Tema 2: Movimiento relativo

Mecánica Racional, 2º Grado en Ingeniería Civil

Departamento de Física Aplicada III

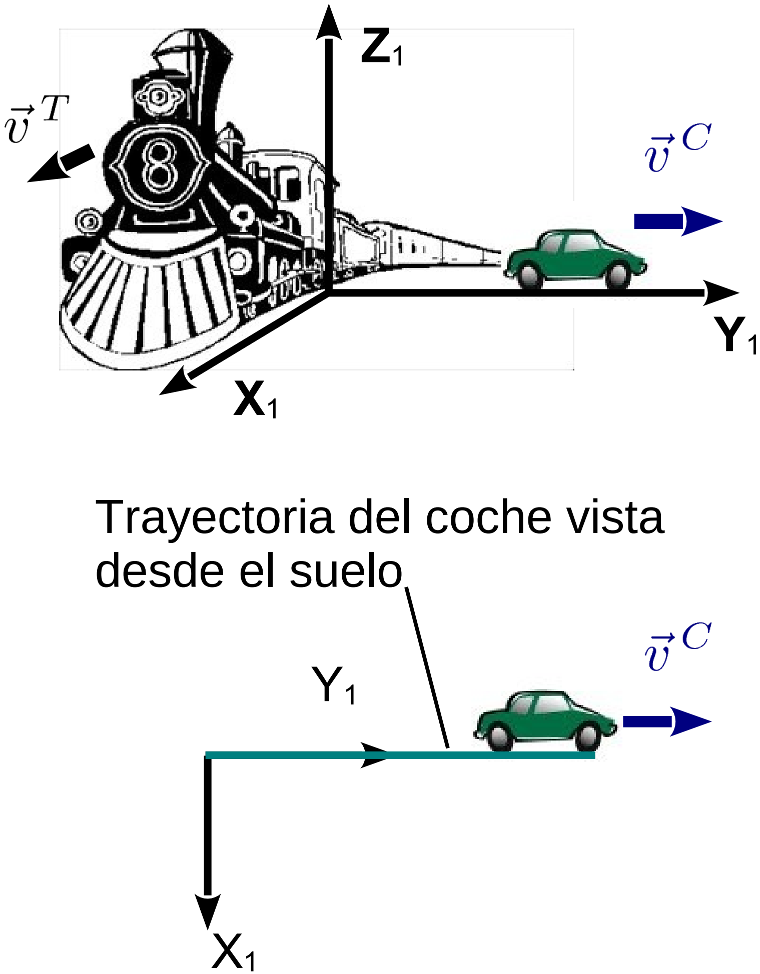
Escuela Técnica Superior de Ingeniería

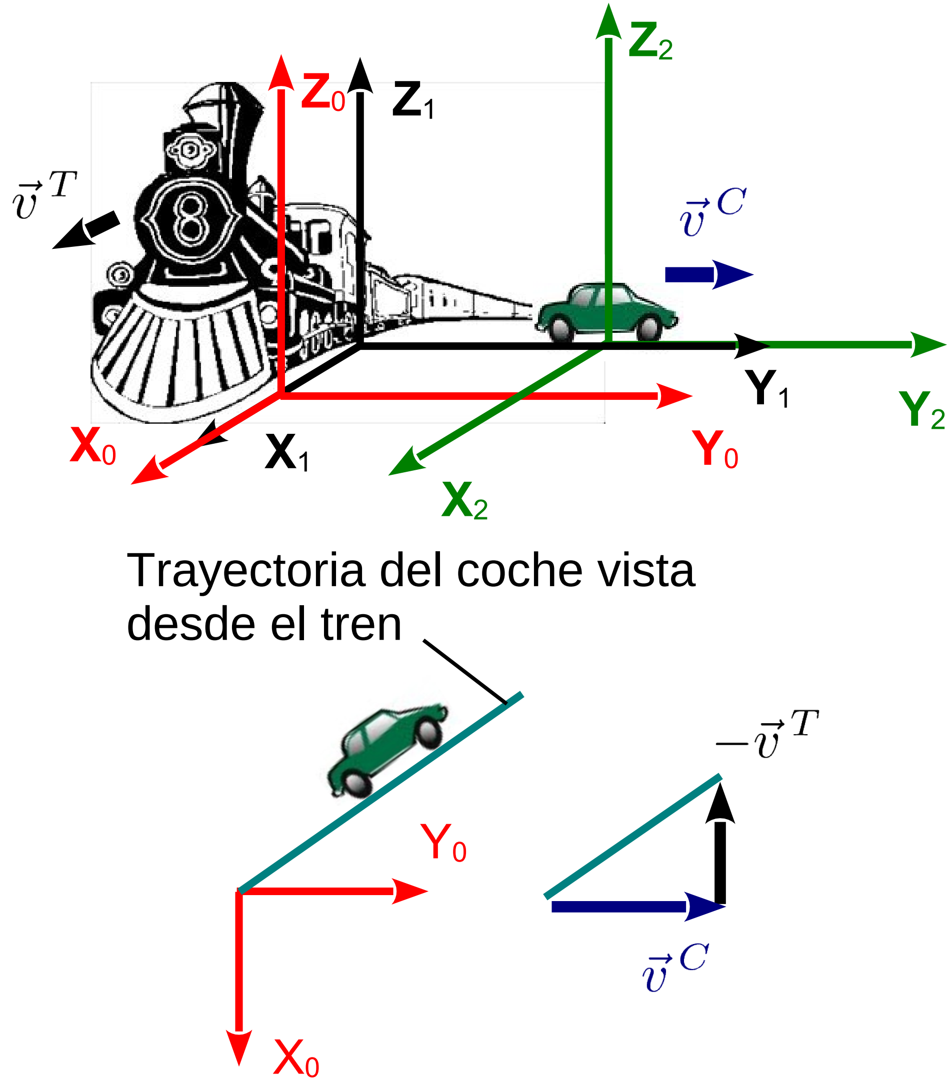
Universidad de Sevilla

Índice

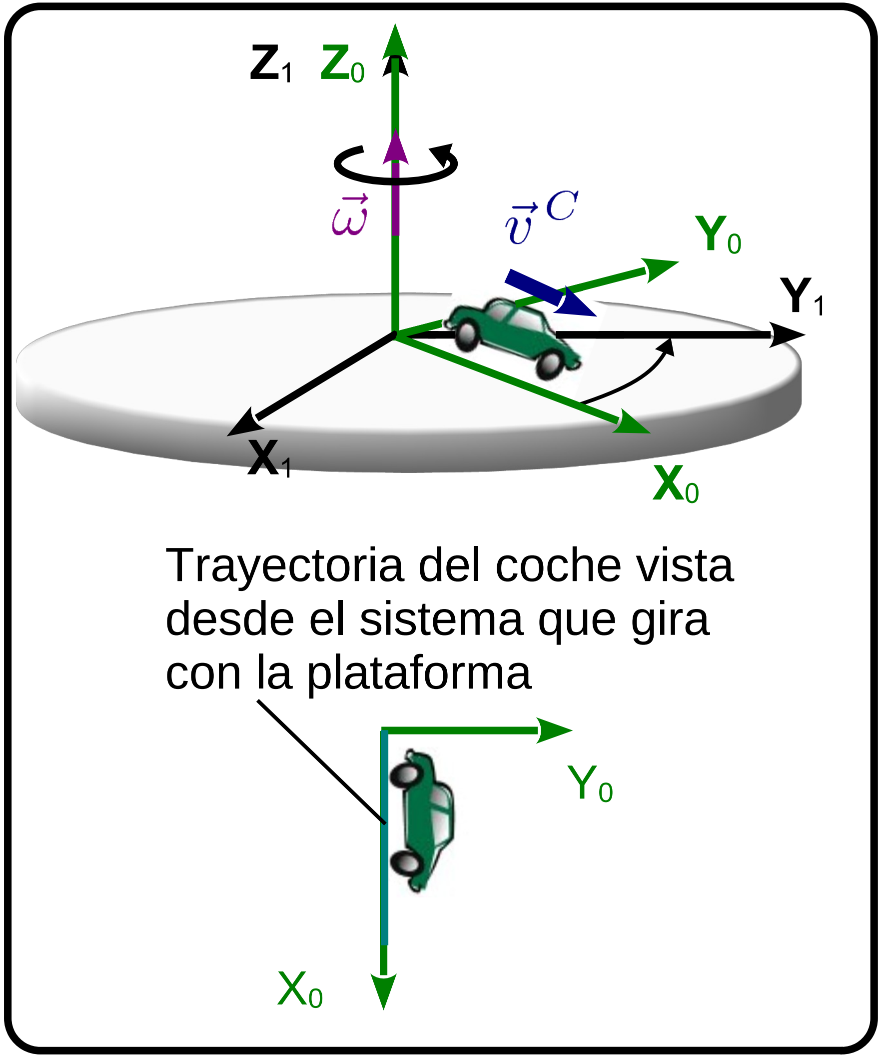
- Introducción
- Derivación en triedros móviles
- Notación y definiciones
- Composición de velocidades
  - Traslaciones
  - Rotaciones
- Composición de aceleraciones
  - Traslaciones
  - Rotaciones
- Pares cinemáticos. Sólidos en contacto puntual
- Dinámica en sistemas de referencia no inerciales

