Tema 1: Cinemática del sólido rígido

Mecánica Racional, 2º, Grado en Ingeniería Civil

Departamento Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Objetivos principales del tema

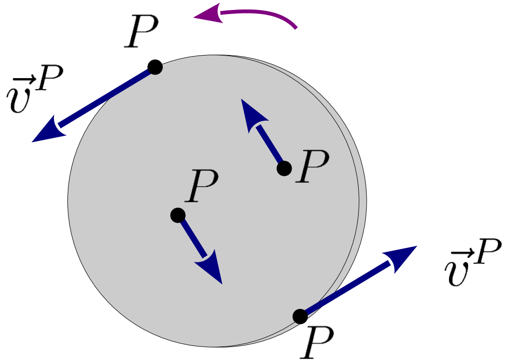
- Entender el concepto y la estructura del campo de velocidades de un sólido rígido
  - Ecuación del campo de velocidades (Teorema de Chasles)
- Identificar los movimientos elementales de un sólido rígido
- Comprender el concepto de campo de aceleraciones de un sólido rígido

Índice

Introducción: Sólidos deformables y rígidos

- Un sólido deformable modifica su forma bajo la acción de una fuerza
  - Materiales plásticos
  - Muelle
- Todos los sólidos son deformables si la fuerza es lo bastante intensa o actúa durante un tiempo lo bastante largo
  - Rocas de la corteza terrestre sometidas a intensas tensiones durante escalas de tiempo geológicas
- Un sólido rígido es un sólido que no se deforma ni se rompe bajo la acción de ninguna fuerza
  - Es una idealización

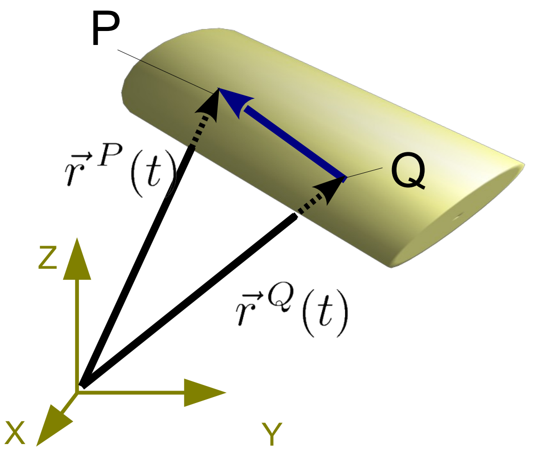
- Estudia el movimiento de un sólido rígido
- No se puede definir la velocidad de un sólido rígido
  - Cada punto del sólido puede tener una velocidad diferente
  - Campo de velocidades del sólido rígido: Cada punto tiene una velocidad distinta
  - Caracterizar el estado de movimiento del sólido es determinar la estructura y valores del campo de velocidades
  - Veremos que para conocer la velocidad en cualquier punto del sólido, basta conocer dos vectores: el vector rotación y la velocidad de un punto



- El movimiento se estudia respecto a un SRI en reposo

Índice

Condición geométrica de rigidez

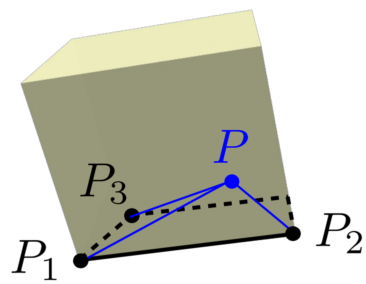


Un sólido rígido es un sólido no deformable

La distancia entre cualquier par de puntos no cambia cuando el sólido se mueve en el espacio

$$|QP(t)|^2 = |\,\vec{r}^{\,P}(t) - \vec{r}^{\,Q}(t)\,|^2 = (C_{PQ})^2 \quad \text{(cte)}$$

- Respecto a un triedro fijo en el sólido la posición de cada punto es constante en el mov.
- Un triedro queda definido con tres puntos no alineados fijos en el sólido



$P_1(x_1, y_1, z_1),\ P_2(x_2, y_2, z_2),\ P_3(x_3, y_3, z_3)$ → 9 parámetros

$$|P_2P_1| = C_{P_1P_2}$$
$$|P_3P_1| = C_{P_1P_3}$$
$$|P_3P_2| = C_{P_2P_3}$$

→ 3 condiciones de rigidez

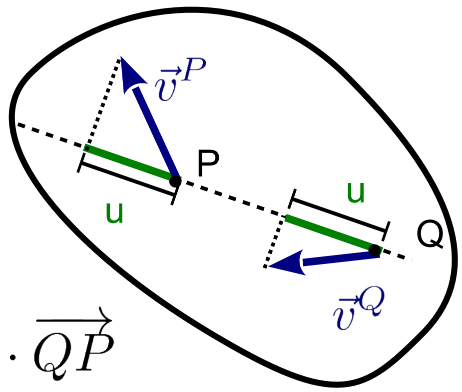
→ El sólido rígido libre tiene 6 grados de libertad

Índice

Condición cinemática de rigidez

- Derivando respecto al tiempo la condición geométrica de rigidez

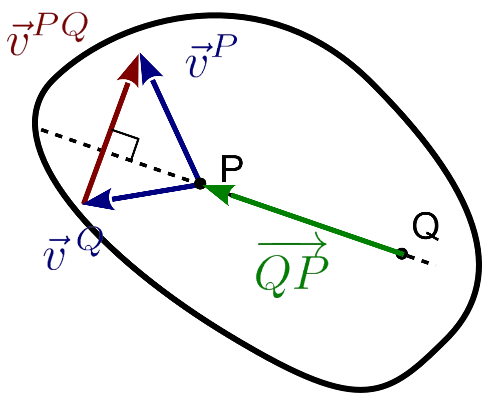
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|\vec{r}^P(t)-\vec{r}^Q(t)|^2\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((C_{PQ})^2\right)=0 \quad \Longrightarrow \quad (\vec{v}^{\,P}-\vec{v}^{\,Q})\cdot\overrightarrow{QP}=0$$



- El campo de velocidades es equiproyectivo $\vec{v}^{\,P}\cdot\overrightarrow{QP}=\vec{v}^{\,Q}\cdot\overrightarrow{QP}$
  - En un sólido rígido la distancia relativa entre dos puntos no puede cambiar nunca
- Cada punto ve a los otros moviéndose alrededor suya con una componente de giro

$$(\vec{v}^{\,P}-\vec{v}^{\,Q})=\vec{v}^{PQ}$$

$$(\vec{v}^{\,P}-\vec{v}^{\,Q})\cdot\overrightarrow{QP}=\vec{v}^{PQ}\cdot\overrightarrow{QP}=0$$



Índice

- Un sólido rígido puede moverse de cuatro formas diferentes
  - Reposo
  - Traslación
  - Rotación
  - Traslación y rotación: movimiento helicoidal

Movimientos elementales: Reposo

- La velocidad de todos los puntos del sólido es nula

$$\vec{v}^P = \vec{0} \qquad\qquad \forall P$$

- Permanente: la velocidad es nula en todo instante de tiempo

$$\vec{v}^P(t) = \vec{0} \qquad\qquad \forall P, t$$

  - Ejemplo: pelota en reposo sobre una mesa

- Instantánea: la velocidad es nula en un instante de tiempo

$$\vec{v}^P(t_0) = \vec{0} \qquad\qquad \forall P$$

  - Ejemplo: pelota en movimiento de traslación vertical en el campo gravitatorio terrestre en el instante en el que está en el punto más alto

- Si tres puntos no alineados están en reposo el sólido entero lo está

Movimientos elementales: Traslación

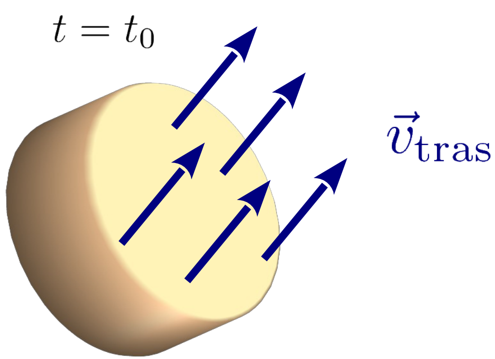
- La velocidad de todos los puntos del sólido es la misma y no nula

$$\vec{v}^P = \vec{v}_{\mathrm{tras}} \neq \vec{0} \qquad\qquad \forall P$$

- Instantánea: la velocidad de todos los puntos es la misma y no nula en un instante

$$\vec{v}^P(t_0) = \vec{v}_{\mathrm{tras}} \neq \vec{0} \qquad\qquad \forall P$$

  - Ejemplo: una bola que primero desliza y luego se pone a rodar, en el instante anterior en que la rodadura comienza

