Tema 3: Movimiento plano

Mecánica Racional, 2º, Grado en Ingeniería Civil

Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingenieros

Universidad de Sevilla

Índice

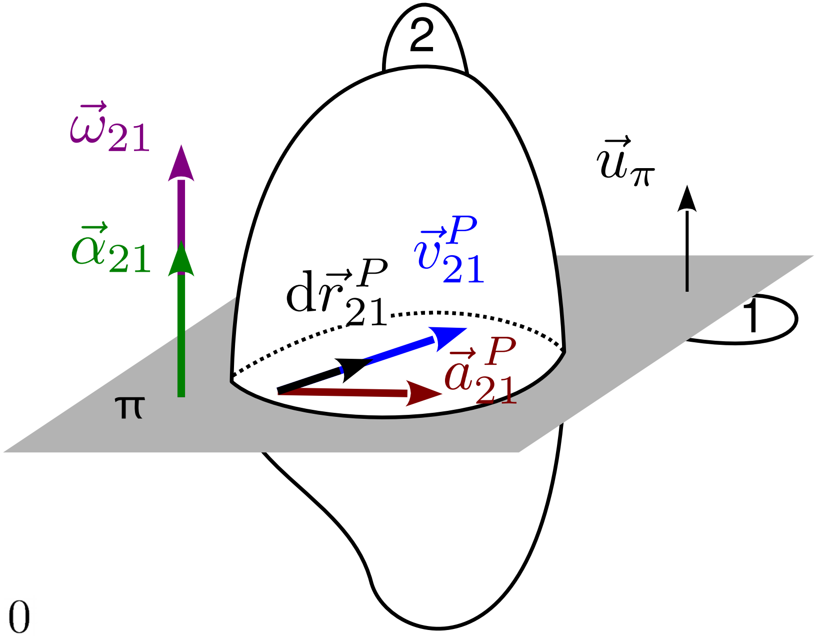
- Definición y propiedades
- Centro instantáneo de rotación
  - Definición
  - Determinación gráfica y analítica
- Teorema de los tres centros
- Campo de aceleraciones

Definición

Los movimientos de todos los puntos son paralelos a un plano dado, llamado plano director

Condición matemática $\quad \mathrm{d}\vec{r}^{\,P}_{21}(t)\cdot\vec{u}_\pi = 0$

Propiedades



Las velocidades y aceleraciones son paralelas al plano director

$$\mathrm{d}\vec{r}^{\,P}_{21}\cdot\vec{u}_\pi = 0 \;\rightarrow\; \mathrm{d}t\,\vec{v}^{\,P}_{21}(t)\cdot\vec{u}_\pi = 0 \;\rightarrow\; \boxed{\vec{v}^{\,P}_{21}(t)\cdot\vec{u}_\pi = 0}$$

Diferenciando respecto al sólido "1"

$$\mathrm{d}(\vec{v}^{\,P}_{21}(t)\cdot\vec{u}_\pi)_1 = 0 \;= \mathrm{d}\vec{v}^{\,P}_{21}(t)\cdot\vec{u}_\pi + \vec{v}^{\,P}_{21}(t)\cdot\cancelto{0}{\mathrm{d}\vec{u}_\pi} = \mathrm{d}t\,\vec{a}^{\,P}_{21}(t)\cdot\vec{u}_\pi \;\rightarrow\; \boxed{\vec{a}^{\,P}_{21}(t)\cdot\vec{u}_\pi = 0}$$

Propiedades

Los vectores velocidad angular y aceleración son perpendiculares al plano director

