

Tema 2: Movimiento unidimensional

FÍSICA I, 1º Grado en Ingeniería Electrónica, Robótica y
Mecatrónica

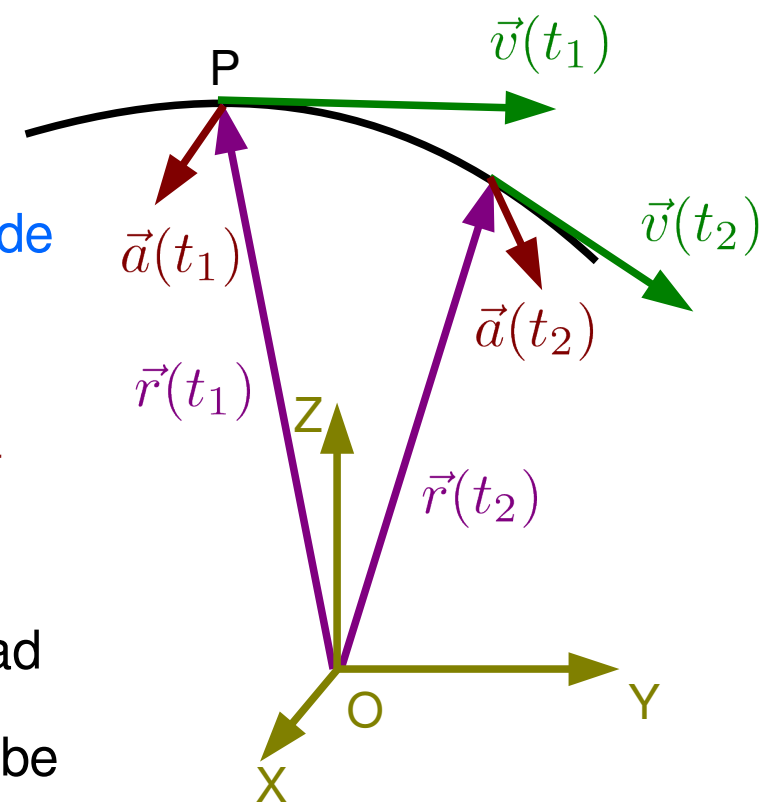
Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

- **Introducción**
- Vector de posición
- Velocidad y aceleración
- Problemas con velocidad y aceleración dadas
- Distancia y desplazamiento
- Movimiento uniforme y uniformemente acelerado

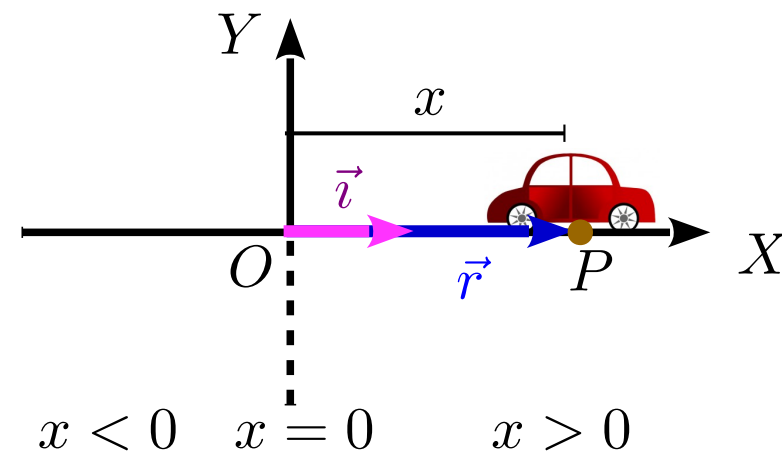
- **Punto material:** la partícula es un punto sin dimensiones
- El movimiento se describe utilizando un **sistema de coordenadas** definido respecto a un **sistema de referencia**
- La posición en cada instante viene dada por el **vector de posición** $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$
 - El punto describe una curva en el espacio, la trayectoria
- La **velocidad** $\vec{v}$ da la tasa de variación de la posición
- La **aceleración** $\vec{a}$ da la tasa de variación de la velocidad
- El **tiempo** es el parámetro en función del que se describe el movimiento



- Introducción
- **Vector de posición**
- Velocidad y aceleración
- Problemas con velocidad y aceleración dadas
- Distancia y desplazamiento
- Movimiento uniforme y uniformemente acelerado

- El movimiento se produce a lo largo de una recta
- La posición en la recta se expresa usando el **vector de posición**

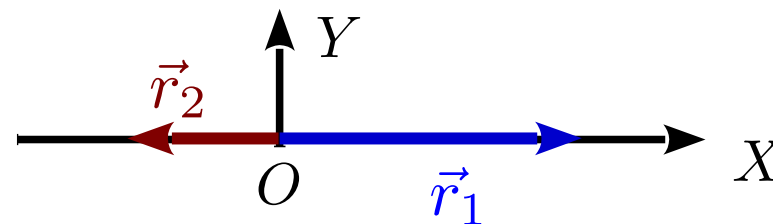
$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x \vec{i}$$



- La posición del punto P se expresa respecto al **origen de coordenadas O**
- La coordenada **x** da la posición en el eje
 - Puede ser negativa o positiva
- El vector unitario $\vec{i}$ da la dirección de la recta y el sentido positivo
- En general, un vector tiene módulo, dirección y sentido
 - Los vectores **NO TIENEN SIGNO**, lo que tiene signo son las componentes del vector