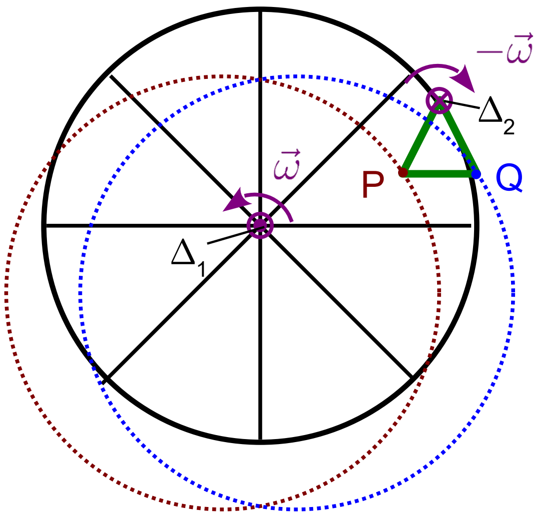


Movimientos elementales: Traslación

- Permanente: la velocidad de todos los puntos es la misma y no nula en todo instante $$\vec{v}^P(t) = \vec{v}_{\text{tras}}(t) \neq \vec{0} \qquad \forall P, t$$

  - Ejemplo: una bola que cae sin girar

- Propiedades
  - Una recta se mueve paralelamente a si misma
  - Las trayectorias de los puntos son congruentes
  - NO TIENE POR QUÉ SER EN LÍNEA RECTA

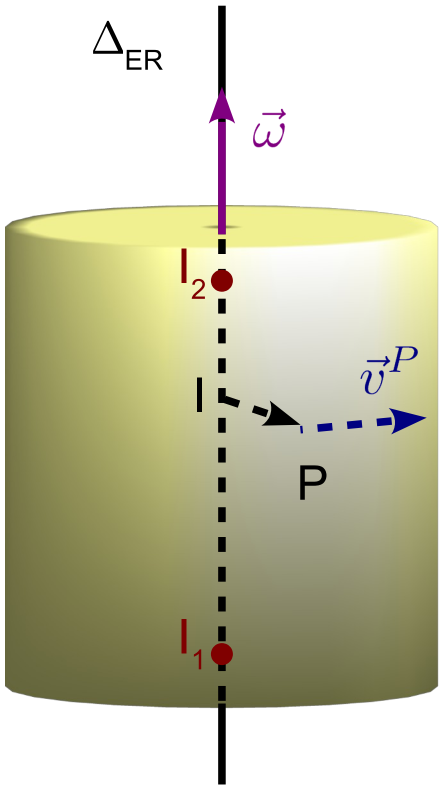


- Si la velocidad de tres puntos no alineados es la misma el movimiento es una traslación

Rotación

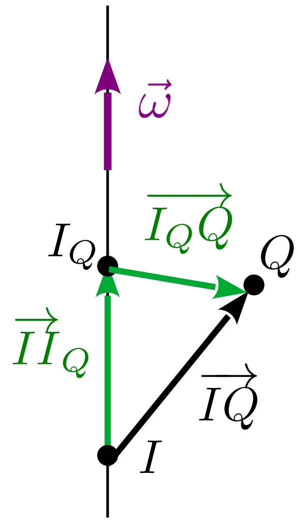
- Caracterización
  - Eje de giro Δ_{ER}
  - Vector rotación $\vec{\omega}$

$$\vec{v}^P = \vec{\omega} \times \overrightarrow{IP} \qquad\qquad I \in \Delta_{\mathrm{ER}}$$



- No es necesario que el punto I esté a la altura de P
  - El vector rotación es un vector deslizante

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} \times \overrightarrow{IQ} &= \vec{\omega} \times (\overrightarrow{II_Q} + \overrightarrow{I_QQ}) \\
&= \cancelto{0}{\vec{\omega} \times \overrightarrow{II_Q}} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{I_QQ} \\
&= \vec{\omega} \times \overrightarrow{I_QQ} \\
&= \vec{v}^Q
\end{aligned}$$



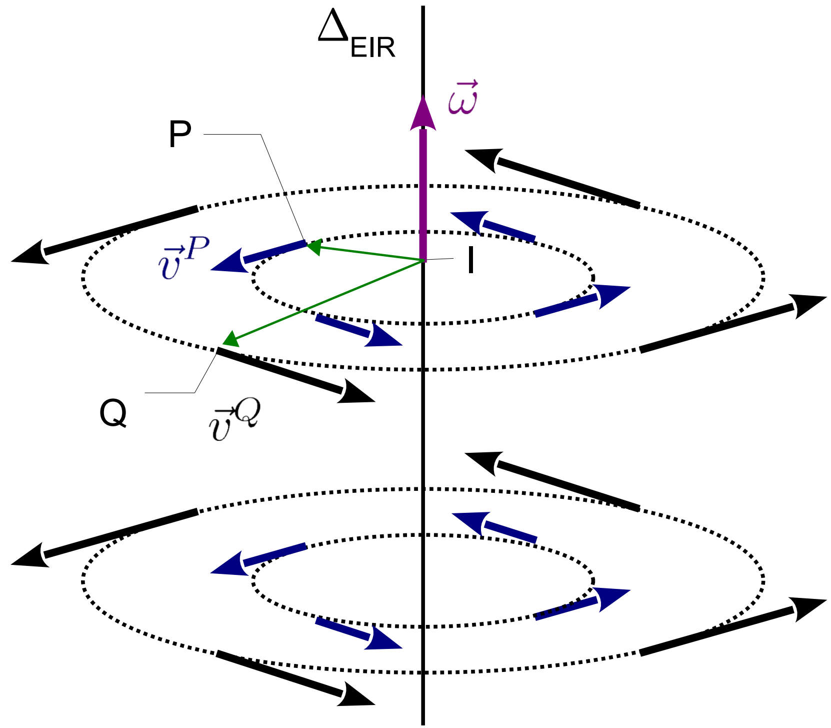
$$\overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{II_Q} + \overrightarrow{I_QQ}$$

$$\overrightarrow{II_Q} \parallel \vec{\omega}$$

Rotación: estructura instantánea del campo de velocidades

- Propiedades
  - Los puntos del eje de giro tienen velocidad nula
  - La velocidad de cada punto es perpendicular al plano formado por el eje y el punto
  - Todos los puntos a la misma distancia del eje tienen el mismo módulo de velocidad
  - La velocidad en cada punto es proporcional a su distancia al eje
  - Todos los puntos sobre una recta paralela al eje tienen el mismo vector velocidad
  - El sentido de rotación es el mismo para todos los puntos

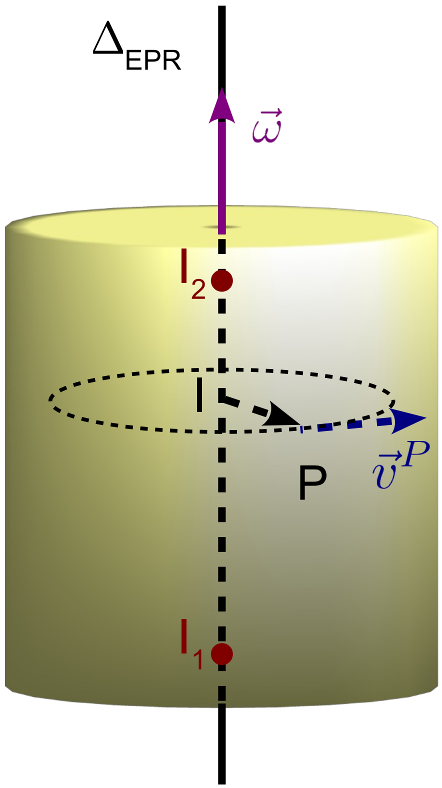
$$\vec{v}^P = \vec{\omega} \times \overrightarrow{IP}$$



