

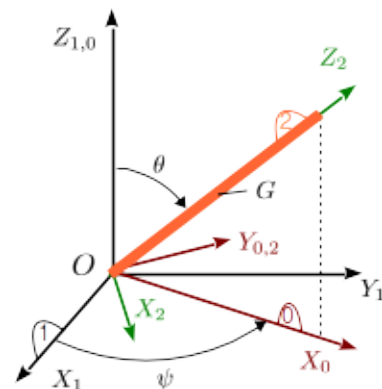


MECÁNICA RACIONAL, 2º CURSO, INGENIERÍA CIVIL, 2018/19

BOLETÍN DE PROBLEMAS DEL TEMA 8: SÓLIDO RÍGIDO VINCULADO

- Una barra homogénea de masa m y longitud $L = 2a$, se mueve en un plano vertical, de modo que sus extremos B y A se mueven sobre los ejes OX_1 y OY_1 , respectivamente. Suponiendo contactos lisos:
 - Encuentra una integral primera del movimiento en caso de apoyos bilaterales. Las condiciones iniciales son $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0$.
 - Encuentra las ecuaciones de movimiento aplicando el T.C.M. y el T.M.C. en el centro de masas de la barra.
 - Determina el ángulo θ_0 para el que la barra se despegaría del eje por su extremo A en caso de apoyo unilateral en ese punto.

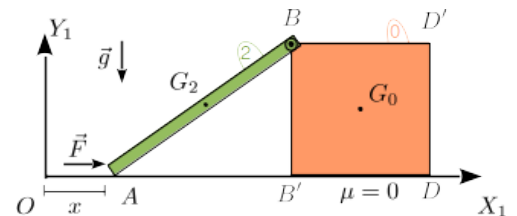
- Una barra homogénea de longitud L , masa M y radio despreciable está articulada en O , moviéndose en el espacio tridimensional $OX_1Y_1Z_1$ con su posición descrita mediante las coordenadas $\{\psi, \theta\}$, ángulos de precesión y nutación, respectivamente. Escogemos unos ejes $OX_2Y_2Z_2$ solidarios con la barra como se indica en la figura, y unos ejes auxiliares intermedios $OX_0Y_0Z_0$. Los contactos son ideales y la gravedad es constante $\vec{g} = -g\vec{k}_1$. Las condiciones iniciales son: $\psi(0) = 0, \theta(0) = \pi/6, \dot{\psi}(0) = \omega_0, \dot{\theta}(0) = 0$.



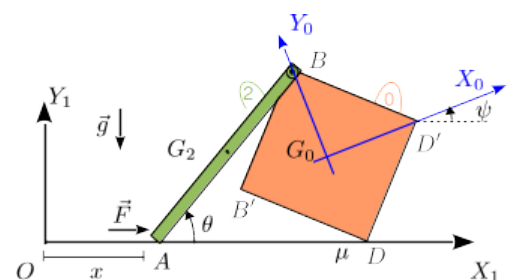
- Obtén las ecuaciones diferenciales del movimiento en forma de integrales primeras.

- El sistema de sólidos de la figura está formado por una varilla (sólido “2”, masa m , longitud $l_2 = 2\sqrt{2}a$) y por una placa cuadrada (sólido “0”, masa m , lado $l_0 = 2a$) articulados entre sí en el punto B . Sobre el eje OX_1 se apoyan el extremo A de la barra y el lado BD del cuadrado. Todos los contactos son lisos. Sobre el extremo A se aplica una fuerza horizontal creciente $\vec{F} = 2\lambda m g \vec{v}_1$ ($\lambda = t/T$), donde T es una constante. Inicialmente ($t = 0$), el sistema está en reposo y A coincide con O .

- Calcula la aceleración del sistema, los valores de las fuerzas vinculadas y la posición de la fuerza normal en BD , todo ello en función del tiempo.
- Calcula el instante en que el vértice B' empieza a despegar (condición de vuelco) y el trabajo realizado hasta ese instante por la fuerza \vec{F} .