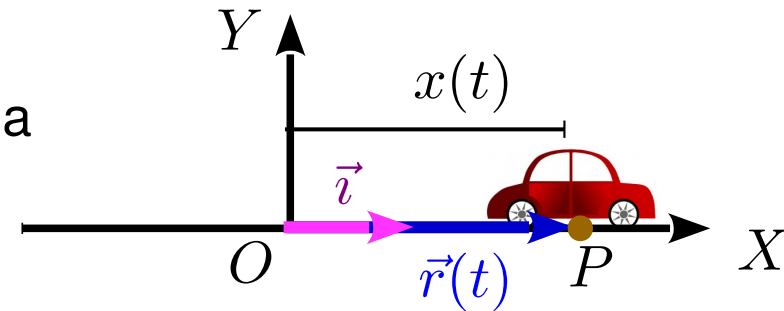
$$\vec{r}_1 = 20 \vec{i}(\text{m})$$

$$\vec{r}_2 = -10 \vec{i}(\text{m})$$

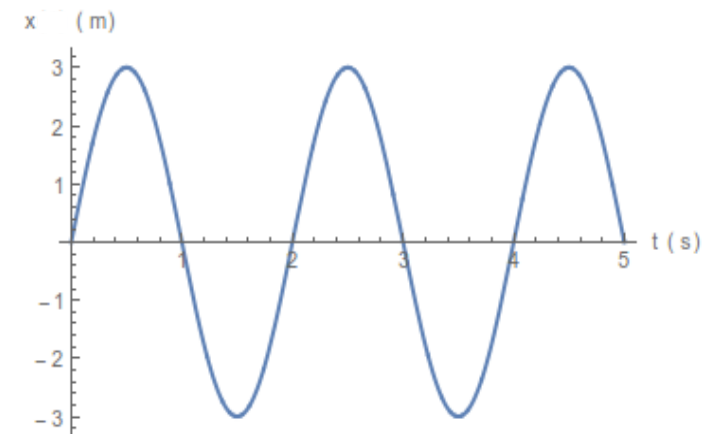
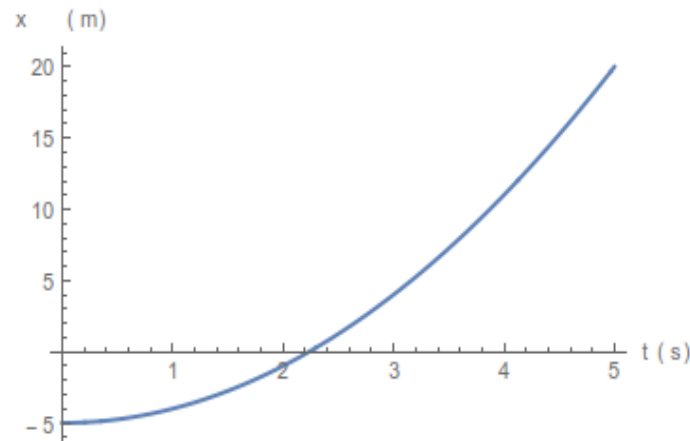
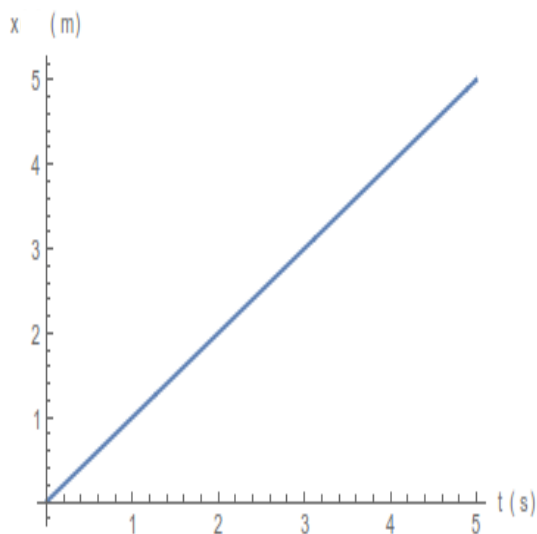


- Cuando hay movimiento, el valor de la coordenada cambia con el tiempo: el vector de posición es una **función del tiempo**

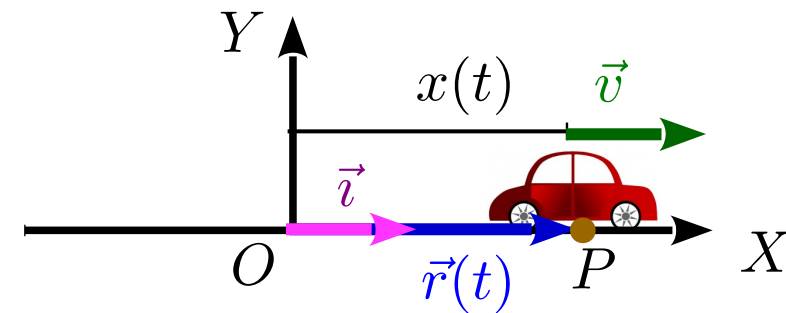
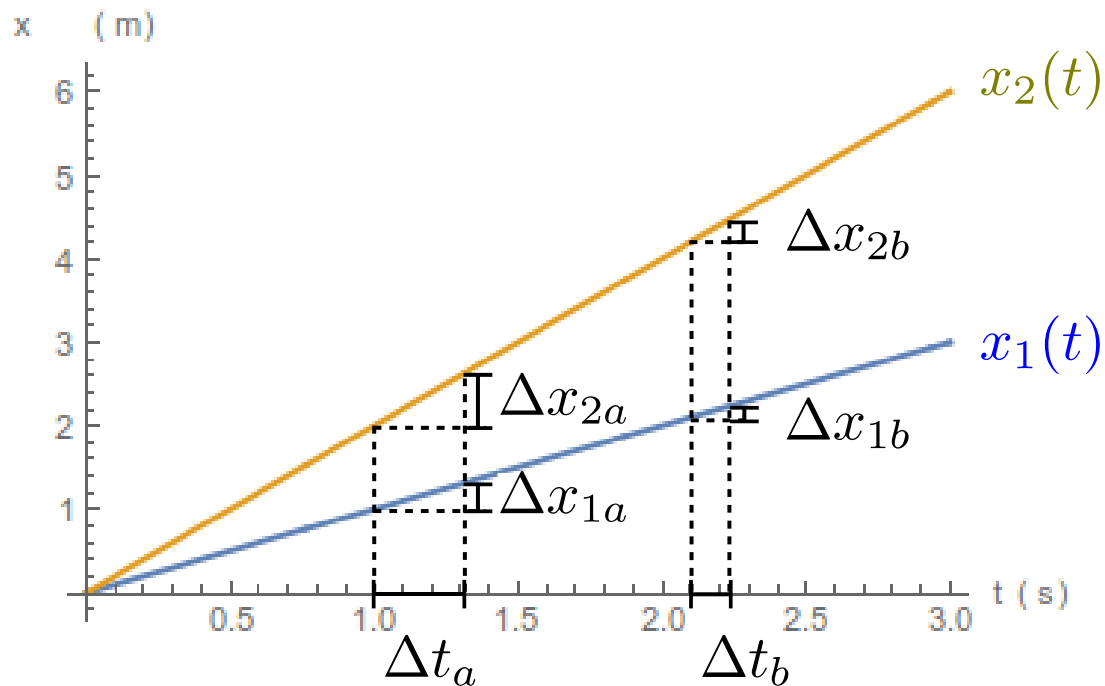
$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t) = x(t) \vec{i}$$