- El eje de giro no cambia en el tiempo
  - Eje permanente de rotación: Δ_{EPR}
- Al menos dos puntos están siempre en reposo

$$\vec{v}^{I_1} = \vec{v}^{I_2} = \vec{0} \qquad \forall t$$

  - Estos dos puntos definen el eje
- Todos los puntos del eje tienen velocidad nula en todo instante
- Los puntos del sólido que no están sobre el eje describen arcos de circunferencia
- La dirección y la recta soporte del vector rotación no cambian en el tiempo

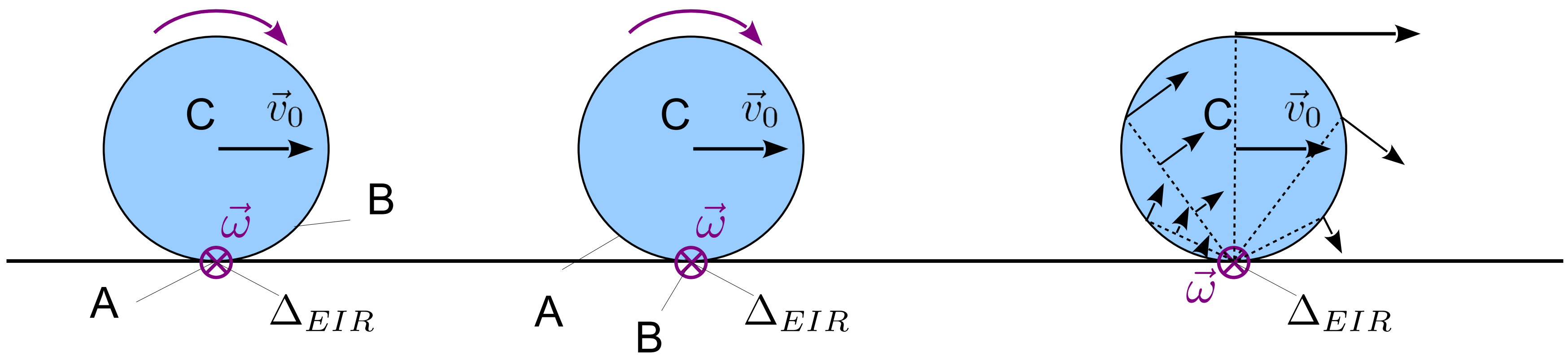


Rotación: instantánea

- El eje de giro cambia en el tiempo (la dirección del vector rotación cambia)
  - Eje instantáneo de rotación: Δ_{EIR}
- Al menos dos puntos están en reposo en un instante

$$\vec{v}^{I_1}(t_0) = \vec{v}^{I_2}(t_0) = \vec{0}$$

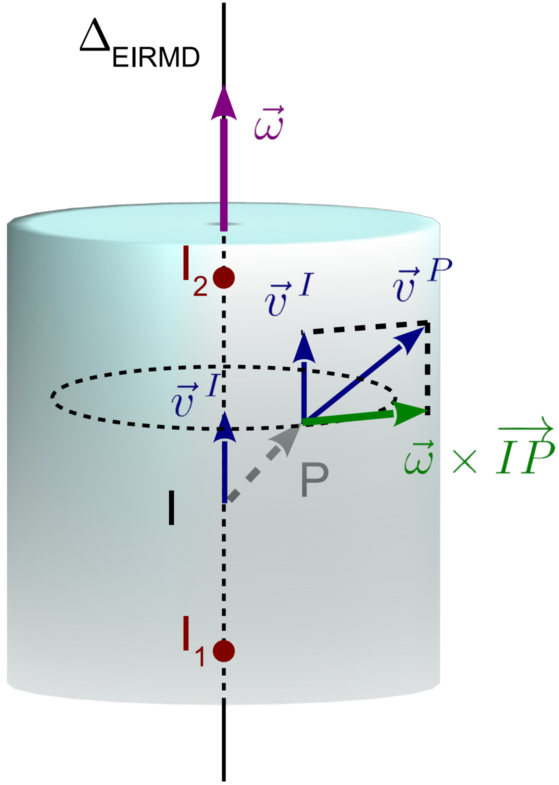
  - Estos dos puntos definen el eje
- Los puntos del sólido **no describen arcos de circunferencia**
- Ejemplo: disco que rueda sin deslizar



Helicoidal tangente

- Caracterización
  - Eje de giro
  - Vector rotación
  - Velocidad en I paralela al eje $\vec{v}^{\,I} \parallel \vec{\omega}$

$$\vec{v}^{\,P} = \vec{v}^{\,I} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{IP} \qquad\qquad I \in \Delta_{\mathrm{EIRMD}}$$



- Es una combinación de rotación y traslación paralela al eje
  - Componente de rotación $\vec{\omega} \times \overrightarrow{IP}$
  - Componente de traslación $\vec{v}^{\,I}$

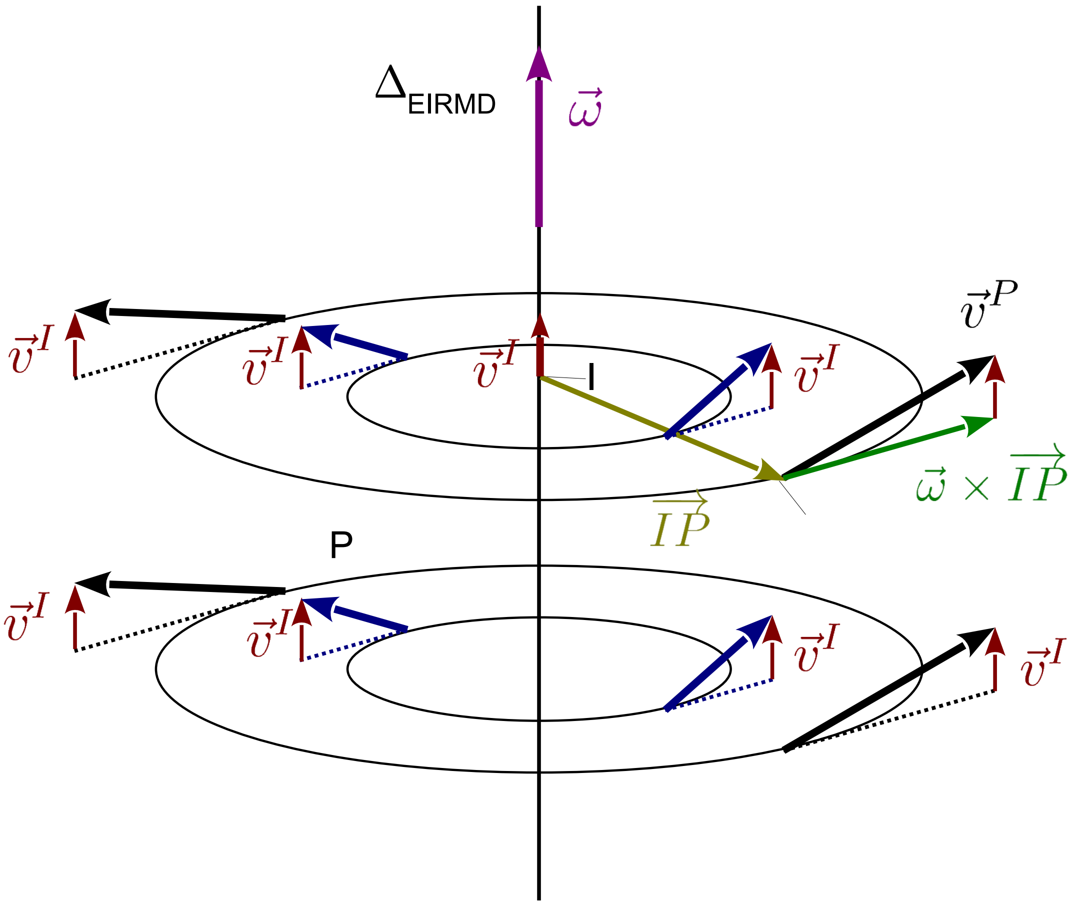
$$\vec{\omega} \times \overrightarrow{IP} \perp \vec{v}^{\,I}$$