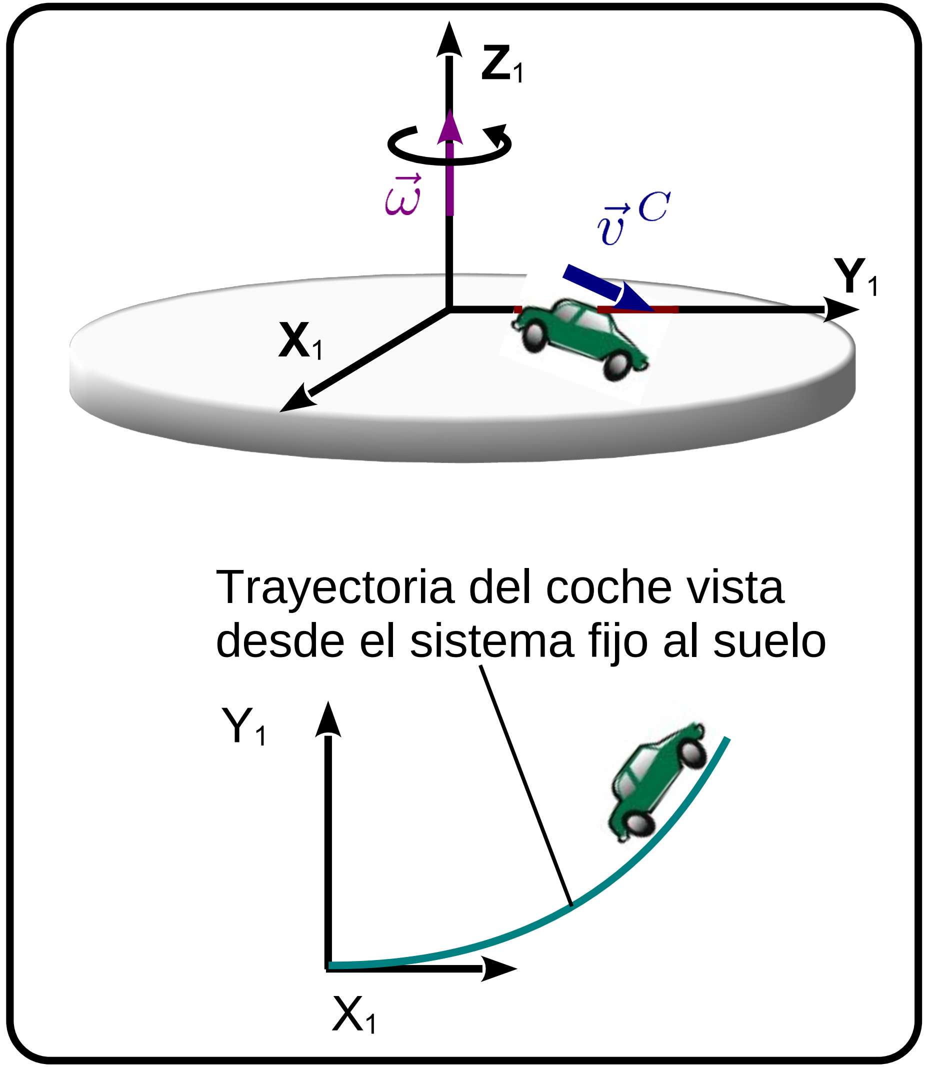
Movimiento relativo: traslación





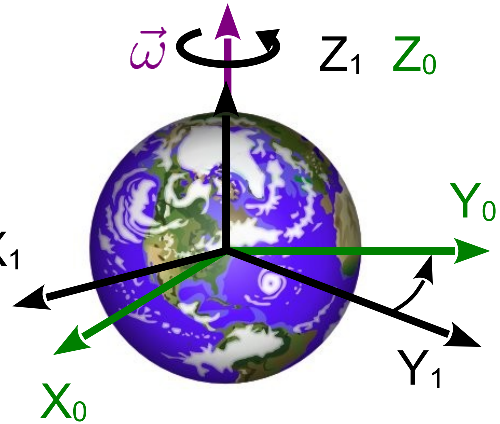
Movimiento relativo: rotación





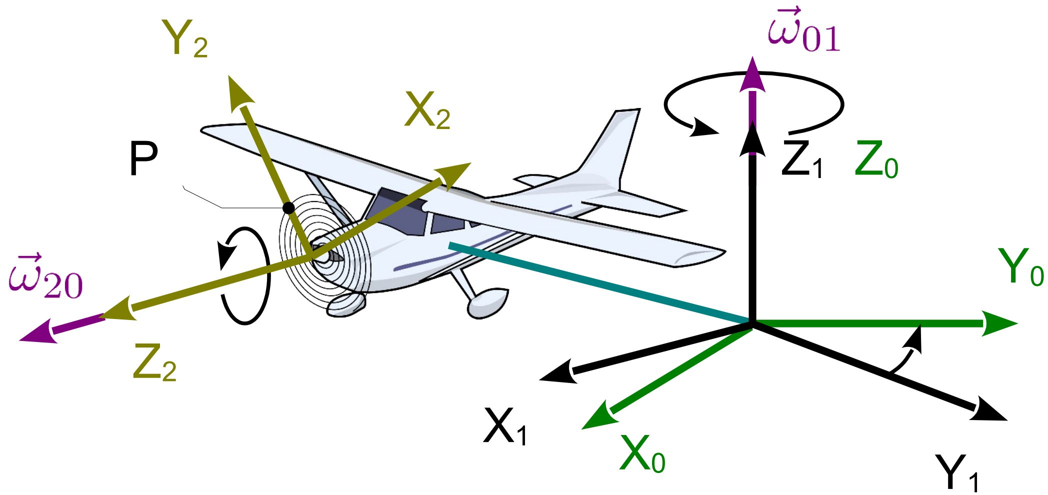
Rotación de la Tierra

Un sistema solidario a la tierra
es un sistema en rotación



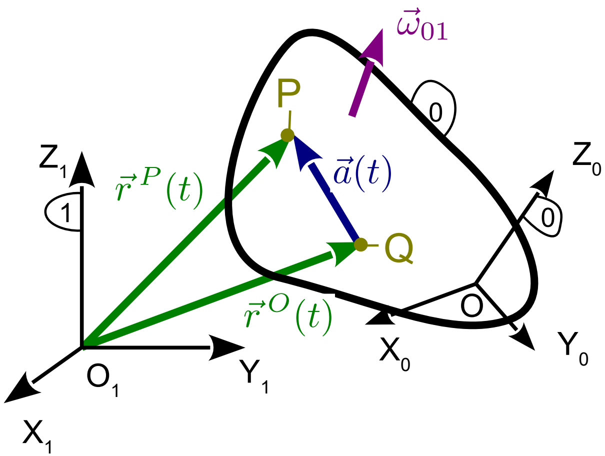
Composición de movimientos

El movimiento de un punto de
la hélice se describe más
fácilmente intercalando un
sistema de referencia auxiliar