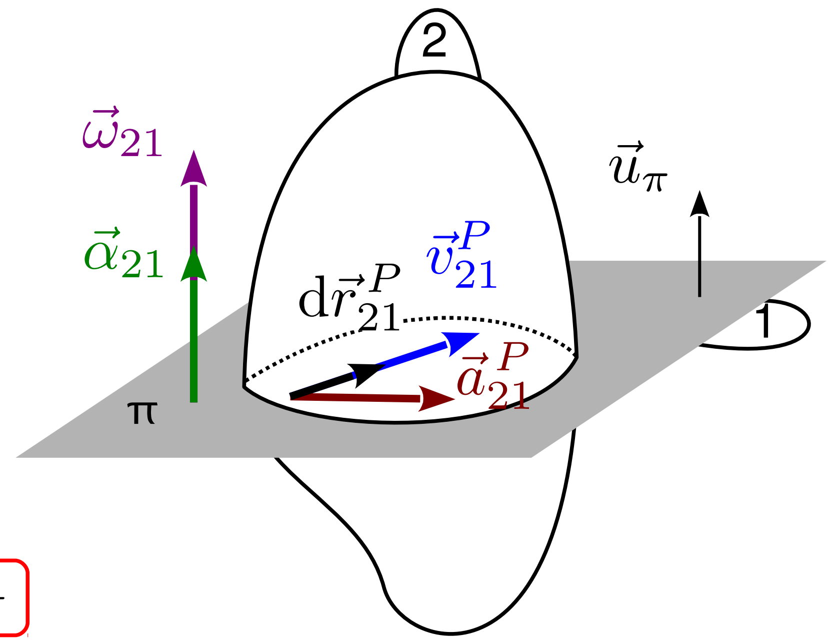
$$\vec{u}_\pi \cdot [\vec{v}^P_{21} - \vec{v}^Q_{21}] = 0 = \vec{u}_\pi \cdot [\vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{QP}(t)]$$

$$\overrightarrow{QP}(t) \cdot [\vec{u}_\pi \times \vec{\omega}_{21}] = 0 \qquad \forall \overrightarrow{QP}(t)$$

$$\vec{u}_\pi \times \vec{\omega}_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\omega}_{21} = \omega_{21}(t)\,\vec{u}_\pi}$$

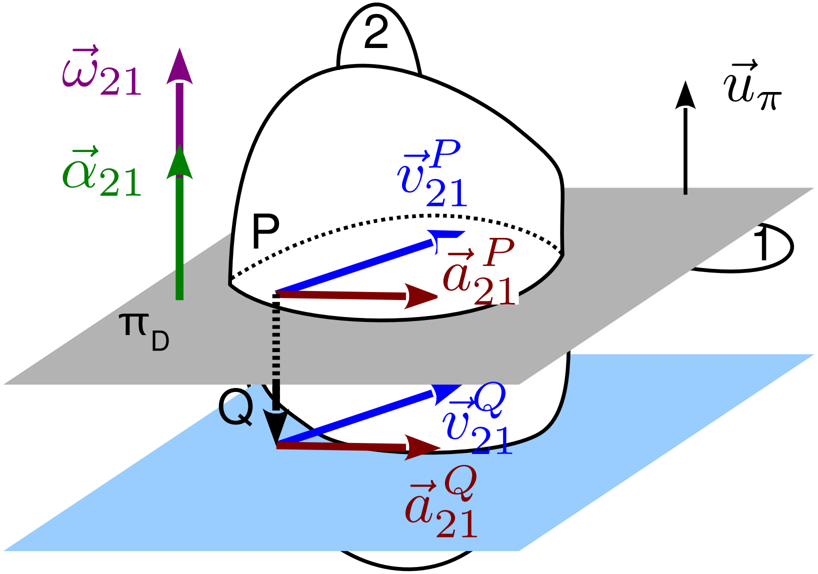
Diferenciando respecto al sólido "1"

$$\vec{\alpha}_{21} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{21}}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \frac{\mathrm{d}\omega_{21}}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\alpha}_{21} = \alpha_{21}(t)\,\vec{u}_\pi}$$