  - Todos los puntos tienen la misma componente paralela al eje
  - El módulo de la componente de rotación es proporcional a la distancia al eje

Helicoidal: estructura instantánea del campo de velocidades

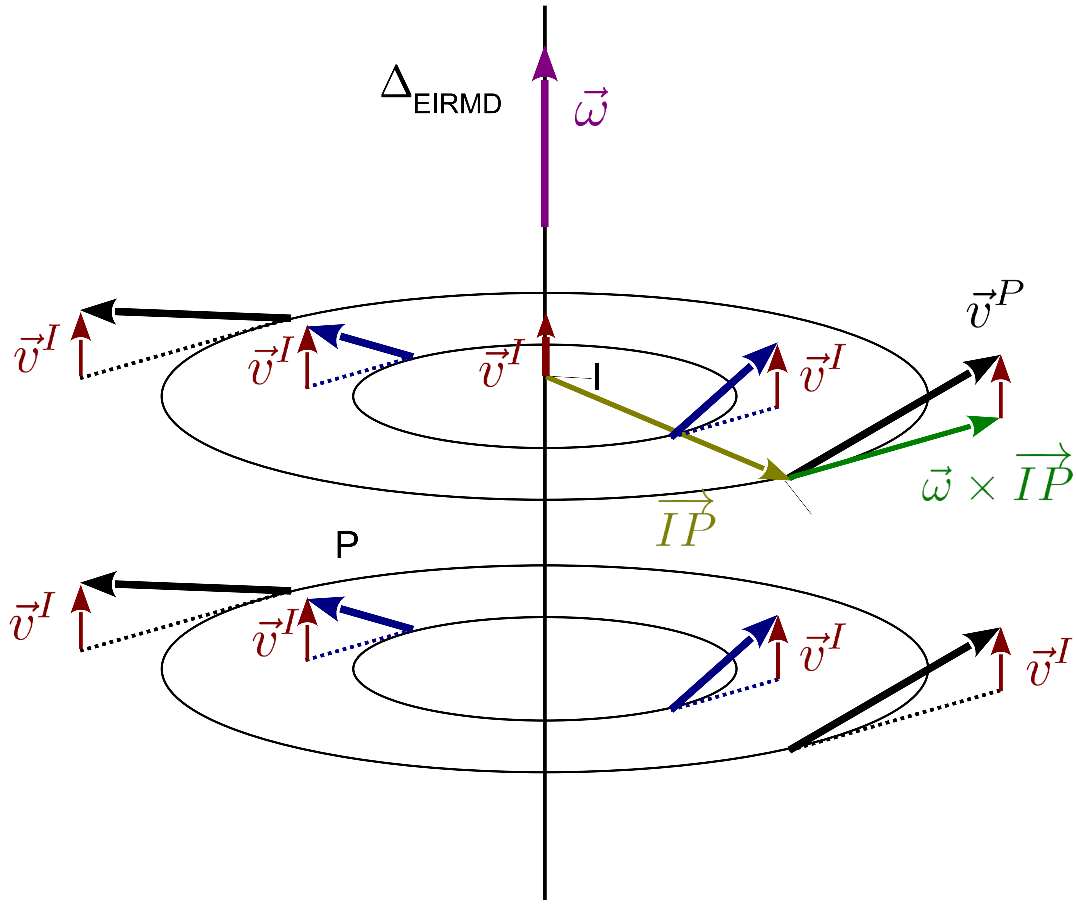
$$\vec{v}^{\,P} = \vec{v}^{\,I} + \vec{\omega} \times IP \qquad I \in \Delta_{\mathrm{EIRMD}}$$

- La velocidad en I es paralela al vector rotación
- Los puntos sobre la recta que pasa por I y es paralela a **ω** tienen la misma velocidad que el punto I
  - Eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento Δ_{EIRMD}
- Los puntos sobre una recta paralela a **ω** tienen todos la misma velocidad
- En todos los puntos, la proyección de la velocidad sobre la dirección de **ω** es la misma

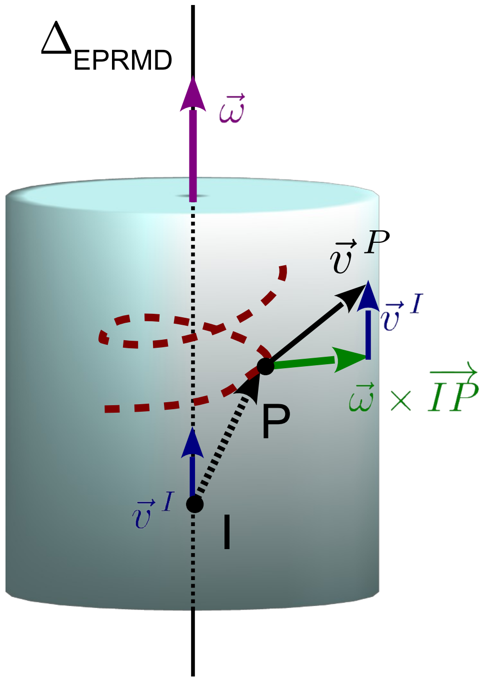


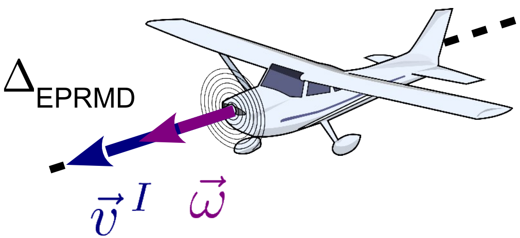
$$\vec{v}^{\,P} = \vec{v}^{\,I} + \vec{\omega} \times IP \quad I \in \Delta_{\mathrm{EIRMD}}$$

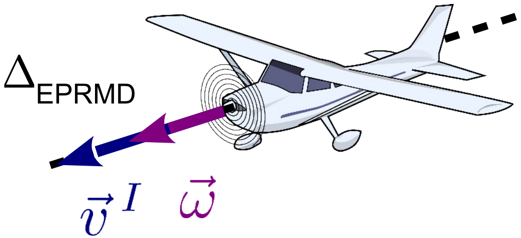
- En todos los puntos a la misma distancia del eje, la proyección de la velocidad sobre el plano perpendicular a **ω** es la misma
- Todos los puntos a la misma distancia del eje tienen el mismo módulo de la velocidad y forman el mismo ángulo con **ω**
- En cada punto el sentido de la velocidad es el mismo



- El eje de giro permanece constante
  - Eje permanente de rotación y mínimo deslizamiento Δ_{EPRMD}
- Las trayectorias de los puntos del sólido son hélices
- Ejemplos
  - Tornillo que avanza paralelamente a su eje
  - Hélice de un avión que vuela en línea recta a velocidad constante

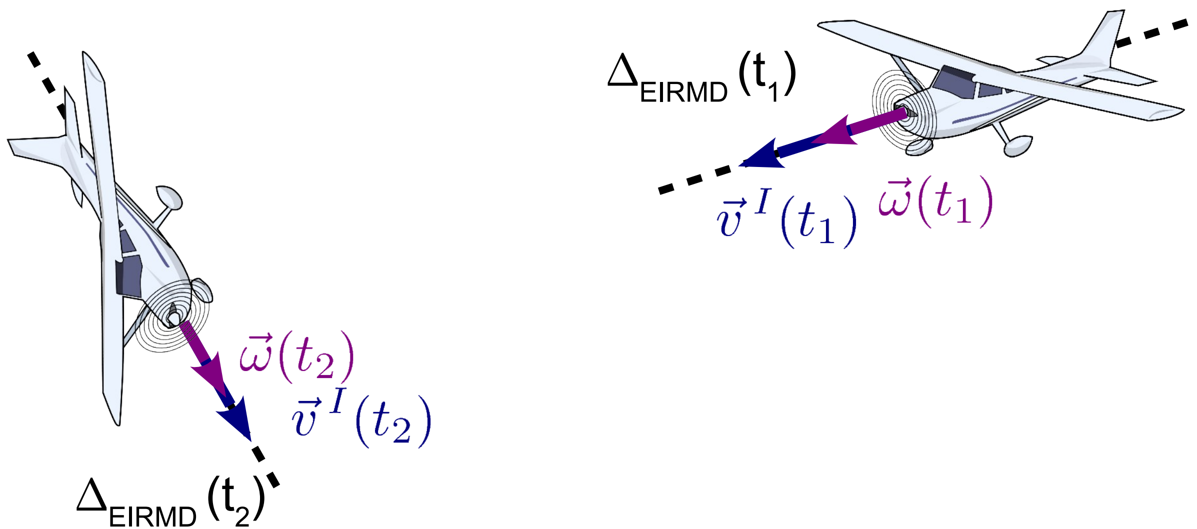






Helicoidal tangente: Instantáneo

- El eje de giro cambia en el tiempo
  - Eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento Δ_{EIRMD}
- Las trayectorias de los puntos del sólido no son hélices
- Ejemplos
  - Hélice de un avión que vuela cambiando de dirección