■ Ejemplos



- Introducción
- Vector de posición
- **Velocidad y aceleración**
- Problemas con velocidad y aceleración dadas
- Distancia y desplazamiento
- Movimiento uniforme y uniformemente acelerado



$$v_1 = \frac{\Delta x_{1a}}{\Delta t_a} = \frac{\Delta x_{1b}}{\Delta t_b} \quad v_2 > v_1$$

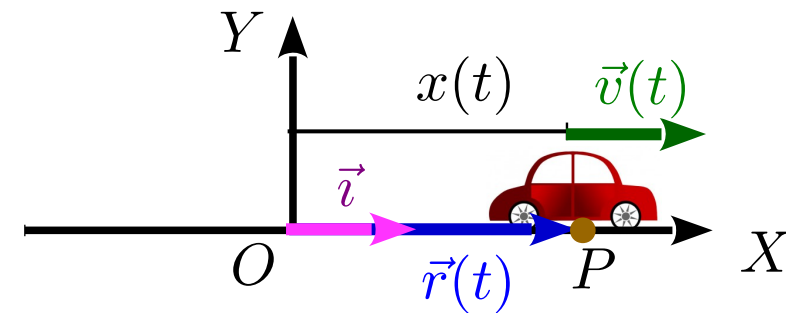
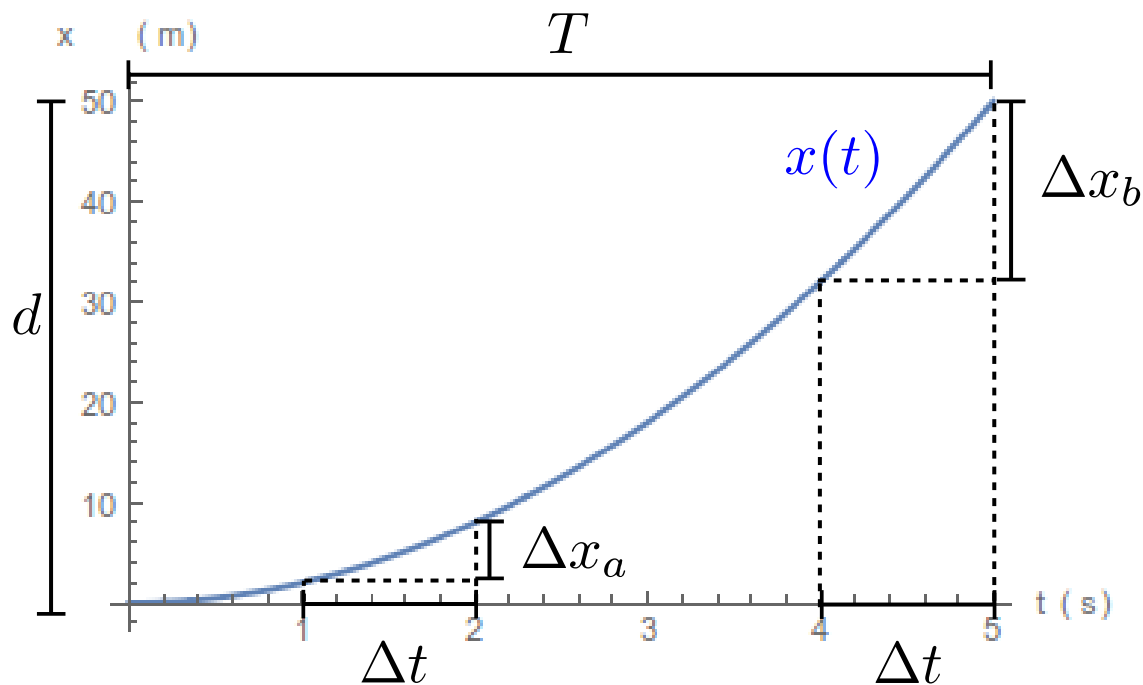
$$v_2 = \frac{\Delta x_{2a}}{\Delta t_a} = \frac{\Delta x_{2b}}{\Delta t_b}$$

- La gráfica representa dos mov. rectilíneos uniformes (m.r.u.)