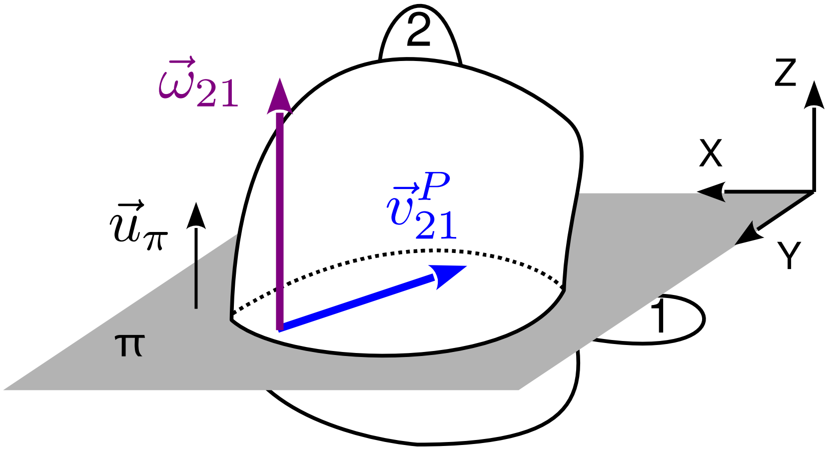
Propiedades

Las distribuciones de velocidad y aceleración son iguales en planos paralelos al director



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ} \parallel \vec{u}_\pi \\ \overrightarrow{PQ} \parallel \vec{\omega}_{21} \\ \overrightarrow{PQ} \parallel \vec{\alpha}_{21}\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l}\vec{v}_{21}^{\,P}(t) = \vec{v}_{21}^{\,Q}(t) \\ \vec{a}_{21}^{\,P}(t) = \vec{a}_{21}^{\,Q}(t)\end{array}$$

El movimiento tiene tres grados de libertad y en el caso más general es una rotación instantánea



$$\vec{\omega}_{21} = \omega_{21}\vec{u}_\pi \qquad \vec{v}_{21}^{\,P} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}$$

$$\vec{v}^{\,\text{mín}} = \vec{v}_{21}^{\,P}\cdot\vec{\omega}_{21} = \vec{0}$$

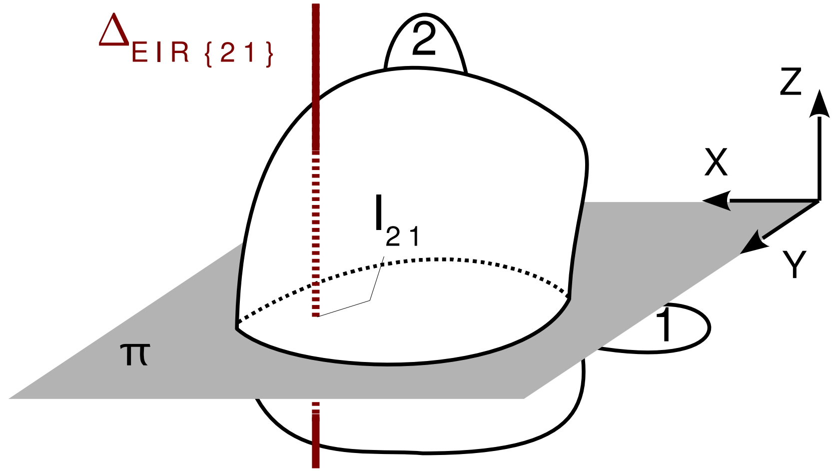
Índice

- Definición y propiedades
- Centro instantáneo de rotación
  - Definición
  - Determinación gráfica y analítica
- Teorema de los tres centros
- Campo de aceleraciones

Definición

Es la intersección del eje instantáneo de rotación y el plano director

$$I_{21} \equiv \Delta_{\mathrm{EIR}\{21\}} \cap \pi_D$$



Propiedades

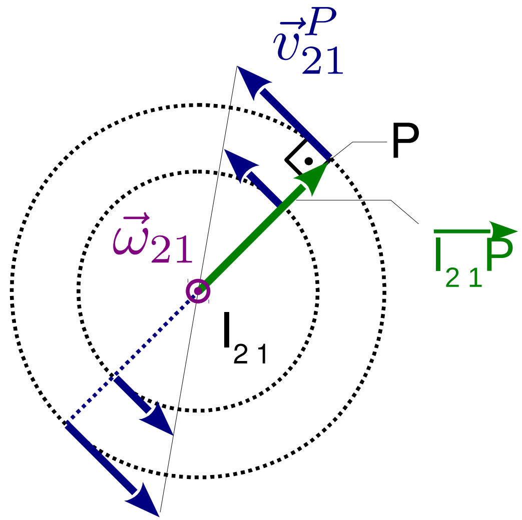
Es el único punto del sólido "2" con velocidad instantánea nula