Tipo de movimiento	Elementos definitorios	Cálculo de velocidad
Reposo	-	-
Traslación	$\vec{v}^{\,P}$	$\vec{v}^{\,Q}=\vec{v}^{\,P} \qquad \forall Q$
Rotación	Eje, $\vec{w}$	$\vec{v}^{\,Q}=\vec{w}\times\overrightarrow{IQ} \qquad \forall Q$
Helicoidal	Eje, $\vec{w},\,\vec{v}^{\,I}$	$\vec{v}^{\,Q}=\vec{v}^{\,I}+\vec{w}\times\overrightarrow{IQ} \qquad \forall Q$

Teorema de Chasles (o ecuación del campo de velocidades)

En cada instante, el campo de velocidades de un sólido rígido en movimiento cumple

$$\boxed{\vec{v}^{\,P} = \vec{v}^{\,O} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}}$$

- **ω** es un vector rotación
- O y P son dos puntos cualesquiera del sólido
  - No es igual que la expresión del movimiento helicoidal pues **v**^{O} no tiene por qué ser paralela a **ω** ni O tiene que estar en el eje de rotación

- Teorema de Chasles ⇔ Campo vectorial equiproyectivo
  - Demostración hacia la derecha

$$\vec{v}^{\,P} \cdot \overrightarrow{OP} = (\vec{v}^{\,O} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}) \cdot \overrightarrow{OP} = \vec{v}^{\,O} \cdot \overrightarrow{OP} + \underbrace{\cancel{(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}) \cdot \overrightarrow{OP}}}_{0} = \vec{v}^{\,O} \cdot \overrightarrow{OP}$$

$$\boxed{\vec{v}^{\,P} = \vec{v}^{\,O} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}}$$

- Dada la velocidad en un punto del sólido y el vector rotación se puede calcular la velocidad en cualquier punto del sólido
  - Reducción cinemática en un punto $\boxed{R(O) = \{\vec{v}^{\,O}, \vec{\omega}\}}$
    - 6 números determinan el movimiento del sólido, correspondiendo a los 6 grados de libertad
- El campo de velocidades queda determinado si
  - Se da la reducción cinemática en un punto
  - Se dan las velocidades en tres puntos no alineados del sólido

Propiedades del campo de velocidades

- Invariantes cinemáticos
  - Son magnitudes que valen lo mismo en todos los puntos de un sólido en movimiento
  - Alternativamente, son magnitudes que no varían cuando se cambia el centro de reducción
- Vamos a ver dos invariantes
  - 1er invariante: el vector rotación (invariante vectorial)
  - 2º invariante: la proyección de la velocidad en cada punto sobre la dirección del vector rotación (invariante escalar)

- Cambio del centro de reducción

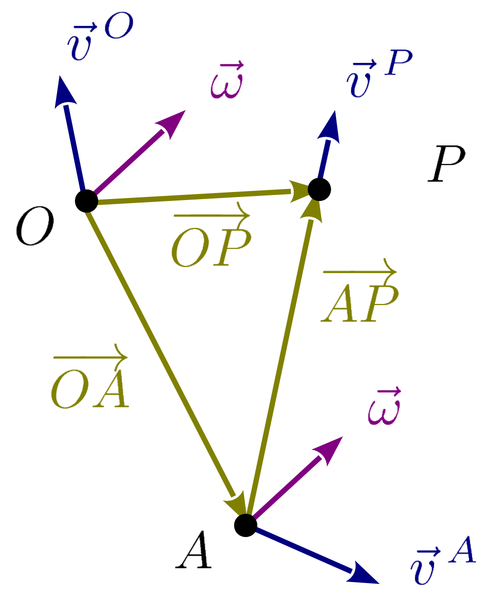
$$\vec{v}^{\,P} = \vec{v}^{\,O} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{v}^{\,P} = \vec{v}^{\,O} + \vec{\omega} \times (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP})$$

$$\vec{v}^{\,P} = \vec{v}^{\,O} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OA} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{v}^{\,P} = \vec{v}^{\,A} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}$$



- El vector **ω** puede moverse libremente por todo el sólido para aplicar el Teorema de Chasles
  - El vector rotación es un vector libre (en lo que respecta al Teorema de Chasles)

Invariante escalar

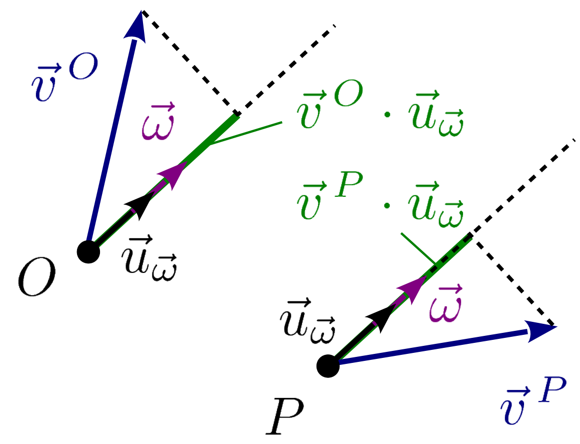
- Proyección de la velocidad en un punto sobre la dirección de **ω**

$$\vec{v}^{\,P}\cdot\vec{u}_{\vec{\omega}}=\vec{v}^{\,P}\cdot\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$$

$$\vec{v}^{\,P}\cdot\vec{u}_{\vec{\omega}}=(\vec{v}^{\,O}+\vec{\omega}\times\overrightarrow{OP})\cdot\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$$

$$\vec{v}^{\,P}\cdot\vec{u}_{\vec{\omega}}=\vec{v}^{\,O}\cdot\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}+\overset{0}{(\vec{\omega}\times\overrightarrow{OP})\cdot\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}}$$

$$\vec{v}^{\,P}\cdot\vec{u}_{\vec{\omega}}=\vec{v}^{\,O}\cdot\vec{u}_{\vec{\omega}}$$

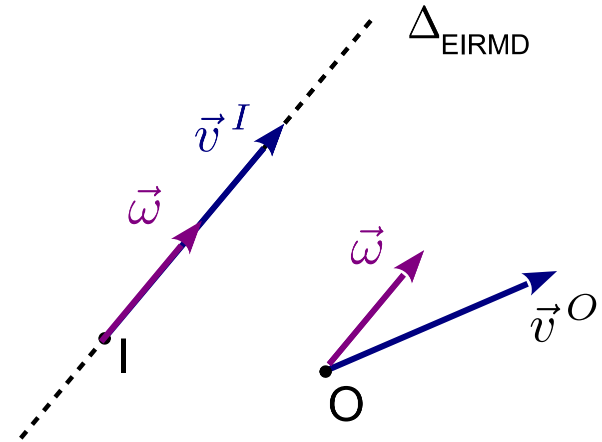


- Representa la componente de la velocidad en cada punto paralela a **ω**

Eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento

- En general

$$\vec{v}^{\,P} = \vec{v}^{\,O} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}$$



- ¿Hay algún punto I para el que la velocidad es paralela al vector rotación?

- Si ese punto I existe entonces se cumple

$$\vec{\omega} \times \vec{v}^{\,I} = \vec{0}$$

- Si ese punto I existe entonces para todos los puntos que estén sobre una recta paralela a **ω** que pase por I, la velocidad en esos puntos es paralela a **ω**

El eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento es la recta paralela a **ω** donde la velocidad en sus puntos es paralela al vector rotación

- Dado un punto O, con velocidad **v**^{O} y el vector rotación **ω**, ¿dónde está el punto I en el que **v**^{O} es paralelo a **ω**?