- Velocidad en el m.r.u. $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{d}{T}$

- Es la pendiente de la recta $x(t)$
- En el S.I. se mide en m/s

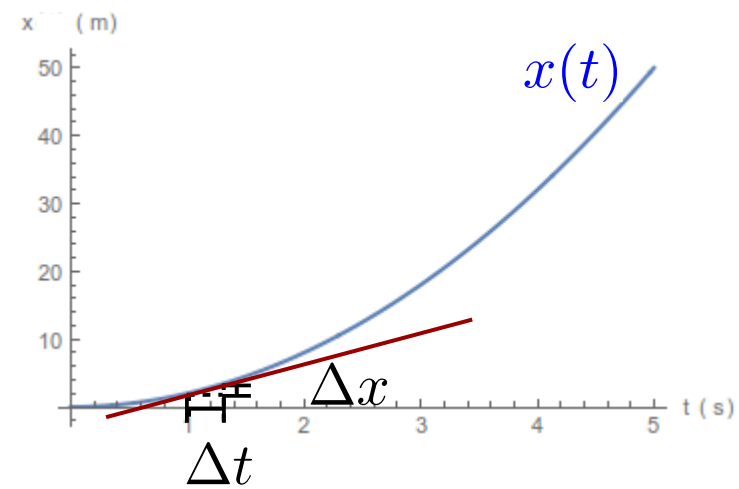
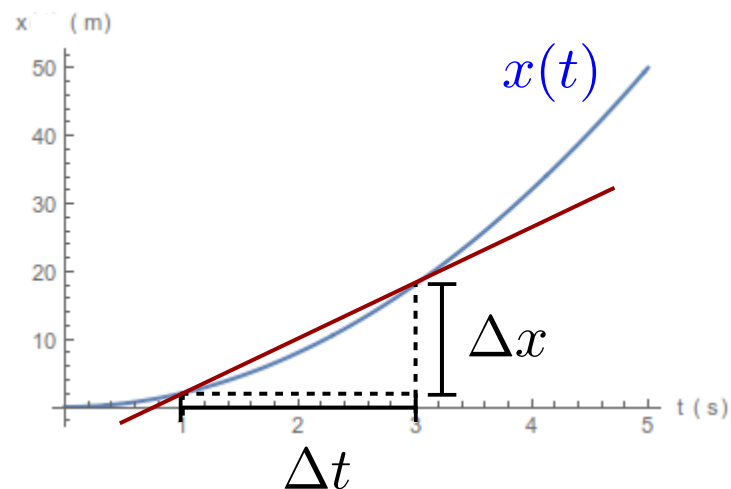
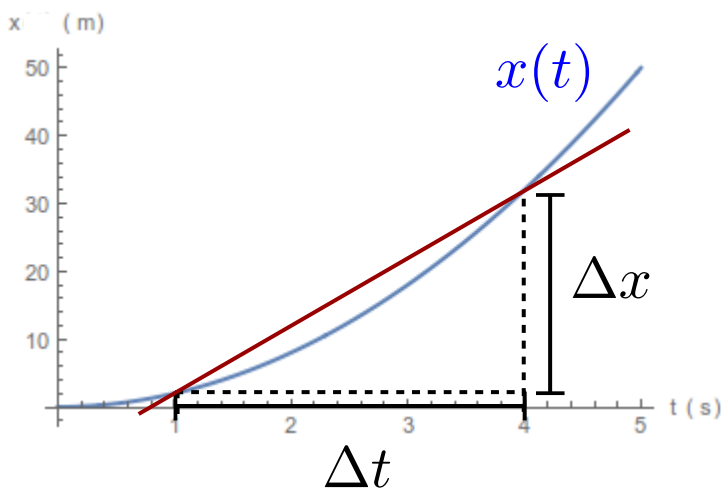
- Vector velocidad $\vec{v} = v \vec{i}$



$$\frac{\Delta x_b}{\Delta t} \geq \frac{\Delta x_a}{\Delta t} \Rightarrow v \neq \text{cte}$$

- La gráfica representa un movimiento **no uniforme**
- Velocidad media $v_m = d/T$
 - No describe el movimiento con precisión
 - Necesitamos una magnitud que describa el cambio de velocidad en cada instante de tiempo
 - Esto se puede conseguir haciendo Δt muy pequeño

Velocidad instantánea

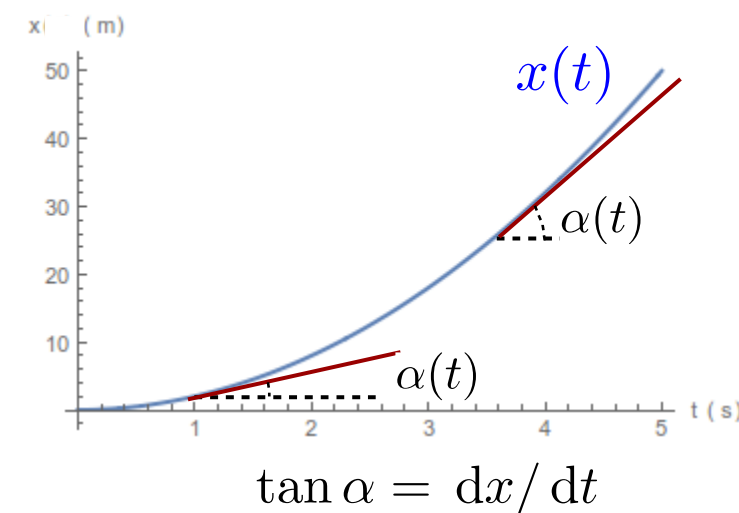


Velocidad instantánea

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = x'(t)$$

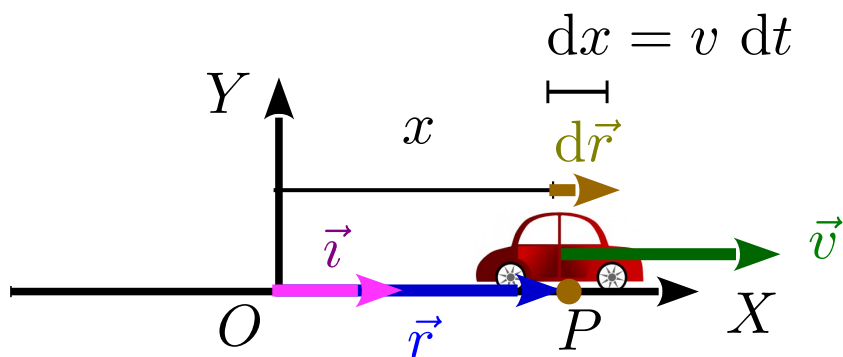
- Es la tasa de **variación** de $x(t)$ en cada instante
 - Es también la **pendiente** de la **tangente** a $x(t)$
- No hay que confundir **diferencial** con **derivada**

$$dx = x'(t) dt = \left(\frac{dx}{dt} \right) dt$$



- En Física, un diferencial de una magnitud es una cantidad **muy pequeña** de esa magnitud