$$\vec{v}_{21}^{I_{21}} = \vec{0}$$

El campo de velocidades tiene simetría rotacional alrededor de I_{21}

$$\vec{v}_{21}^{P} = \cancelto{0}{\vec{v}_{21}^{I_{21}}} + \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{I_{21}P}$$

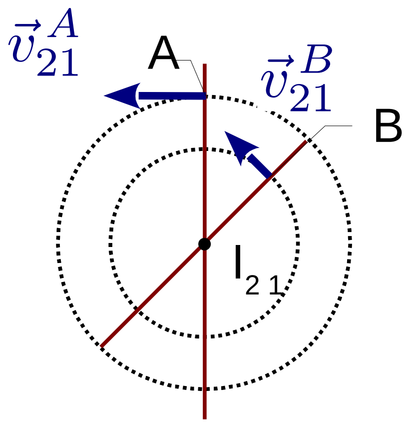
$$\vec{v}_{21}^{P} \perp \overrightarrow{I_{21}P} \qquad |\vec{v}_{21}^{P}| = |\vec{\omega}_{21}||\overrightarrow{I_{21}P}|$$



Caso 1

$\mathbf{v}^A_{21}$, $\mathbf{v}^B_{21}$ no paralelas

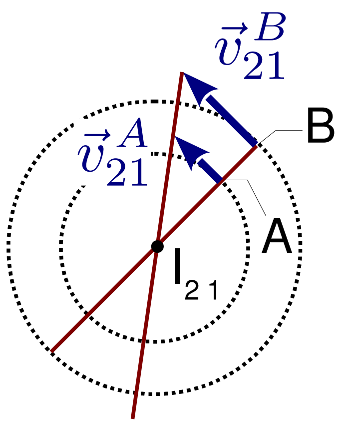
I_{21} es la intersección de las rectas trazadas por cada punto perpendicularmente a las velocidades respectivas



Caso 2

$\mathbf{v}^A_{21}$, $\mathbf{v}^B_{21}$ paralelas

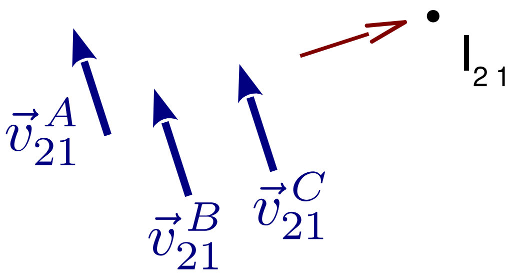
I_{21} es la intersección de las perpendicular común y la recta que une los extremos de los vectores velocidad



Traslación paralela

$\mathbf{v}_{21}$ es la misma en todos los puntos

I_{21} se considera en el infinito, en dirección perpendicular a la velocidad de traslación

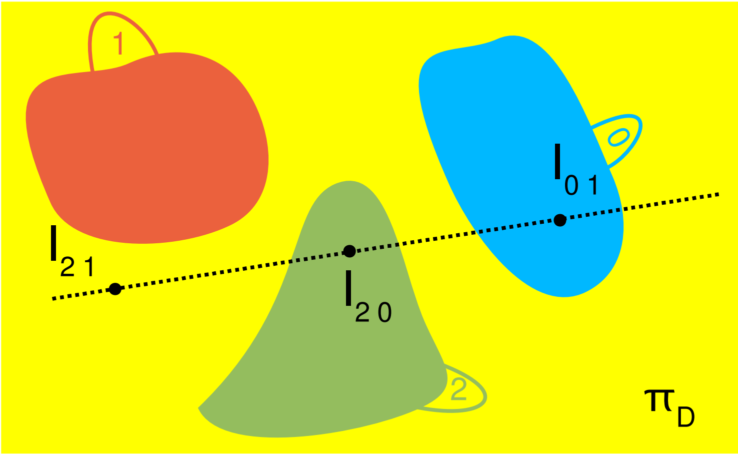


Determinación a partir de la reducción

$$\overrightarrow{OI}_{21} = \frac{\vec{\omega}_{21} \times \vec{v}^{\,O}_{21}}{|\vec{\omega}_{21}|^2}$$