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}^{\,I} = \vec{v}^{\,O} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OI} \\ \vec{v}^{\,I} \times \vec{\omega} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\omega} \times \left[\vec{v}^{\,O} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OI}\right] = 0 \quad = \vec{\omega} \times \vec{v}^{\,O} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OI})$$

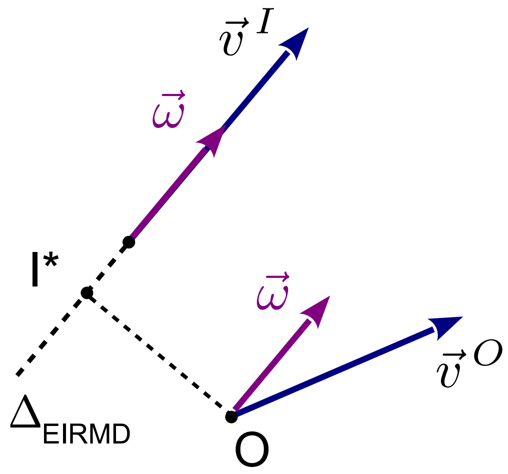
$$= \vec{\omega} \times \vec{v}^{\,O} + \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{OI}) - \overrightarrow{OI}|\vec{\omega}|^2$$

- Seleccionamos el punto I* tal que $\overrightarrow{OI^*} \cdot \vec{\omega} = 0$

$$\overrightarrow{OI^*} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}^{\,O}}{|\vec{\omega}|^2}$$

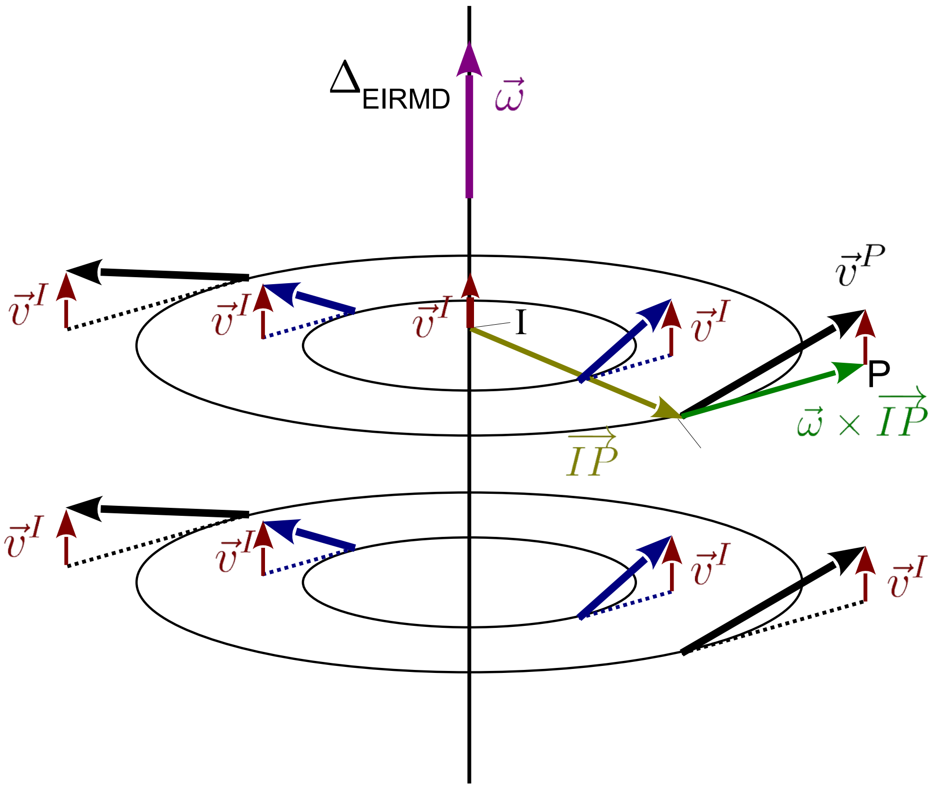
- Ecuación vectorial del eje instantáneo

$$\Delta_{\mathrm{EIRMD}} \ : \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OI^*} + \lambda\vec{\omega} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}^{\,O}}{|\vec{\omega}|^2} + \lambda\vec{\omega}$$



Si **ω**=0 el eje no existe

$$\vec{v}^{\,P} = \vec{v}^{\,I} + \vec{\omega}\times\overrightarrow{IP} \qquad I\in\Delta_{\text{EIRMD}}$$



Las velocidades ”dan vueltas” alrededor del eje instantáneo, pero con una componente paralela al eje

Equivale a una instantánea de un movimiento helicoidal

En un movimiento en general, el eje va cambiando con el tiempo

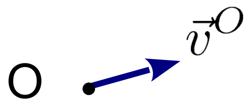
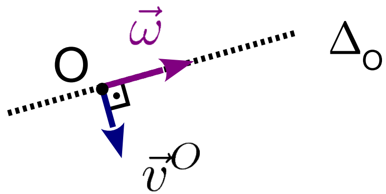
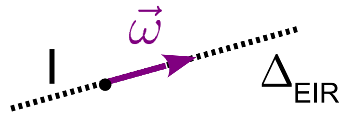
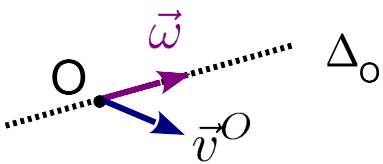
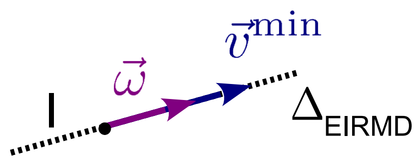
La velocidad de los puntos en el eje central es el invariante escalar, y es la velocidad de módulo más pequeño

$$v^I = \vec{v}^{\,I}\cdot\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \vec{v}^{\,P}\cdot\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = v^{\min}$$

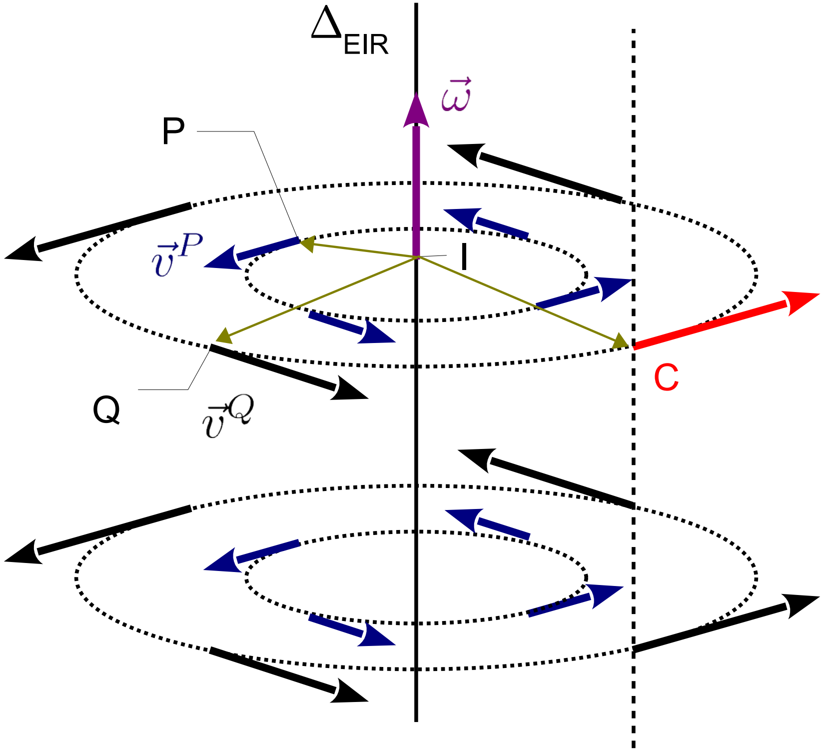
$$\vec{v}^{\,\min} = \vec{v}^{\,I} = v^I\,\vec{u}_{\vec{\omega}} = v^I\,\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$$

Clasificación de movimientos instantáneos

- La reducción canónica es la reducción cinemática en un punto del eje instantáneo