- dx es el desplazamiento de la partícula durante dt



- El vector desplazamiento durante dt es un vector diferencial, es decir, de módulo muy pequeño

$$d\vec{r} = dx \vec{i} = v dt \vec{i}$$

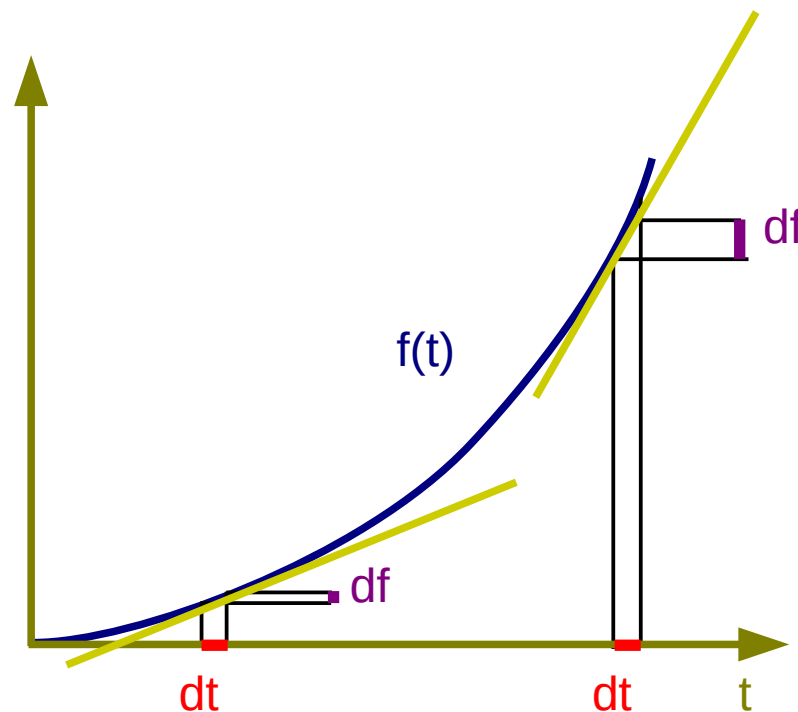
■ Ejemplo $f(t) = \frac{1}{2}t^2$

- Derivada de la función

$$f'(t) = \left(\frac{df}{dt} \right) = t$$

- Diferencial de la función

$$df = f'(t) dt = \left(\frac{df}{dt} \right) dt = t dt$$



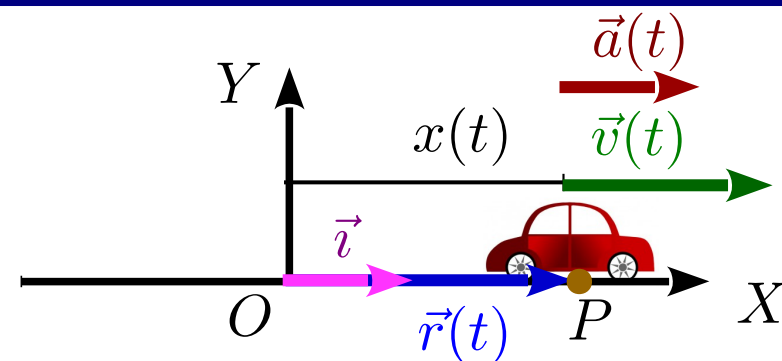
- Un dx produce df distintos según en que punto de la curva nos encontremos

$$t = 0.1 \rightarrow df = 0.1 dt \quad \left(\frac{df}{dt} \right)_{t=0.1} = 0.1 \quad (dt = 0.01 \rightarrow df = 0.001)$$

$$t = 2 \rightarrow df = 2 dt \quad \left(\frac{df}{dt} \right)_{t=2} = 2 \quad (dt = 0.01 \rightarrow df = 0.02)$$

Aceleración instantánea

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'(t) \quad \vec{a}(t) = a(t) \vec{i}$$



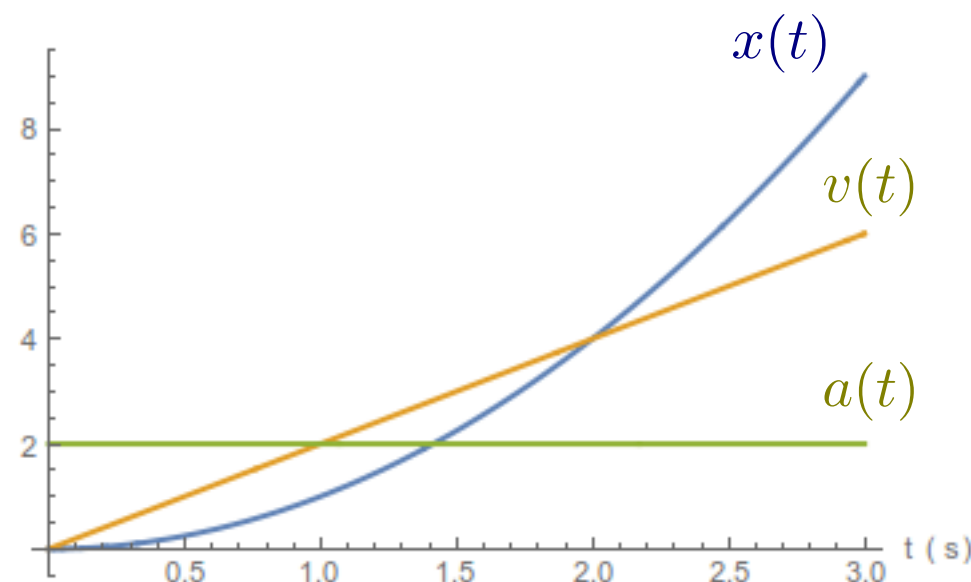
- Es la tasa de **variación** de $v(t)$ en cada instante