- Definición y propiedades
- Centro instantáneo de rotación
  - Definición
  - Determinación gráfica y analítica
- Teorema de los tres centros
- Campo de aceleraciones

Si tres sólidos rígidos realizan movimientos relativos planos y paralelos entre sí, y se elige un plano director común, entonces los tres centros instantáneos de rotación están alineados

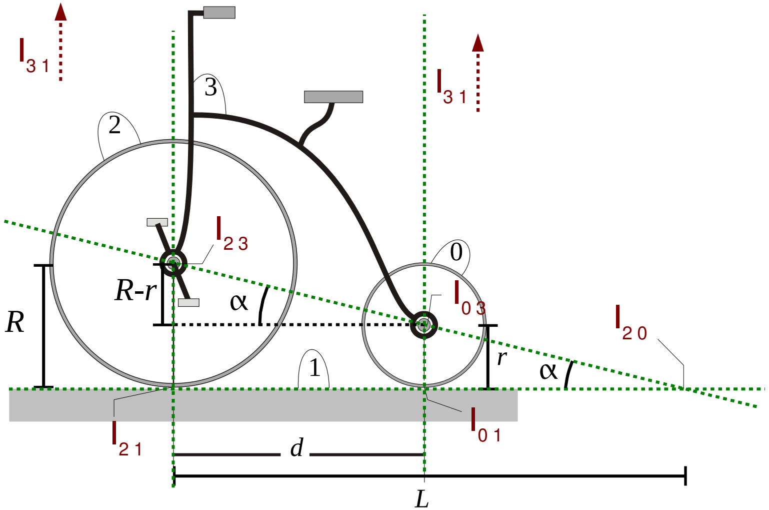


Aplicación

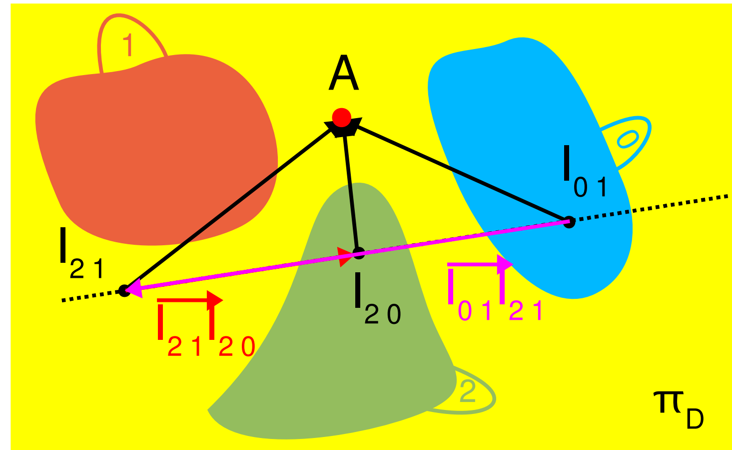
I_{20} se encuentra como intersección de $I_{23}I_{03}$ y $I_{21}I_{01}$

I_{31} se sitúa en el infinito

$$\tan\alpha = \frac{R}{L} = \frac{R-r}{d} \Longrightarrow L = \frac{R\,d}{R-r}$$



Punto A arbitrario $\vec{v}^A_{21} = \vec{v}^A_{20} + \vec{v}^A_{01}$



Campos de velocidades

$$\cancelto{0}{\vec{v}^{I_{21}}_{21}} + \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{I_{21}A} = \cancelto{0}{\vec{v}^{I_{20}}_{20}} + \vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{I_{20}A} + \cancelto{0}{\vec{v}^{I_{01}}_{01}} + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{I_{01}A}$$