Índice

- Introducción
- Derivación en triedros móviles
- Notación y definiciones
- Composición de velocidades
  - Traslaciones
  - Rotaciones
- Composición de aceleraciones
  - Traslaciones
  - Rotaciones
- Pares cinemáticos. Sólidos en contacto puntual
- Dinámica en sistemas de referencia no inerciales



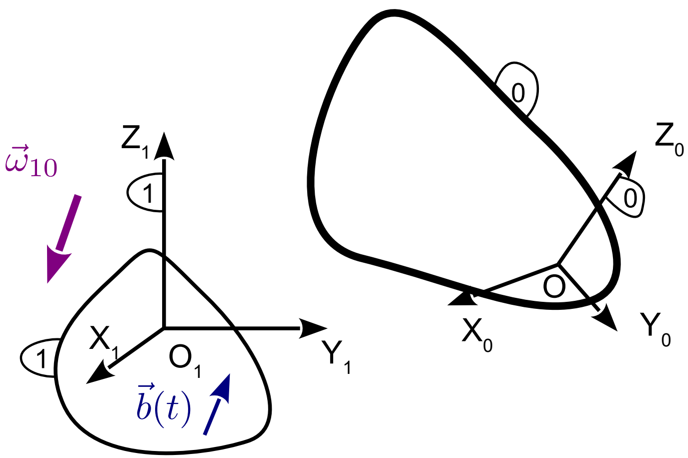
El vector **a**(t) se mueve solidariamente con el sólido (triedro) 0

$$\vec{a} = \overrightarrow{QP} = \vec{r}^{\,P} - \vec{r}^{\,Q}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \frac{\mathrm{d}\vec{r}^{\,P}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\vec{r}^{\,Q}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}^{\,P} - \vec{v}^{\,Q} = \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{QP}$$

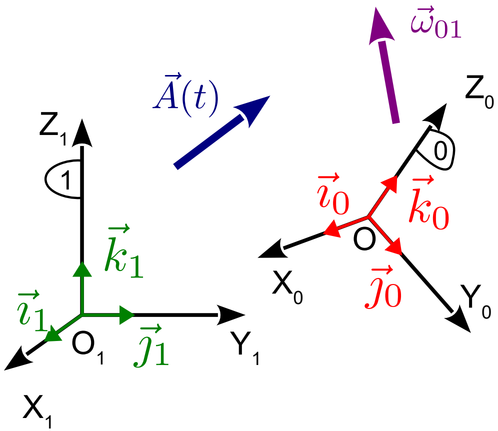
$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \vec{\omega}_{01} \times \vec{a}}$$

$\vec{\omega}_{01}$ es el vector rotación total instantáneo del movimiento del sólido 0 respecto al sólido 1



La fórmula también funciona a la inversa, suponiendo el sólido 0 en reposo y el 1 moviéndose

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}\right|_0 = \vec{\omega}_{10} \times \vec{b}$$



Los vectores de la base del triedro 1 **no** se mueven respecto al triedro 1

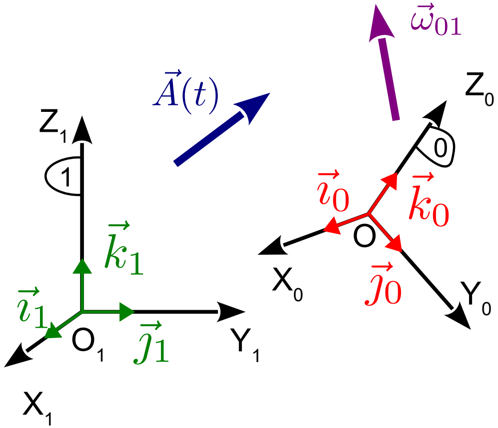
$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\imath}_1}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \vec{0} \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\jmath}_1}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \vec{0} \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\vec{k}_1}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \vec{0}$$

Vector **A** expresado en la base “1” $\vec{A}(t) = A_x^{(1)}(t)\vec{\imath}_1 + A_y^{(1)}(t)\vec{\jmath}_1 + A_z^{(1)}(t)\vec{k}_1$

Hacemos la derivada, vista desde el sistema “1”, con el vector expresado en la base “1”

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_1 &= \left.\frac{\mathrm{d}(A_x^{(1)}\vec{\imath}_1)}{\mathrm{d}t}\right|_1 + \left.\frac{\mathrm{d}(A_y^{(1)}\vec{\jmath}_1)}{\mathrm{d}t}\right|_1 + \left.\frac{\mathrm{d}(A_z^{(1)}\vec{k}_1)}{\mathrm{d}t}\right|_1 \\ &= \frac{\mathrm{d}A_x^{(1)}}{\mathrm{d}t}\vec{\imath}_1 + A_x^{(1)}\left.\cancel{\frac{\mathrm{d}\vec{\imath}_1}{\mathrm{d}t}}\right|_1 + \frac{\mathrm{d}A_y^{(1)}}{\mathrm{d}t}\vec{\jmath}_1 + A_y^{(1)}\left.\cancel{\frac{\mathrm{d}\vec{\jmath}_1}{\mathrm{d}t}}\right|_1 + \frac{\mathrm{d}A_z^{(1)}}{\mathrm{d}t}\vec{k}_1 + A_z^{(1)}\left.\cancel{\frac{\mathrm{d}\vec{k}_1}{\mathrm{d}t}}\right|_1 \\ &= \frac{\mathrm{d}A_x^{(1)}}{\mathrm{d}t}\vec{\imath}_1 + \frac{\mathrm{d}A_y^{(1)}}{\mathrm{d}t}\vec{\jmath}_1 + \frac{\mathrm{d}A_z^{(1)}}{\mathrm{d}t}\vec{k}_1\end{aligned}$$

Derivación temporal en triedros móviles: fórmulas de Poisson



Los vectores de la base del triedro 0 **sí** se mueven respecto al triedro 1

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\imath}_0}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \vec{\omega}_{01}\times\vec{\imath}_0 \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\jmath}_0}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \vec{\omega}_{01}\times\vec{\jmath}_0 \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\vec{k}_0}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \vec{\omega}_{01}\times\vec{k}_0$$

Vector **A** expresado en la base “0” $\vec{A}(t) = A_x^{(0)}(t)\vec{\imath}_0 + A_y^{(0)}(t)\vec{\jmath}_0 + A_z^{(0)}(t)\vec{k}_0$

Hacemos la derivada, vista desde el sistema “1”, con el vector expresado en la base “0”