- Está relacionada con la concavidad de $x(t)$

- Se mide en m/s^2 (SI)

- Relación con $x(t)$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$



- Notación en Mecánica para la derivada respecto al tiempo

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

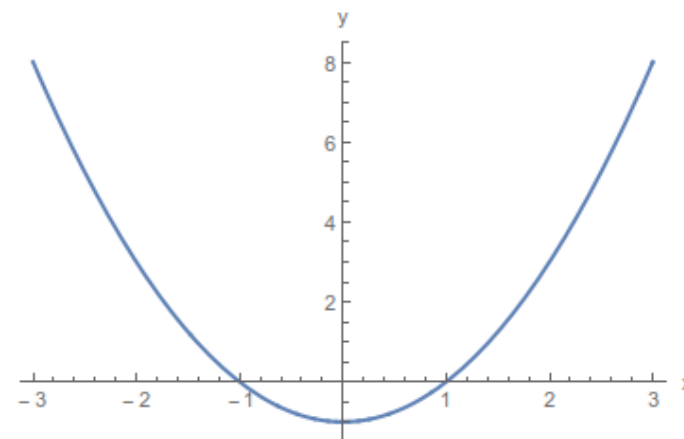
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{x}$$

- Introducción
- Vector de posición
- Velocidad y aceleración
- Problemas con velocidad y aceleración dadas
- Distancia y desplazamiento
- Movimiento uniforme y uniformemente acelerado

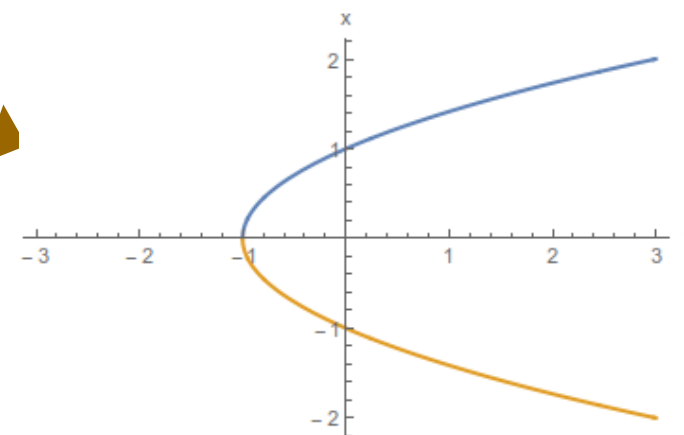
- Ecuación **escalar**: la incógnita es un número

$$x + 2 = 0 \implies x = -2$$

- Ecuación **funcional algebraica**: la incógnita es una función



$$y - x^2 + 1 = 0 \implies \begin{cases} y(x) = x^2 - 1 \\ x(y) = \pm\sqrt{1 + y} \end{cases}$$



- La incógnita es una **función** y la ecuación contiene **derivadas** de la función

- Ecuación diferencial de primer orden $x' - 2t = 0$

- La solución es una función $x(t)$ cuya derivada sea $2t$

$$x = t^2$$

$$x = t^2 + 1$$

$$x = t^2 - 1$$

$$x = t^2 + \sqrt{234}$$

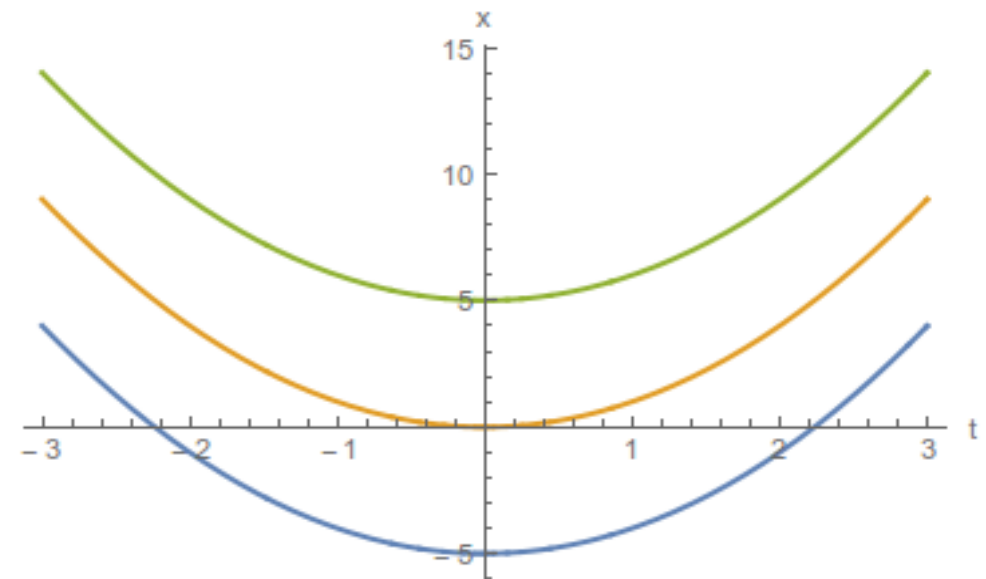
$$x = t^2 + \ln(\operatorname{sen}(\sqrt{119}))$$



