfera metálica maciza de acero con radio  $R = 5\text{ cm}$  se encuentra en reposo a una altura  $z = 15\text{ m}$  y desciende rodando sin deslizar por el plano inclinado con un ángulo  $\beta = 30^\circ$ . El coeficiente de rozamiento estático entre el plano y el cilindro es  $\mu$ . El rozamiento por rodadura es despreciable.

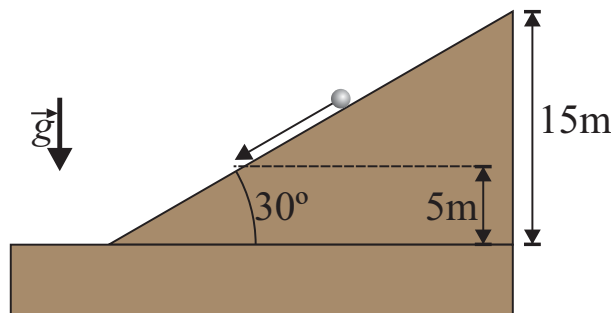
- (a) ¿Qué relación existe entre la aceleración angular de la esfera y la lineal de su centro de masas?
- (b) ¿Cuánto valen la energía cinética de rotación, la cinética de traslación, la potencial (tomando  $z = 0$  como referencia) y la mecánica cuando se halla en  $z = 5\text{ m}$ ?
- (c) ¿Cuánto vale, en módulo, la aceleración lineal del centro de masas de la esfera?
- (d) ¿Cuál es el valor mínimo que debe tener el coeficiente de rozamiento  $\mu$  si la esfera rueda sin deslizar?

**Dato:** Densidad de masa del acero:  $\rho = 7850\text{ kg/m}^3$ .

**9.14.** Se tiene un bloque en forma de prisma de altura  $h$  y base cuadrada de lado  $b$ , situado sobre un plano inclinado un ángulo  $\beta$ . Dos de los lados de la base son paralelos a la dirección de descenso del plano (y los otros dos son ortogonales). El coeficiente de rozamiento (estático y dinámico) entre el bloque y el plano vale  $\mu$ .

Determine el máximo valor de  $h$  para que el bloque no vuelque si (a)  $\mu > \text{tg}(\beta)$ , (b)  $\mu < \text{tg}(\beta)$ .

**9.15.** Es conocido que al arrancar un coche, éste levanta un poco el morro y se hunde por la parte trasera. El mismo principio se aplica a los "caballitos" de las motocicletas. Supongamos una motocicleta con una masa  $M$  y tal que su centro de masas se encuentra a una altura  $H$  respecto a los ejes de las ruedas (las cuales tienen radio  $R$ , masa  $m$  y momento de inercia  $I$ ). El CM está a una distancia  $d_A$  del eje delantero y a una  $d_B$  del trasero.



**Problema 9.13**

- (a) Calcule la fuerza que se ejerce sobre cada eje cuando la moto arranca con una aceleración  $a_0$  sobre un suelo horizontal.
- (b) Determine la fuerza de rozamiento que el suelo ejerce sobre cada rueda, así como el par ejercido por el motor sobre el eje de tracción (el de la rueda trasera).
- (c) ¿Cuál es la aceleración máxima que puede alcanzar la moto sin que su rueda trasera patine?
- (d) ¿Cuánto vale la potencia desarrollada por las diferentes fuerzas y momentos sobre el cuerpo y sobre las ruedas? ¿Cómo se transmite la energía aportada por el motor a las diferentes partes del sistema?

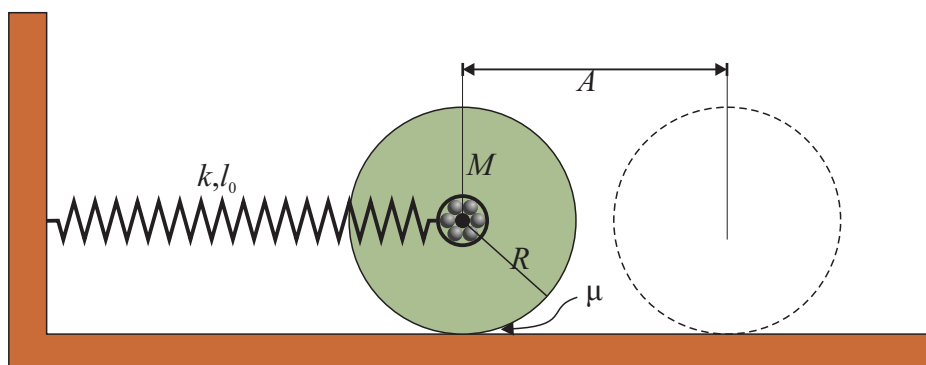
**9.16.** Un rodillo cilíndrico macizo de radio  $R$  y masa  $M$  se encuentra apoyado sobre una superficie horizontal, siendo el coeficiente de rozamiento (estático y dinámico)  $\mu$ . El eje del rodillo está atado a la pared mediante un resorte de constante  $k$  y longitud natural  $l_0$ .

Se separa el rodillo de la posición de equilibrio una distancia  $A$  y se suelta desde el reposo. El rodillo rueda sin deslizar.

- (a) Halle la velocidad del centro del rodillo y la velocidad angular para el instante en que su centro pasa por la posición de equilibrio.
- (b) ¿Cuánto vale el periodo de las oscilaciones que describe?
- (c) Calcule la fuerza de rozamiento estático que ejerce el suelo sobre el rodillo (1) en la posición inicial y (2) al pasar por la posición de equilibrio.
- (d) ¿Cuál es el máximo valor de  $A$  que se puede alejar el rodillo si no se quiere que este empiece a deslizar sobre el suelo?