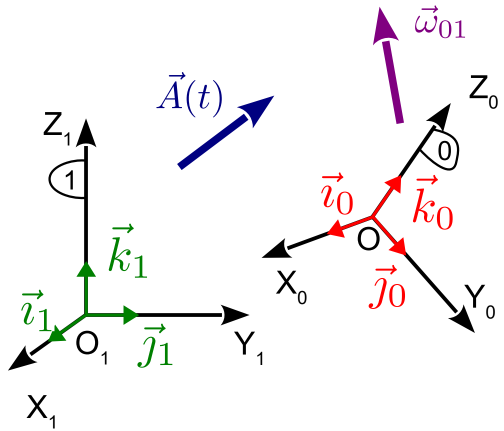
$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \left.\frac{\mathrm{d}(A_x^{(0)}\vec{\imath}_0)}{\mathrm{d}t}\right|_1 + \left.\frac{\mathrm{d}(A_y^{(0)}\vec{\jmath}_0)}{\mathrm{d}t}\right|_1 + \left.\frac{\mathrm{d}(A_z^{(0)}\vec{k}_0)}{\mathrm{d}t}\right|_1$$

$$= \frac{\mathrm{d}A_x^{(0)}}{\mathrm{d}t}\vec{\imath}_0 + A_x^{(0)}\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\imath}_0}{\mathrm{d}t}\right|_1 + \frac{\mathrm{d}A_y^{(0)}}{\mathrm{d}t}\vec{\jmath}_0 + A_y^{(0)}\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\jmath}_0}{\mathrm{d}t}\right|_1 + \frac{\mathrm{d}A_z^{(0)}}{\mathrm{d}t}\vec{k}_0 + A_z^{(0)}\left.\frac{\mathrm{d}\vec{k}_0}{\mathrm{d}t}\right|_1$$

$$= \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_0 + A_x^{(0)}\vec{\omega}_{01}\times\vec{\imath}_0 + A_y^{(0)}\vec{\omega}_{01}\times\vec{\jmath}_0 + A_z^{(0)}\vec{\omega}_{01}\times\vec{k}_0$$

$$= \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_0 + \vec{\omega}_{01}\times\left(A_x^{(0)}\vec{\imath}_0 + A_y^{(0)}\vec{\jmath}_0 + A_z^{(0)}\vec{k}_0\right) = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_0 + \vec{\omega}_{01}\times\vec{A}$$

Derivación temporal en triedros móviles: fórmulas de Poisson



Los vectores de la base del triedro 0 se mueven respecto al triedro 1

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\imath}_0}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \vec{\omega}_{01} \times \vec{\imath}_0 \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\jmath}_0}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \vec{\omega}_{01} \times \vec{\jmath}_0 \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\vec{k}_0}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \vec{\omega}_{01} \times \vec{k}_0$$

Variación temporal del vector **A**(t) respecto al triedro 1

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_0 + \vec{\omega}_{01} \times \vec{A}$$

Variación temporal del vector **A**(t) respecto al triedro 0

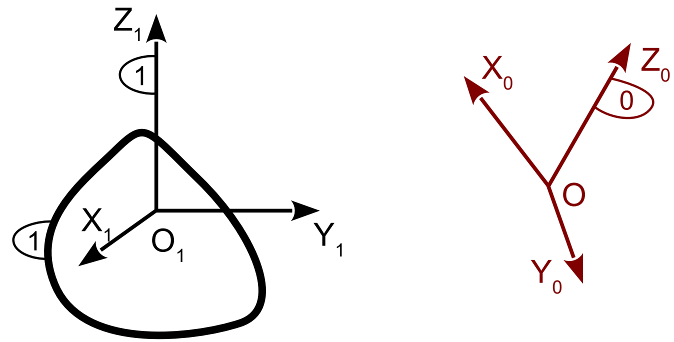
$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_0 = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_1 + \vec{\omega}_{10} \times \vec{A}$$

Índice

- Introducción
- Derivación en triedros móviles
- Notación y definiciones
- Composición de velocidades
  - Traslaciones
  - Rotaciones
- Composición de aceleraciones
  - Traslaciones
  - Rotaciones
- Pares cinemáticos. Sólidos en contacto puntual
- Dinámica en sistemas de referencia no inerciales

Cada sólido rígido es un triedro infinito, tenga o no partes materiales

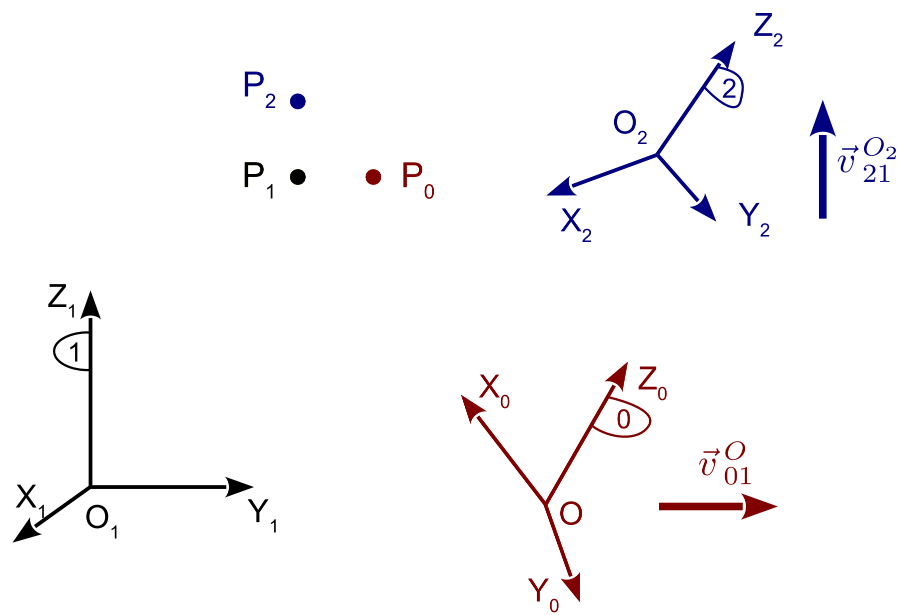
Al moverse, los sólidos se ”atraviesan” unos a otros



Cada punto geométrico del espacio pertenece simultáneamente a todos los sólidos definidos

En cada punto geométrico del espacio se superponen en cada instante varios puntos

En el instante posterior, cada uno de esos puntos superpuestos se mueve con su sólido correspondiente



Notación y definiciones

{ij} mov. del sólido ”i” respecto al sólido *observador* ”j”

Magnitudes cinemáticas

$\vec{\omega}_{ij}$ Velocidad angular del sólido “i” respecto al “j”

$\vec{\alpha}_{ij}$ Aceleración angular del sólido “i” respecto al “j”

$\vec{r}^{\,P}_{ij}$ Vector de posición del punto P perteneciente al sólido “i” respecto al sólido “j”

$\vec{v}^{\,P}_{ij}$ Vector de velocidad del punto P perteneciente al sólido “i” respecto al sólido “j”

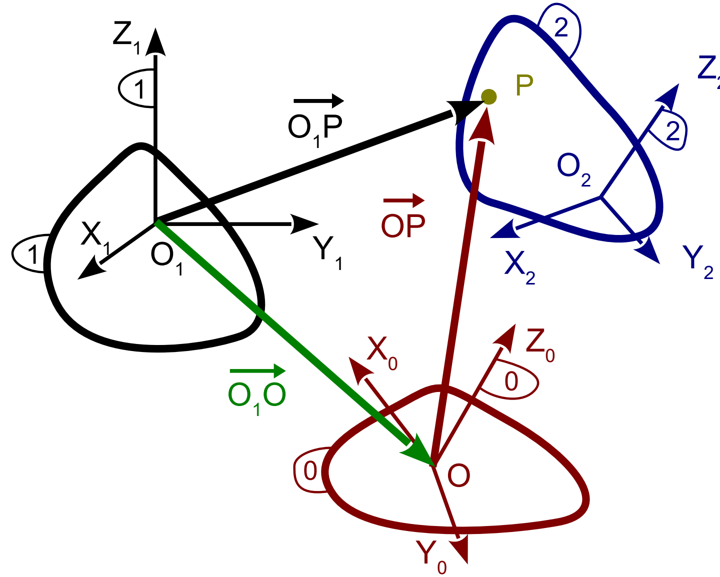
$\vec{a}^{\,P}_{ij}$ Vector de aceleración del punto P perteneciente al sólido “i” respecto al sólido “j”