Composición de velocidades angulares

$$(\vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01}) \times \overrightarrow{I_{21}A} = \vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{I_{20}A} + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{I_{01}A}$$

$$\vec{\omega}_{20} \times (\overrightarrow{I_{21}A} - \overrightarrow{I_{20}A}) = \vec{\omega}_{01} \times (\overrightarrow{I_{01}A} - \overrightarrow{I_{21}A}) \Longrightarrow \vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{I_{21}I_{20}} = \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{I_{01}I_{21}}$$

Multiplicando escalarmente por $\overrightarrow{I_{01}I_{21}}$

$$\overrightarrow{I_{01}I_{21}} \cdot (\vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{I_{21}I_{20}}) = \overrightarrow{I_{01}I_{21}} \cdot (\vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{I_{01}I_{21}}) = 0 \Longrightarrow \vec{\omega}_{20} \cdot (\overrightarrow{I_{21}I_{20}} \times \overrightarrow{I_{01}I_{21}}) = 0$$

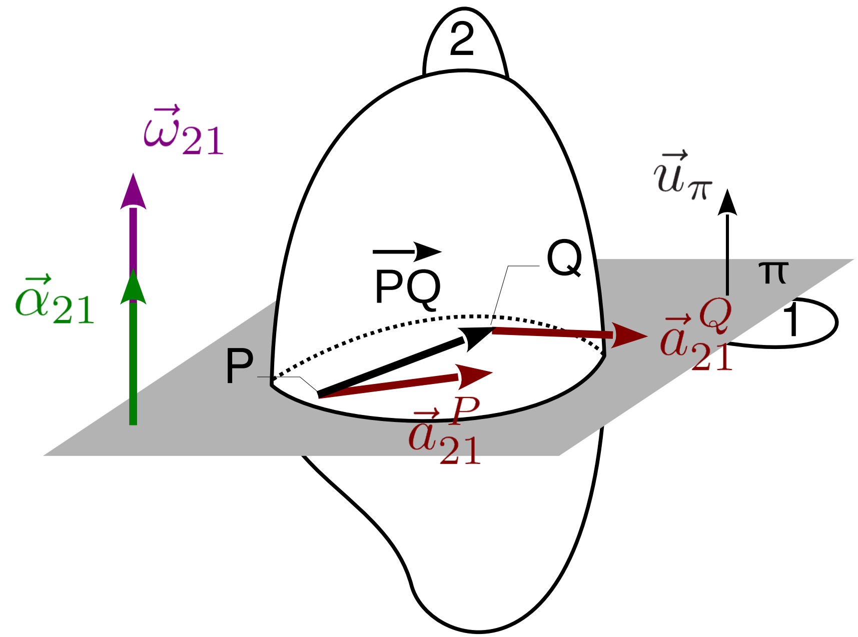
Como $\vec{\omega}_{20} \perp \pi_D$ y $\overrightarrow{I_{21}I_{20}} \times \overrightarrow{I_{01}I_{21}} \perp \pi_D$

$$\overrightarrow{I_{21}I_{20}} \times \overrightarrow{I_{01}I_{21}} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{I_{21}I_{20}} \parallel \overrightarrow{I_{01}I_{21}} \Longrightarrow \boxed{\{I_0, I_1, I_2\} \quad \text{alineados}}$$

- Definición y propiedades
- Centro instantáneo de rotación
  - Definición
  - Determinación gráfica y analítica
- Teorema de los tres centros
- Campo de aceleraciones

Campo de aceleraciones

La ecuación del campo de velocidades se simplifica respecto al caso de movimiento tridimensional, pues $\boldsymbol{\omega}_{21}$ y **PQ** son perpendiculares



$$\vec{a}_{21}^{\,Q} = \vec{a}_{21}^{\,P} + \vec{\alpha}_{21} \times \overrightarrow{PQ} - |\vec{\omega}_{21}|^2 \overrightarrow{PQ}$$

El campo de aceleraciones recupera una cierta estructura