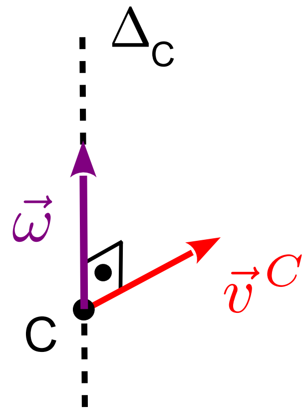
$\vec{\omega}$	$v^{\min}$	Reducción en un punto	Reducción canónica	Movimiento instantáneo
$=\vec{0}$	$=0$	Sistema nulo		Reposo instantáneo
$=\vec{0}$	$\neq 0$			Traslación instantánea
$\neq\vec{0}$	$=0$			Rotación instantánea
$\neq\vec{0}$	$\neq 0$			Movimiento helicoidal tangente

- Rotación pura

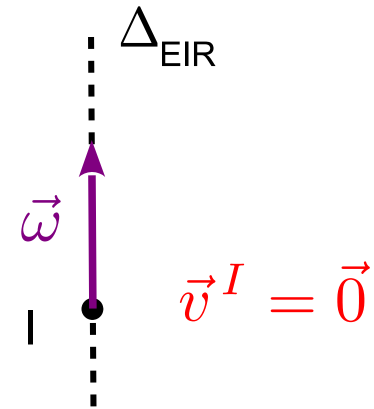


Reducción en C

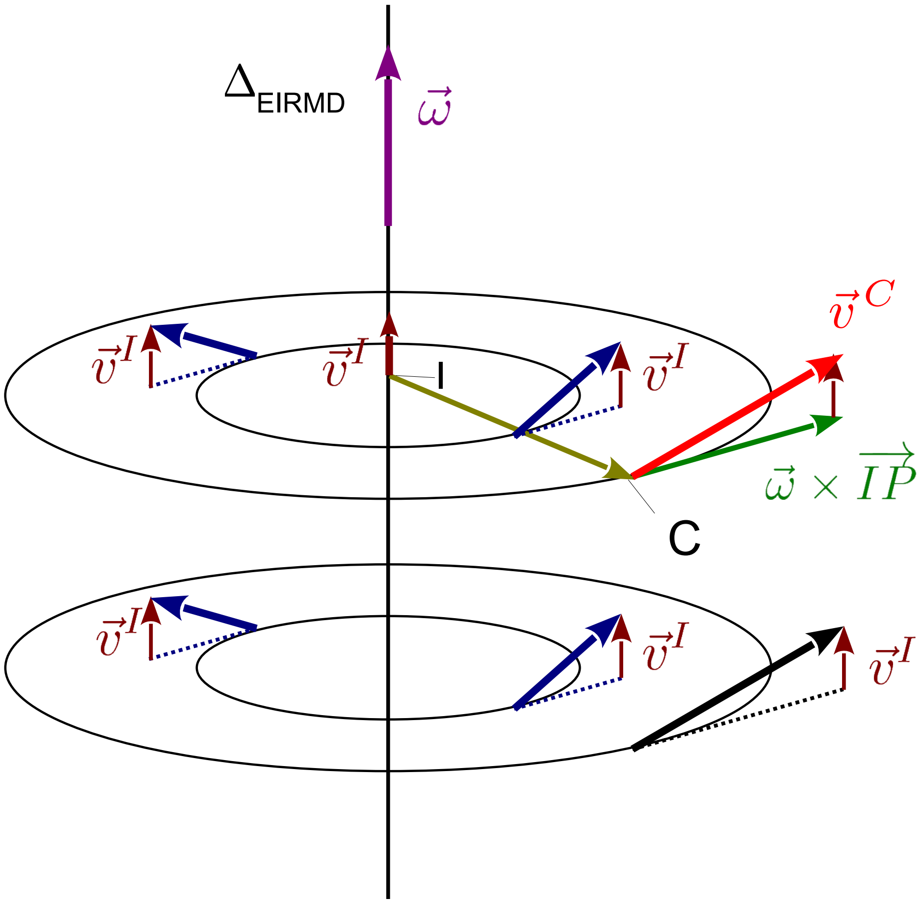
$$\vec{\omega}\cdot\vec{v}^{\,C}=0$$



Reducción canónica

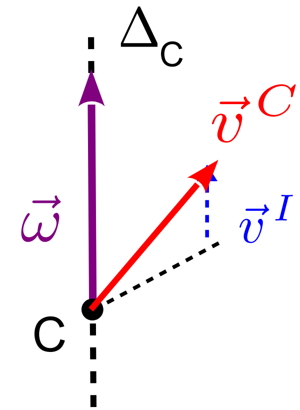


- Helicoidal tangente

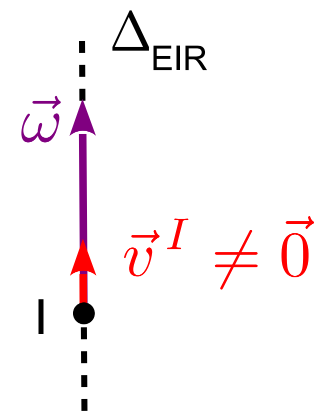


Reducción en C

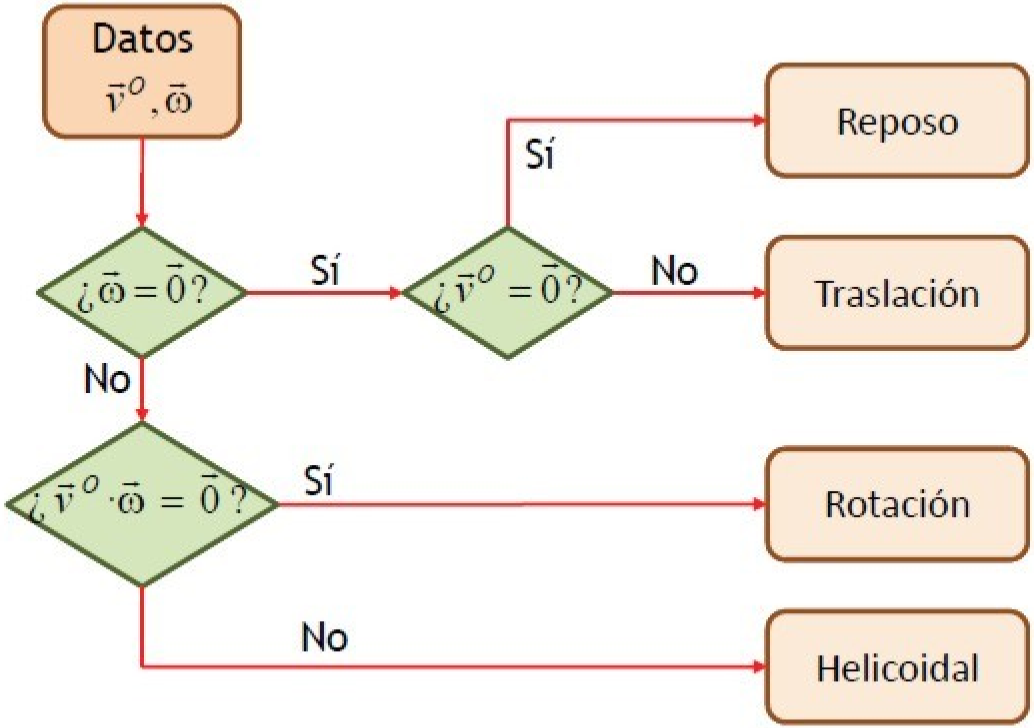
$$\vec{\omega}\cdot\vec{v}^{\,C}\neq 0$$