Si sólo hay tres sólidos

"1" sólido de referencia

"0" sólido intermedio

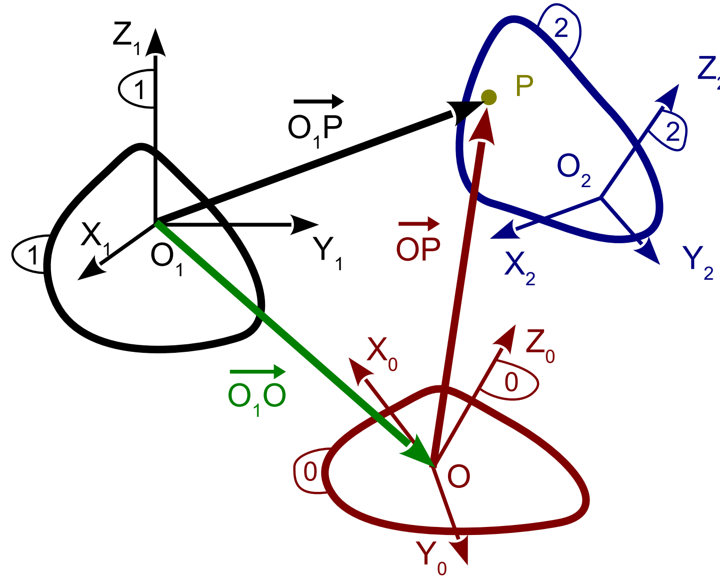
"2" sólido problema



{21} mov. absoluto	$\vec{r}^{P}_{21}$	$\vec{v}^{P}_{21} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}^{P}_{21}}{\mathrm{d}t}\right\|_1$	$\vec{a}^{P}_{21} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}^{P}_{21}}{\mathrm{d}t}\right\|_1$	$\vec{\omega}_{21}$	$\vec{\alpha}_{21} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{21}}{\mathrm{d}t}\right\|_1$
{20} mov. relativo	$\vec{r}^{P}_{20}$	$\vec{v}^{P}_{20} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}^{P}_{20}}{\mathrm{d}t}\right\|_0$	$\vec{a}^{P}_{20} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}^{P}_{20}}{\mathrm{d}t}\right\|_0$	$\vec{\omega}_{20}$	$\vec{\alpha}_{20} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{20}}{\mathrm{d}t}\right\|_0$
{01} mov. arrastre	$\vec{r}^{P}_{01}$	$\vec{v}^{P}_{01} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}^{P}_{01}}{\mathrm{d}t}\right\|_1$	$\vec{a}^{P}_{01} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}^{P}_{01}}{\mathrm{d}t}\right\|_1$	$\vec{\omega}_{01}$	$\vec{\alpha}_{01} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{01}}{\mathrm{d}t}\right\|_1$

Para dos sólidos genéricos "i", "j"

$$\vec{v}_{ij}^{P} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{i}^{P}}{\mathrm{d}t}\right|_{j} \qquad \vec{a}_{ij}^{P} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{ij}^{P}}{\mathrm{d}t}\right|_{j} \qquad \vec{\alpha}_{ij} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{ij}}{\mathrm{d}t}\right|_{j}$$



Campos de velocidad y aceleración

$$\vec{v}_{ij}^{P} = \vec{v}_{ij}^{Q} + \vec{\omega}_{ij} \times \overrightarrow{QP}$$

$$\vec{a}_{ij}^{P} = \vec{a}_{ij}^{Q} + \vec{\alpha}_{ij} \times \overrightarrow{QP} + \vec{\omega}_{ij} \times (\vec{\omega}_{ij} \times \overrightarrow{QP})$$

El movimiento entre dos sólidos se puede descomponer en dos movimientos introduciendo un sólido intermedio

{ i j } = { i k } + { k j } $\longrightarrow$ Leyes de composición

Índice

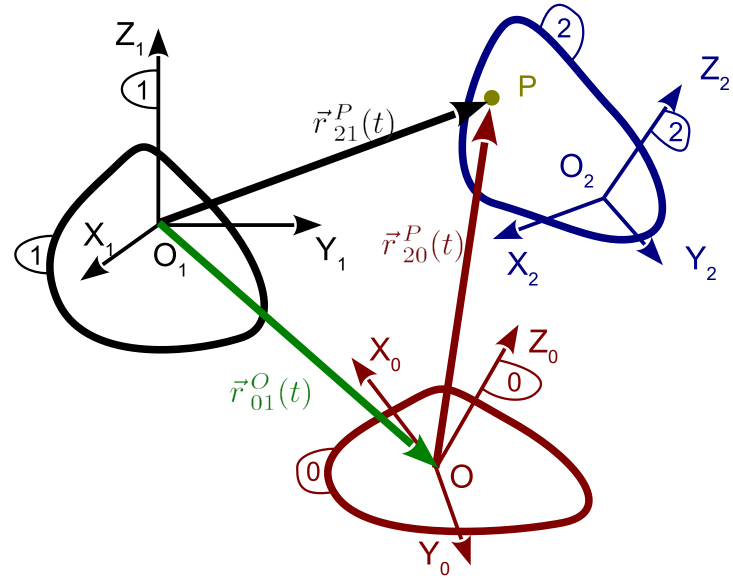
- Introducción
- Derivación en triedros móviles
- Notación y definiciones
- Composición de velocidades
  - Traslaciones
  - Rotaciones
- Composición de aceleraciones
  - Traslaciones
  - Rotaciones
- Pares cinemáticos. Sólidos en contacto puntual
- Dinámica en sistemas de referencia no inerciales

En un instante dado

$$\overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OP}$$

Esta expresión no es derivable en el tiempo

El punto P no está asignado a un sólido determinado



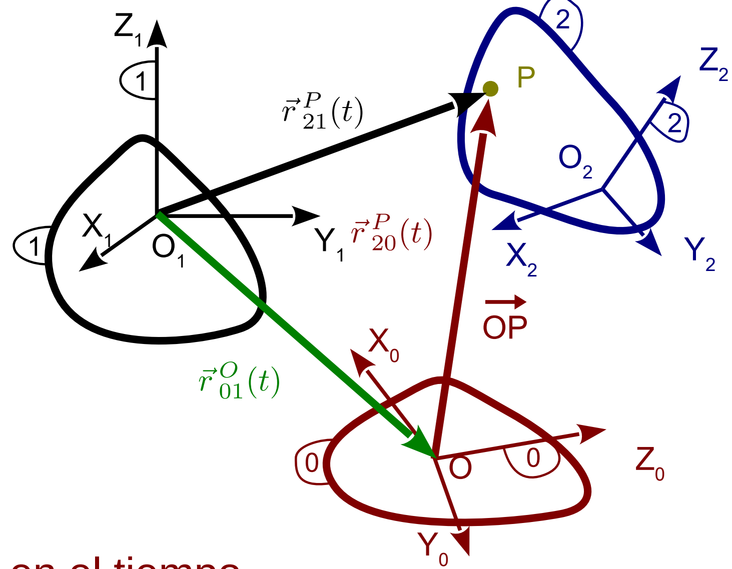
Para cualquier instante

$$\vec{r}^{\,P}_{21}(t) = \vec{r}^{\,O}_{01}(t) + \vec{r}^{\,P}_{20}(t)$$

Cada uno de los vectores esta asociado a un punto de un sólido

Esta expresión es derivable en el tiempo

Derivamos respecto del tiempo $\vec{r}^P_{21}(t) = \vec{r}^O_{01}(t) + \vec{r}^P_{20}(t)$