$$x = t^2 + C$$

- La solución está indeterminada por una constante arbitraria

- Ocurre siempre en las ecuaciones diferenciales de primer orden



Notación de Leibniz

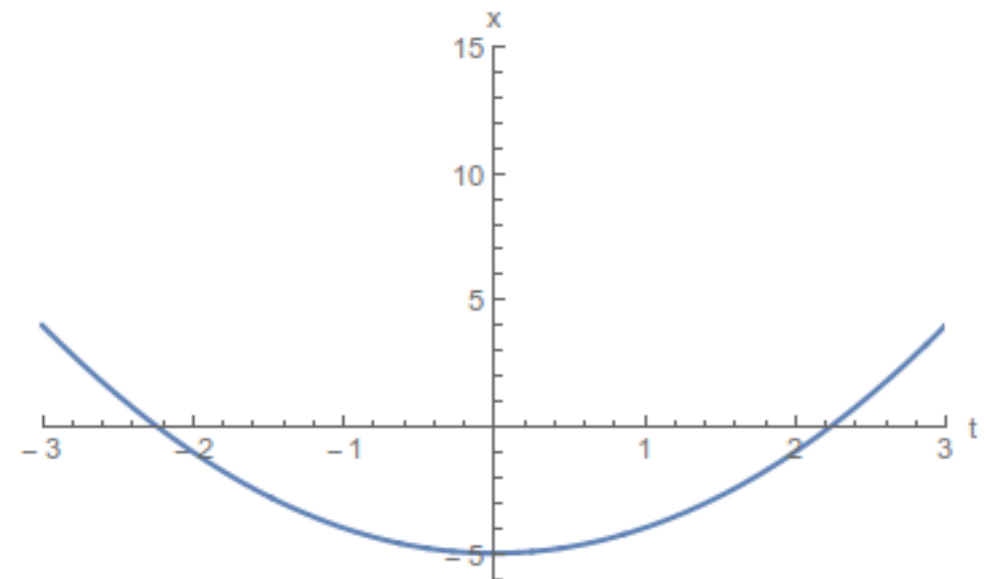
$$\frac{dx}{dt} - 2t = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 2t \quad \longrightarrow \quad dx = 2t \, dt$$

- Cuando se puede separar de modo que la incógnita y la variable no aparezcan mezcladas se dice que es de **variables separables**

$$\int dx = \int 2t \, dt \quad \longrightarrow \quad x = t^2 + C$$

- Se necesita una **condición inicial** para elegir una de las soluciones

$$x(0) = -5 \quad \longrightarrow \quad x = t^2 - 5$$



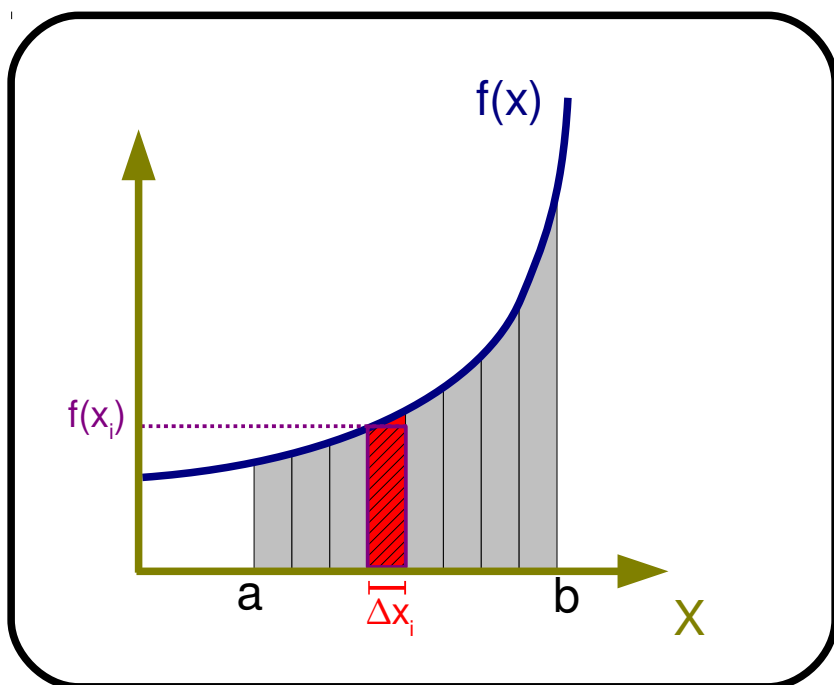
- El dato es $v(t)$ y $x(t_0)=x_0$ y hay que encontrar $x(t)$

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \quad \longrightarrow \quad dx = v(t) dt \quad \longrightarrow \quad \int dx = \int v(t) dt \quad \longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} x(t) &= \int v(t) dt + C \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}}$$

- Otra forma de escribirlo es usando la [regla de Barrow](#), poniendo la condición inicial en los límites de las integrales

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^t v(t) dt \quad \longrightarrow \quad \boxed{x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(t) dt}$$

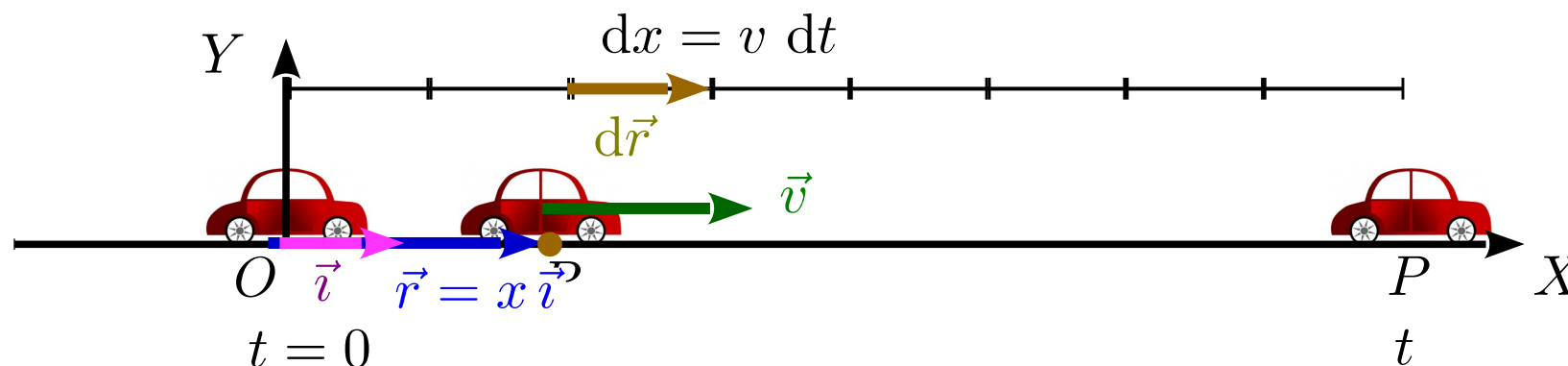
- Para conocer la posición de una partícula no basta con saber su velocidad, hace falta saber donde se encuentra en un instante dado



$$\begin{aligned} \text{Área}[a, b] &\simeq \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i \\ &\quad \downarrow \begin{array}{l} \Delta x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty \end{array} \\ \text{Área}[a, b] &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

- En Física, una integral definida es una suma de cosas muy pequeñas
- Se puede sumar cualquier objeto matemático: vectores, áreas, volúmenes, productos escalares....