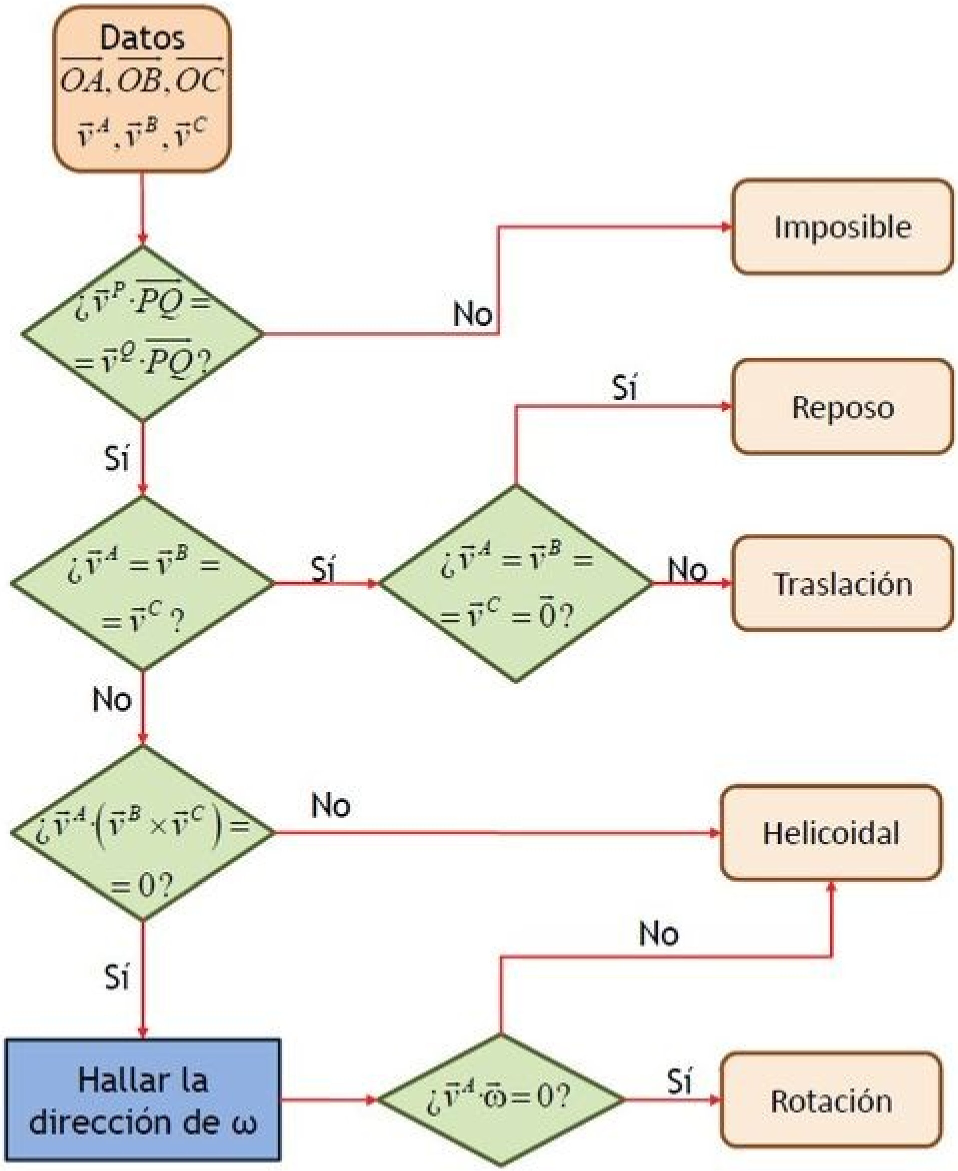
Reducción canónica



- Datos: reducción cinemática en un punto



- Datos: velocidad en tres puntos no alineados



Campo de aceleraciones

- Ecuación del campo de velocidades

$$\vec{v}^{\,P} = \vec{v}^{\,Q} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{QP}$$

- Derivamos respecto al tiempo

$$\dot{\vec{v}}^{\,P} = \dot{\vec{v}}^{\,Q} + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{r}^{\,P} - \vec{r}^{\,Q}) + \vec{\omega} \times (\vec{r}^{\,P} \dot{-} \vec{r}^{\,Q})$$

$$\vec{a}^{\,P} = \vec{a}^{\,Q} + \vec{\alpha} \times (\vec{r}^{\,P} - \vec{r}^{\,Q}) + \vec{\omega} \times (\vec{v}^{\,P} - \vec{v}^{\,Q})$$

$$\boxed{\vec{a}^{\,P} = \vec{a}^{\,Q} + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{QP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{QP})}$$

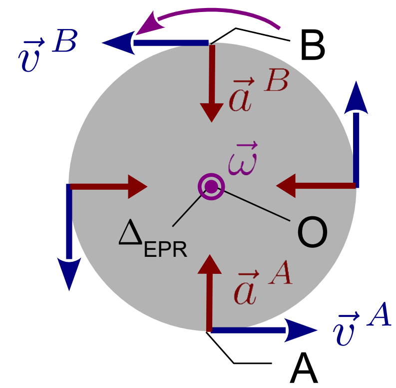
El campo de aceleraciones no es equiproyectivo

- Desarrollando el doble producto vectorial

$$\vec{a}^{\,P} = \vec{a}^{\,Q} + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{QP} + (\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{QP})\,\vec{\omega} - |\vec{\omega}|^2 \overrightarrow{QP}$$

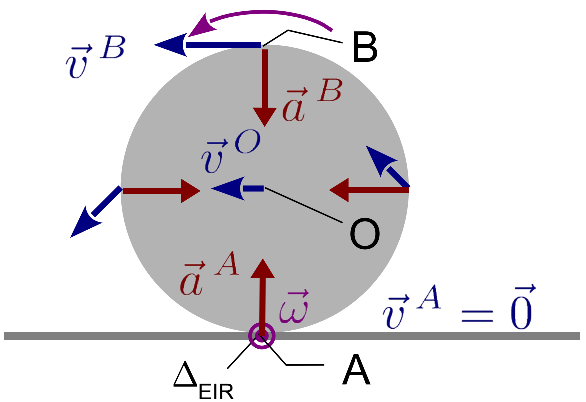
Rueda girando alrededor de su eje: $\vec{\alpha} = \vec{0}, \vec{a}^{\,O} = \vec{0}$

$$\vec{a}^{\,P} = -|\vec{\omega}_R|^2 \overrightarrow{OP}$$



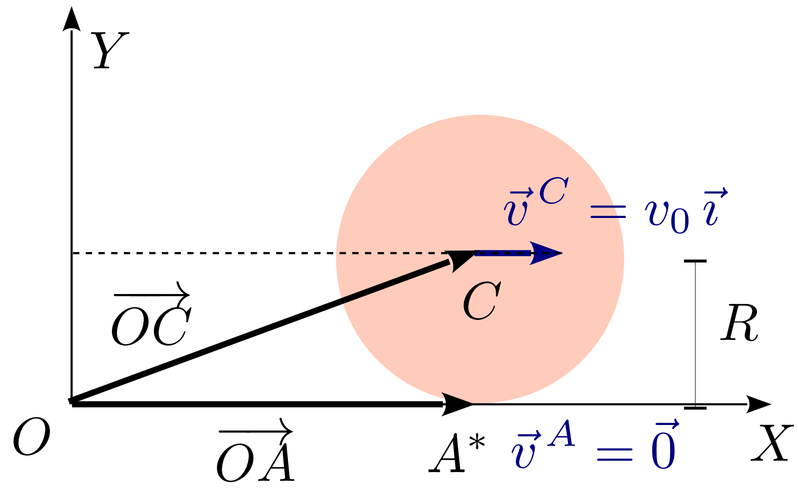
Rueda rodando sobre un plano: $\vec{\alpha} = \vec{0}, \vec{a}^{\,O} = \vec{0}$

$$\vec{a}^{\,P} = -|\vec{\omega}_R|^2 \overrightarrow{OP}$$



- El disco rueda sin deslizar y su centro se mueve con velocidad constante v_0

$$\overrightarrow{OC} = v_0 t\,\vec{\imath} + R\,\vec{\jmath}$$
$$\overrightarrow{OA}^* = v_0 t\,\vec{\imath}$$



- Al derivarlas respecto del tiempo, una de esas expresiones da la velocidad correcta, pero la otra no

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OC}}{\mathrm{d}t} = v_0\,\vec{\imath} = \vec{v}^{\,C}$$
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OA}^*}{\mathrm{d}t} = v_0\,\vec{\imath} \neq \vec{v}^{\,A}$$

La diferencia es que el vector **OC** sigue siempre el mismo punto del disco, mientras que el **OA** apunta a puntos diferentes del disco en cada instante