$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}^P_{21}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}^O_{01}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_1 + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}^P_{20}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_1$$

$$\vec{v}^P_{21}(t) = \vec{v}^O_{01}(t) + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}^P_{20}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_0 + \vec{\omega}_{01}(t) \times \vec{r}^P_{20}$$

$$\vec{v}^P_{21}(t) = \vec{v}^O_{01}(t) + \vec{v}^P_{20}(t) + \vec{\omega}_{01}(t) \times \vec{r}^P_{20}$$

$$\boxed{\vec{v}^P_{21}(t) = \vec{v}^O_{01}(t) + \vec{v}^P_{20}(t) + \vec{\omega}_{01}(t) \times \vec{r}^P_{20}}$$

Derivable en el tiempo

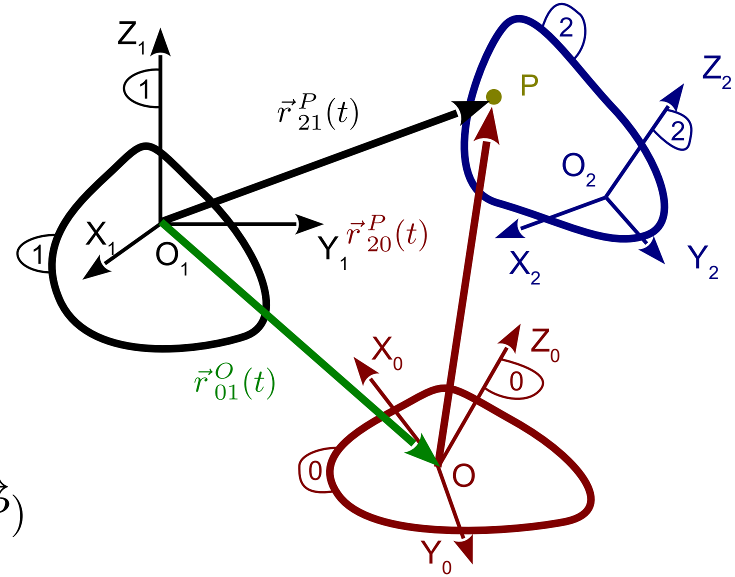
En cada instante de tiempo

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}^P_{20} = \overrightarrow{OP} \\ \vec{r}^P_{00} = \overrightarrow{OP}\end{array}\right| \longrightarrow \begin{array}{rl}\vec{v}^P_{21} & = \vec{v}^P_{20} + \vec{v}^O_{01} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{r}^P_{20} \\ & = \vec{v}^P_{20} + \vec{v}^O_{01} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{r}^P_{00} \\ & = \vec{v}^P_{20} + \vec{v}^O_{01} + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OP} \\ & = \vec{v}^P_{20} + \vec{v}^P_{01}\end{array} \longrightarrow \boxed{\vec{v}^P_{21} = \vec{v}^P_{20} + \vec{v}^P_{01}}$$

No derivable en el tiempo

$$\boxed{\vec{v}^P_{ij} = \vec{v}^P_{ik} + \vec{v}^P_{kj}}$$

$$\boxed{\vec{v}^P_{ik} = -\vec{v}^P_{ki}}$$



Ley de composición de velocidades

$$\vec{v}^{\,P}_{21} = \vec{v}^{\,P}_{20} + \vec{v}^{\,P}_{01}$$

Ecuación del campo de velocidades

$$\vec{v}^{\,O}_{21} + \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{OP} = \vec{v}^{\,O}_{20} + \vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{OP} + \vec{v}^{\,O}_{01} + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OP}$$

Reagrupando

$$\cancelto{0}{\boxed{\vec{v}^{\,O}_{21} - \vec{v}^{\,O}_{20} - \vec{v}^{\,O}_{01}}} + (\vec{\omega}_{21} - \vec{\omega}_{20} - \vec{\omega}_{01}) \times \overrightarrow{OP} = \vec{0} \qquad (\forall\, \overrightarrow{OP})$$

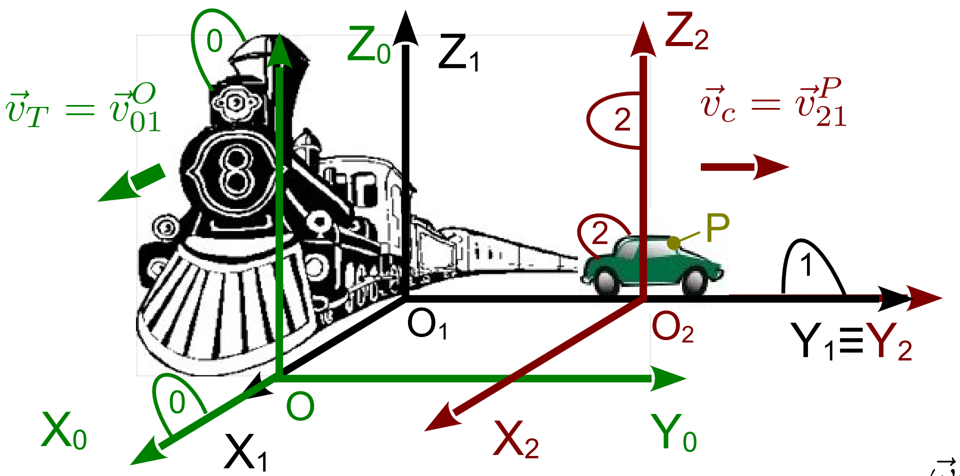
Ley de composición de velocidades angulares

$$\boxed{\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01}} \qquad \boxed{\vec{\omega}_{ij} = \vec{\omega}_{ik} + \vec{\omega}_{kj}} \qquad \{ij\} = \{ik\} + \{kj\}$$

Esta expresión es derivable en el tiempo

Tomando i=j $\quad \vec{\omega}_{ii} = \vec{0} = \vec{\omega}_{ik} + \vec{\omega}_{ki} \longrightarrow \boxed{\vec{\omega}_{ik} = -\vec{\omega}_{ki}}$

Composición de velocidades: traslación



Coche respecto al paso a nivel {21}

$$\vec{\omega}_{21} = \vec{0} \qquad \vec{v}^{\,P}_{21} = v_c\,\vec{\jmath}_1 = v_c\,\vec{\jmath}_0$$