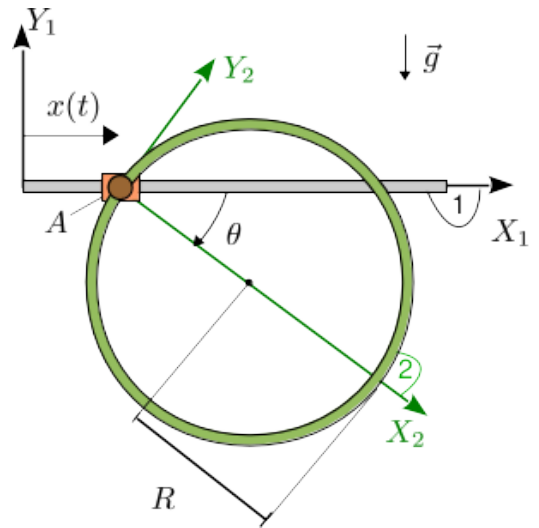


- El sistema de sólidos de la figura está formado por una varilla (sólido “2”, masa m , longitud $l_2 = 2\sqrt{2}a$) y por una placa cuadrada (sólido “0”, masa m , lado $l_0 = 2a$) articulados entre sí en el punto B . Sobre el eje OX_1 se apoyan el extremo A de la barra y el lado BD del cuadrado. Todos los contactos son lisos, salvo el apoyo del cuadrado, donde el coeficiente de rozamiento μ es tal que el deslizamiento es imposible. Sobre el extremo A se aplica una fuerza creciente $\vec{F} = 2\lambda m g \vec{v}_1$ donde λ es un parámetro del problema. Inicialmente A coincide con O . Obtén el sistema de ecuaciones que permite determinar la ecuación diferencial del movimiento y las fuerzas vinculadas del problema.



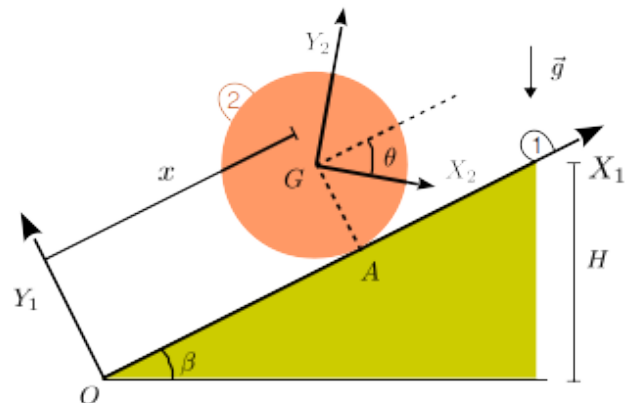
5. El sistema de la figura consiste en un aro rígido de radio R , masa m y centro C , contenido siempre en el plano vertical fijo OX_1Y_1 . El aro puede girar sin rozamiento alrededor de su punto A , el cuál desliza sobre el eje fijo OX_1 según la ley horaria $x(t) = R \cos(\omega t)$, para la coordenada horizontal de dicho punto.

- Aplica el teorema del momento cinético en A y, a partir de éste, determina las ecuaciones de movimiento del sistema.
- Calcula las fuerzas vinculares que sobre el sólido. Discute la conservación de la energía mecánica del sistema.
- Suponiendo ahora que el punto A desliza libremente sobre el eje OX_1 , discute la existencia de integrales primeras e indica si bastan para determinar, salvo condiciones iniciales, la evolución del sistema.



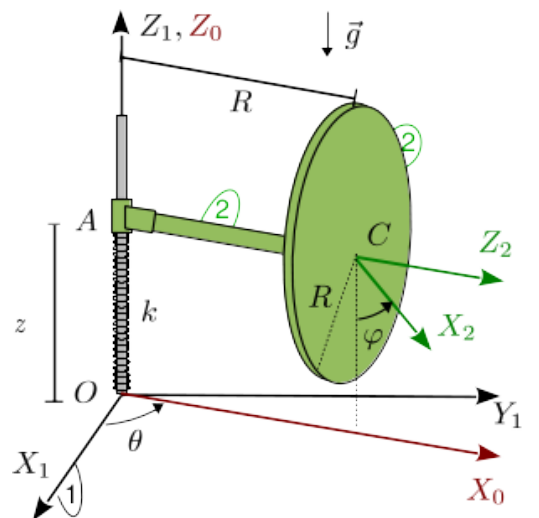
6. Un disco homogéneo de masa m y radio R (sólido “2”) sube por el plano inclinado y rugoso (sólido “1”) mostrado en la figura. El trayecto se divide en dos tramos dinámicamente distintos pero con continuidad cinemática entre ellos:

- Tramo I: El disco rueda y desliza hasta alcanzar la condición de rodar sin deslizar en el punto final del tramo. Calcula la ley horaria $x = x(t)$ y el tiempo empleado en este tramo.
- Tramo II: El disco sigue subiendo, rueda sin deslizar, y sufre la acción de un par motor conocido $\vec{\tau} = -\tau_0 \vec{k}_1$ (τ_0 constante) aplicado sobre el eje normal al plano del disco que pasa por G . Calcula el tiempo empleado en este tramo y la fuerza de rozamiento. Discute cualitativamente este problema en función de $\vec{\tau}$ y de la pendiente del tramo inclinado.