- Resolver la ecuación diferencial para $x(t)$ puede interpretarse como sumar los desplazamientos realizados para un tiempo t dado



$$\overline{OP} = \int_0^P dx = \int_0^t v(t) dt$$

- El vector desplazamiento es la suma vectorial de los desplazamientos vectoriales infinitesimales

$$\overrightarrow{OP} = \int_0^P d\vec{r} = \int_0^P dx \vec{i} = \vec{i} \int_0^t v(t) dt$$

- Datos $a(t), v(t_0) = v_0, x(t_0) = x_0$ Incógnitas $v(t), x(t)$

$$\frac{dv}{dt} = a(t) \Rightarrow dv = a(t) dt \Rightarrow \int dv = \int a(t) dt \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} v(t) &= \int a(t) dt + C \\ v(t_0) &= v_0 \end{aligned}}$$

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \Rightarrow dx = v(t) dt \Rightarrow \int dx = \int v(t) dt \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x(t) &= \int v(t) dt + C \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}}$$

- Con la regla de Barrow

$$\boxed{v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(t) dt}$$

$$\boxed{x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(t) dt}$$

- Introducción
- Vector de posición
- Velocidad y aceleración
- Problemas con velocidad y aceleración dadas
- Distancia y desplazamiento
- Movimiento uniforme y uniformemente acelerado

- La distancia recorrida es la suma de los módulos de los desplazamientos

$$ds = |d\vec{r}| = |dx| = |\vec{v}| dt$$

Ejemplo

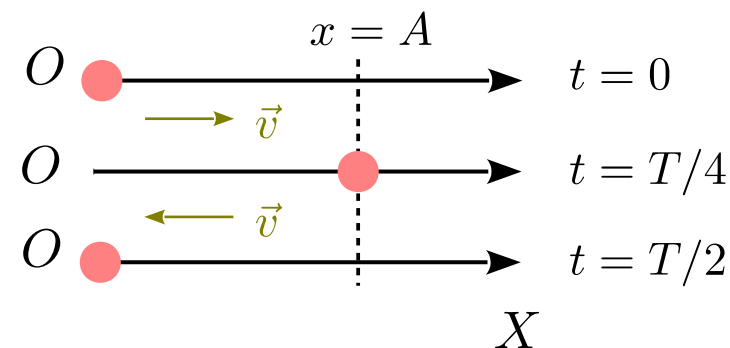
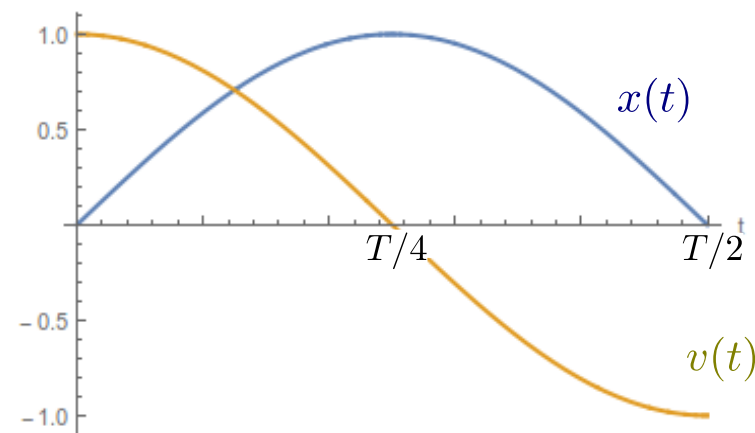
$$x(t) = A \sin(2\pi t/T) \quad v(t) = \frac{2\pi A}{T} \cos(2\pi t/T)$$

$$dx = \left(\frac{dx}{dt}\right) dt = v(t) dt = \frac{2\pi A}{T} \cos(2\pi t/T) dt$$

$$ds = |dx| = |v(t)| dt = \frac{2\pi A}{T} |\cos(2\pi t/T)| dt$$

$$\Delta x = \int_0^{T/2} dx = \int_0^{T/2} \frac{2\pi A}{T} \cos(2\pi t/T) dt = A \sin(2\pi t/T) \Big|_0^{T/2} = 0$$

$$\Delta s = \int_0^{T/2} ds = \int_0^{T/2} |\vec{v}| dt = \int_0^{T/4} \frac{2\pi A}{T} \cos(2\pi t/T) dt + \int_{T/4}^{T/2} \left(-\frac{2\pi A}{T} \cos(2\pi t/T)\right) dt = 2A$$



- Introducción
- Vector de posición
- Velocidad y aceleración
- Problemas con velocidad y aceleración dadas
- Distancia y desplazamiento
- **Movimiento uniforme y uniformemente acelerado**

■ Movimiento rectilíneo uniforme (m.r.u.)

■ **Aceleración** $\vec{a}(t) = 0$

■ **Velocidad** $\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) = c\vec{t}e = v_0 \vec{T}$

■ **Posición** $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t) = s(t)\vec{T} = (s(t_0) + v_0 t) \vec{T}$

■ Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.)

■ **Aceleración** $\vec{a}(t) = c\vec{t}e = a_0 \vec{T}$

■ **Velocidad** $\vec{v}(t) = (v(t_0) + a_0 t) \vec{T}$

■ **Posición** $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t) = \left(s(t_0) + v(t_0)t + \frac{1}{2}a_0 t^2 \right) \vec{T}$