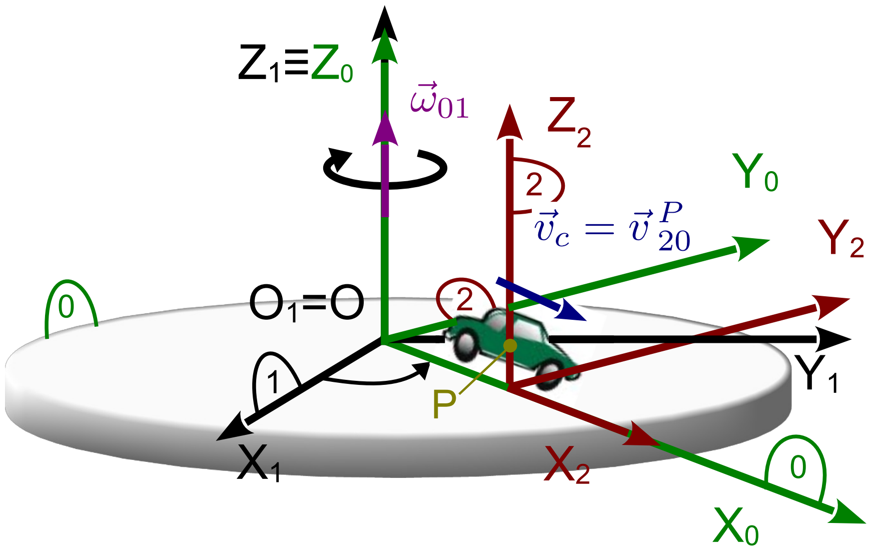
Tren respecto al paso a nivel {01}

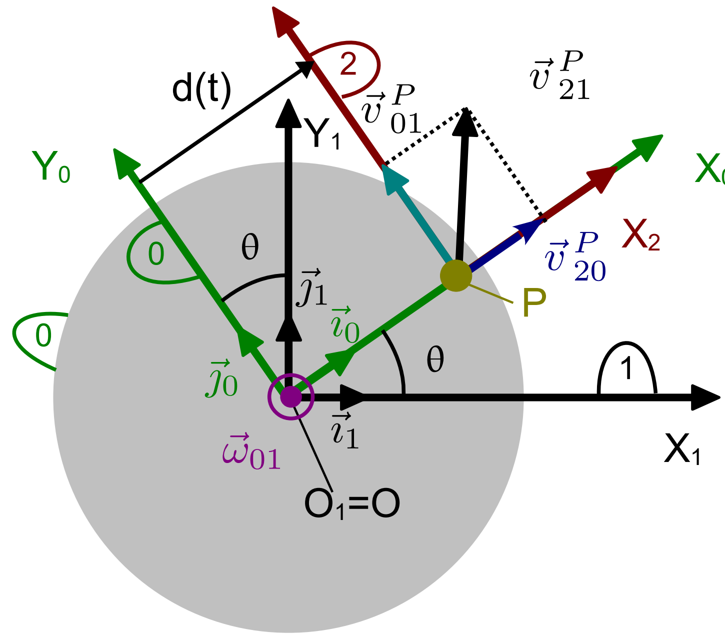
$$\vec{\omega}_{01} = \vec{0} \qquad \vec{v}^{\,O}_{01} = \vec{v}^{\,P}_{01} = v_t\,\vec{\imath}_1 = v_t\,\vec{\imath}_0$$

Coche respecto al tren {20}

$$\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01} \rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{20} = \vec{0}}$$

$$\vec{v}^{\,P}_{21} = \vec{v}^{\,P}_{20} + \vec{v}^{\,P}_{01} \rightarrow \boxed{\vec{v}^{\,P}_{20} = \vec{v}^{\,P}_{21} - \vec{v}^{\,P}_{01} = -v_t\,\vec{\imath}_0 + v_c\,\vec{\jmath}_0}$$





Plataforma respecto al suelo {01}

$$\vec{\omega}_{01} = \omega\,\vec{k}_1 = \omega\,\vec{k}_0 \qquad \vec{v}^{\,O}_{01} = \vec{0}$$

Coche respecto a la plataforma {20}

$$\vec{\omega}_{20} = \vec{0} \qquad \vec{v}^{\,P}_{20} = v_c\,\vec{\imath}_0$$

Distancia recorrida sobre la plataforma

$$d(t) = v_c\,t$$

Coche respecto al suelo {21}

$$\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01} = \omega\,\vec{k}_0$$

$$\vec{v}^{\,P}_{21} = \vec{v}^{\,P}_{20} + \vec{v}^{\,P}_{01}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}^{\,P}_{01} &= \vec{v}^{\,O}_{01} + \vec{\omega}_{01}\times\overrightarrow{OP} = \\ &= \vec{\omega}_{01}\times\overrightarrow{OP} \\ &= (\omega\,\vec{k}_0)\times(d(t)\,\vec{\imath}_0) \\ &= \omega\,v_c\,t\,\vec{\jmath}_0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\omega}_{21} = \omega\,\vec{k}_0}$$

$$\boxed{\vec{v}^{\,P}_{21} = v_c\vec{\imath}_0 + \omega\,v_c\,t\,\vec{\jmath}_0}$$

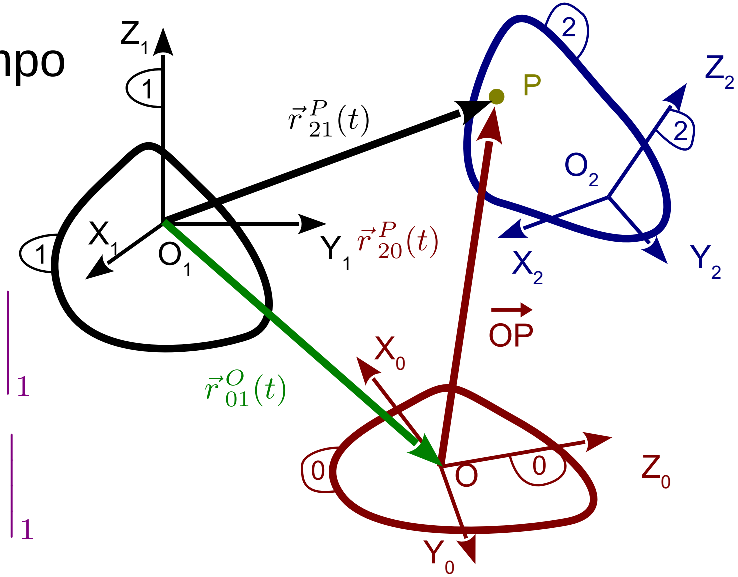
Índice

- Introducción
- Derivación en triedros móviles
- Notación y definiciones
- Composición de velocidades
  - Traslaciones
  - Rotaciones
- Composición de aceleraciones
  - Traslaciones
  - Rotaciones
- Pares cinemáticos. Sólidos en contacto puntual
- Dinámica en sistemas de referencia no inerciales

Composición de aceleraciones

Ley de composición de velocidades derivable en el tiempo

$$\vec{v}^P_{21}(t) = \vec{v}^P_{20}(t) + \vec{v}^O_{01} + \vec{\omega}_{01}(t) \times \vec{r}^P_{20}(t)$$



Derivación respecto del tiempo desde el sólido "1"

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}^P_{21}}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}^P_{20}}{\mathrm{d}t}\right|_1 + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}^O_{01}}{\mathrm{d}t}\right|_1 + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{01}}{\mathrm{d}t}\right|_1 \times \vec{r}^P_{20} + \vec{\omega}_{01} \times \left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}^P_{20}}{\mathrm{d}t}\right|_1$$

$$\vec{a}^P_{21} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}^P_{20}}{\mathrm{d}t}\right|_1 + \vec{a}^O_{01} + \vec{\alpha}_{01} \times \vec{r}^P_{20} + \vec{\omega}_{01} \times \left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}^P_{20}}{\mathrm{d}t}\right|_1$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_0 + \vec{\omega}_{01} \times \vec{A}$$