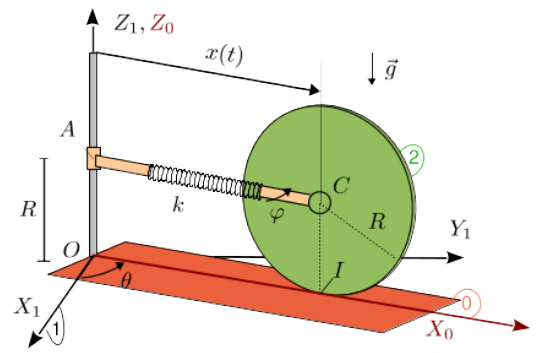
Datos: El coeficiente de rozamiento dinámico entre el disco y el plano inclinado es μ . Las condiciones iniciales son $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = \omega_0 > 0$.

7. El sólido “2” de la figura es un disco homogéneo de centro C , radio R y masa m , rígidamente unido a una barra CA perpendicular al disco, de longitud R y masa despreciable. El extremo A de la barra está engarzado a una pieza de dimensiones y masa despreciables que mantiene a la barra siempre perpendicular al eje vertical OZ_1 , permitiendo a la vez que el sólido “2” pueda girar alrededor de dicho eje y del eje colineal con CA , de forma simultánea. Por su parte, la pieza antes mencionada está obligada a deslizar por el eje OZ_1 , hallándose conectada al punto fijo O mediante un resorte de constante recuperadora k y longitud natural R . En el instante inicial ($t = 0$), el estado del sistema viene dado por las condiciones iniciales: $z(0) = R, \theta(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{z}(0) = 0, \dot{\theta}(0) = \omega, \dot{\varphi}(0) = \Omega$.



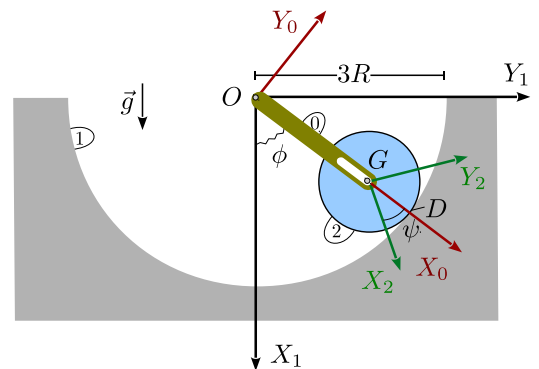
- Calcula las reacciones vinculares en el punto A y las leyes horarias $z(t), \theta(t)$ y $\varphi(t)$. Obtén las posibles posiciones de equilibrio del sistema y las correspondientes reacciones vinculares.
- Determina las integrales primeras del movimiento, obteniendo a partir de ellas las leyes horarias anteriores.

8. En el sistema mecánico de la figura, la lámina II, de masa despreciable y dispuesta horizontalmente (sólido "0"), puede girar libremente alrededor del eje vertical OZ_1 de un sistema de referencia fijo $OX_1Y_1Z_1$ (sólido "1"). Un disco homogéneo de masa m , centro C , radio R y espesor despreciable (sólido "2"), rueda sin deslizar sobre el eje OX_0 ligado a la lámina II. El disco se halla en todo instante contenido en el plano vertical OX_0Z_0 perpendicular a dicha lámina y rígidamente unido a ella, verificándose en todo instante que $OZ_0 \equiv OZ_1$. Además, un resorte de longitud natural nula y constante elástica k conecta con el centro del disco, C , con el punto fijo A del eje vertical OZ_1 , situado a una altura R sobre O .



- a) Desvincula el sistema de sólidos, discutiendo razonadamente el número de grados de libertad, así como el número total de incógnitas del problema.
- b) Obtén las integrales primeras del movimiento del sistema.

9. Un disco de radio R y masa m (sólido "2") rueda sin deslizar sobre una superficie circular cóncava fija (sólido "1") de radio $3R$. En el centro del disco se conecta a una barra (sólido "0") de masa despreciable y longitud $2R$. El centro del disco tiene libertad para moverse a lo largo de la barra. El otro extremo de la barra se articula en un punto fijo O . La barra está conectada a su vez a un resorte de torsión en el punto O . Este resorte ejerce un momento sobre la barra $\vec{M}_0 = -k\phi \vec{k}_0$, siendo k una constante. La gravedad actúa como se indica en la figura.



- a) Determina la reducción cinemática $\{21\}$ en el centro de masas del disco. ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?
- b) Para el disco, calcula su cantidad de movimiento, el momento angular respecto a su centro de masas y su energía cinética.
- c) Encuentra las fuerzas vinculares que actúan sobre la barra y el disco.
- d) Aplicando los teoremas fundamentales, encuentra las ecuaciones de movimiento y los valores de las reacciones vinculares.