**9.17.** A la hora de tomar una curva, ¿de qué sirve inclinarse lateralmente?

- (a) Supongamos que Jorge Lorenzo toma una curva de 150 m de radio a una velocidad de 160 km/h ¿cuánto debe inclinarse en grados respecto a la vertical para no caerse ni a un lado ni al otro?
- (b) Es sabido que Marc Márquez es capaz de inclinarse más que otros pilotos. Si en esa misma curva Márquez se inclina  $60^\circ$ , ¿a qué velocidad puede pasar por la curva? ¿Cuánto debe valer como mínimo el coeficiente rozamiento estático del neumático sobre el asfalto?



**Problema 9.16**

(c) Si en esa curva, Pedrosa intenta hacer lo mismo que Jorge y Marc, pero pisa un charco que nadie más ha visto, de forma que el coeficiente de rozamiento estático se reduce a  $\mu = 0.5$ , ¿qué efecto tiene sobre la moto (1) respecto a su trayectoria (2) respecto a su inclinación?

**9.18.** Un camión de mudanzas va cargado de forma que su centro de gravedad se encuentra a 3.0 m del suelo. Si la distancia entre ruedas del camión es de 2.40 m, ¿cuál es la máxima velocidad con la que puede tomar una rotonda de 20 m de radio sin volcar? ¿Cuál es el valor mínimo que debe tener el coeficiente de rozamiento estático con el suelo para que el camión no derrape?

---

**T.1** Se tiene un péndulo compuesto formado por una bola de masa 2 kg y diámetro 10 cm que oscila verticalmente colgada por un ganchito de un hilo de masa despreciable y que mide 20 cm, atado a la pared. ¿Cuánto vale el momento de inercia del péndulo respecto a un eje perpendicular al plano de oscilación y que pasa por el punto de anclaje del hilo en la pared?

- A.** 0.188 kg·m<sup>2</sup>.
- B.** 0.050 kg·m<sup>2</sup>.
- C.** 0.008 kg·m<sup>2</sup>.
- D.** 0.127 kg·m<sup>2</sup>.

---

**T.2** En los extremos una barra rígida de longitud  $h$  en reposo se aplican dos fuerzas del mismo módulo según la dirección longitudinal de la barra y con sentido opuesto. El resultado de esta aplicación es...

- A.** una traslación de la barra.
- B.** una rotación en torno al centro de la barra.
- C.** un movimiento helicoidal de la barra.
- D.** ninguno. La barra permanece en reposo.

---

**T.3** Se tienen dos esferas macizas de acero, tales que  $R_2 = 2R_1$ . ¿Cuál es la proporción entre los momentos de inercia de ambas respecto a un eje que pasa por sus centros,  $I_2/I_1$ ?

- A.** 2.
- B.** 32.
- C.** 4.
- D.** 8.

---

Un sólido está formado por tres partículas, una de masa 200 g situada en  $\vec{r}_1 = \vec{0}$  cm y dos de 100 g que se encuentran en  $\vec{r}_2 = (60\vec{i})$  cm y  $\vec{r}_3 = (60\vec{j})$  cm, respectivamente. Las velocidades de las masas valen cada una  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = (10\vec{k})$  cm/s y  $\vec{v}_3 = -(10\vec{k})$  cm/s

**T.4** ¿Cuál es la posición del centro de masas del sistema?

- A.  $(20\vec{i} + 20\vec{j})$  cm.
- B.  $(30\vec{i} + 30\vec{j})$  cm.
- C.  $(60\vec{i} + 60\vec{j})$  cm.
- D.  $(15\vec{i} + 15\vec{j})$  cm.

**T.5** ¿Cuánto vale el momento de inercia de este sólido respecto a un eje que pasa por  $30\vec{i} + 30\vec{j}$  (cm) y tiene la dirección del vector  $\vec{i}$ ?

- A.  $0.012 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ .
- B.  $0.036 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ .
- C.  $0.072 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ .
- D.  $0.018 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ .

**T.6** Si en este sólido se aplica sobre la masa de 200 g una fuerza  $\vec{F}_1 = (20\vec{i})$  N y sobre las masas de 100 g una fuerza  $\vec{F}_2 = \vec{F}_3 = (-20\vec{i})$  N. ¿Cuánto vale la aceleración del centro de masas del sólido?

- A.  $0.05\vec{i} \text{ m/s}^2$ .
- B. Es nula.
- C.  $-50\vec{i} \text{ m/s}^2$ .
- D.  $-25\vec{i} \text{ m/s}^2$ .

---

**T.7** Se tiene una barra homogénea de masa M y longitud H apoyada en una pared vertical, sin rozamiento, y en el suelo. ¿Cuánto debe valer, como mínimo, el coeficiente de rozamiento estático con el suelo para que la barra no se resbale si el ángulo que forma con la vertical es de  $15^\circ$ ?

- A. 0.54
- B. No hay información suficiente para saberlo.
- C. 0.13
- D. 0.27

---

**T.8** Se aplica el mismo par de fuerzas a un cilindro hueco y a uno macizo de la misma masa y radio, para hacerlos girar alrededor de su eje. ¿Cuál de los dos adquiere una mayor aceleración angular?

- A. El macizo.
  - B. El hueco.
  - C. Los dos la misma.
  - D. Depende de otros factores no indicados.
-