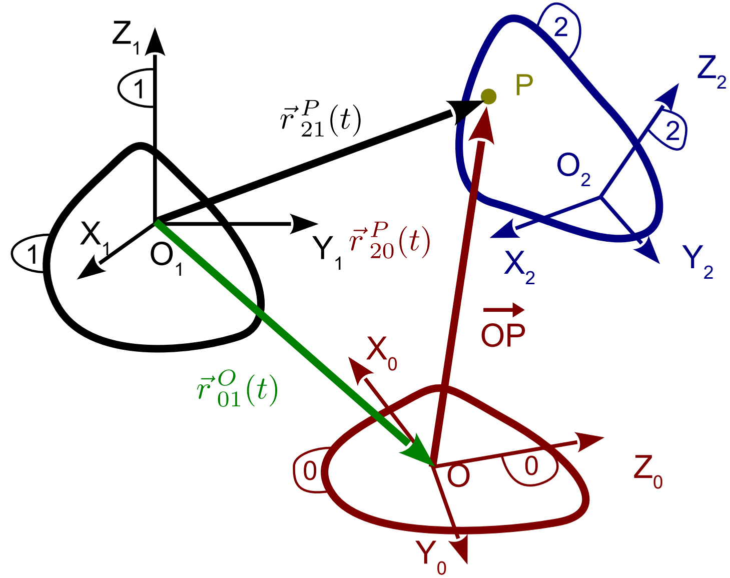
$$\vec{a}^P_{21} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}^P_{20}}{\mathrm{d}t}\right|_0 + \vec{\omega}_{01} \times \vec{v}^P_{20} + \vec{a}^O_{01} + \vec{\alpha}_{01} \times \vec{r}^P_{20} + \vec{\omega}_{01} \times \left(\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}^P_{20}}{\mathrm{d}t}\right|_0 + \vec{\omega}_{01} \times \vec{r}^P_{20}\right)$$

$$\vec{a}^P_{21} = \vec{a}^P_{20} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{v}^P_{20} + \vec{a}^O_{01} + \vec{\alpha}_{01} \times \vec{r}^P_{20} + \vec{\omega}_{01} \times \left(\vec{v}^P_{20} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{r}^P_{20}\right)$$

$$\boxed{\vec{a}^P_{21} = \vec{a}^P_{20} + \vec{a}^O_{01} + \vec{\alpha}_{01} \times \vec{r}^P_{20} + \vec{\omega}_{01} \times (\vec{\omega}_{01} \times \vec{r}^P_{20}) + 2\,\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}^P_{20}}$$

Derivable en el tiempo

Buscamos una expresión mas sencilla en términos de composición de movimientos



$$\vec{a}^{P}_{21} = \vec{a}^{P}_{20} + \vec{a}^{O}_{01} + \vec{\alpha}_{01} \times \vec{r}^{P}_{20} + \vec{\omega}_{01} \times (\vec{\omega}_{01} \times \vec{r}^{P}_{20}) + 2\,\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}^{P}_{20}$$

$$\vec{r}^{P}_{20} = \overrightarrow{OP} = \vec{r}^{P}_{00}$$

Validez instantánea

$$\vec{a}^{P}_{21} = \vec{a}^{P}_{20} + \vec{a}^{O}_{01} + \vec{\alpha}_{01} \times \overrightarrow{OP} + \vec{\omega}_{01} \times (\vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OP}) + 2\,\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}^{P}_{20}$$

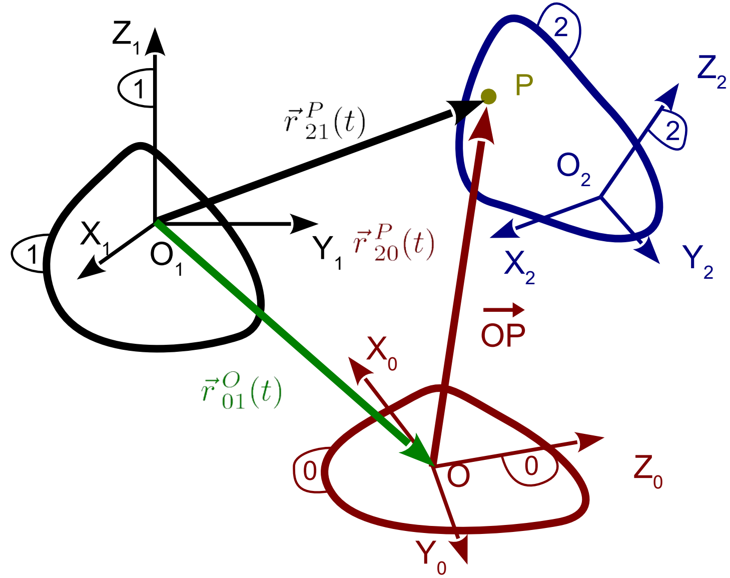
$$\boxed{\vec{a}^{P}_{21} = \vec{a}^{P}_{20} + \vec{a}^{P}_{01} + 2\,\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}^{P}_{20}}$$

Teorema de Coriolis

$$\boxed{\vec{a}^{P}_{ij} = \vec{a}^{P}_{ik} + \vec{a}^{P}_{kj} + 2\,\vec{\omega}_{kj} \times \vec{v}^{P}_{ik}} \qquad \{ij\} = \{ik\} + \{kj\}$$

Tomando i=j $\quad \vec{a}^{P}_{ii} = \vec{0} = \vec{a}^{P}_{ik} + \vec{a}^{P}_{ki} + 2\,\vec{\omega}_{ki} \times \vec{v}^{P}_{ik} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{a}^{P}_{ik} \neq -\vec{a}^{P}_{ki}}$

Composición de aceleraciones angulares



Ley de composición de velocidades angulares

$$\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01}$$

Derivamos respecto al tiempo desde el sólido "1"

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{21}}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{20}}{\mathrm{d}t}\right|_1 + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{01}}{\mathrm{d}t}\right|_1$$

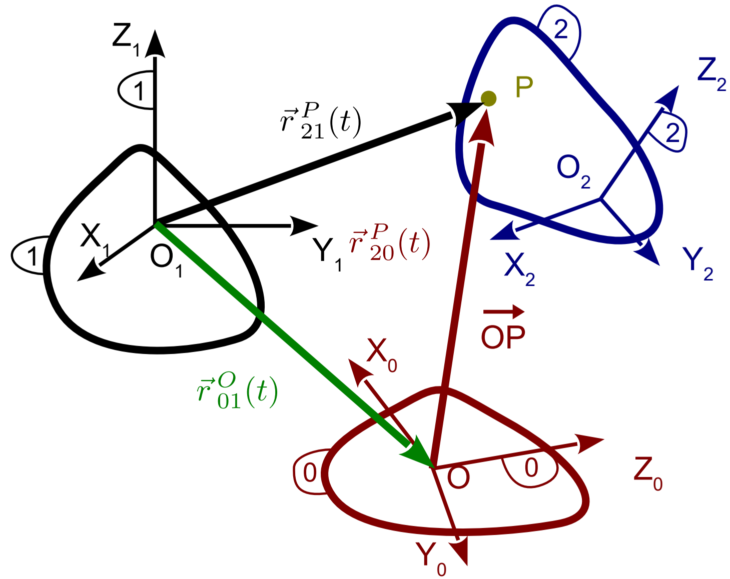
$$\vec{\alpha}_{21} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{20}}{\mathrm{d}t}\right|_1 + \vec{\alpha}_{01} = \overset{\vec{\alpha}_{20}}{\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{20}}{\mathrm{d}t}\right|_0} + \vec{\omega}_{01}\times\vec{\omega}_{20} + \vec{\alpha}_{01}$$

Ley de composición de aceleraciones angulares

$$\boxed{\vec{\alpha}_{21} = \vec{\alpha}_{20} + \vec{\alpha}_{01} + \vec{\omega}_{01}\times\vec{\omega}_{20}}$$

$$\boxed{\vec{\alpha}_{ij} = \vec{\alpha}_{ik} + \vec{\alpha}_{kj} + \vec{\omega}_{kj}\times\vec{\omega}_{ik}} \qquad \{ij\} = \{ik\} + \{kj\}$$

Tomando i=j $\quad \vec{\alpha}_{ii} = \vec{0} = \vec{\alpha}_{ik} + \vec{\alpha}_{ki} + \cancelto{0}{\vec{\omega}_{ki}\times\vec{\omega}_{ik}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{\alpha}_{ik} = -\vec{\alpha}_{ki}}$



Velocidades

$$\vec{v}^{\,P}_{21}(t) = \vec{v}^{\,P}_{20} + \vec{v}^{\,O}_{01} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{r}^{\,P}_{20}$$

Instantánea $\vec{v}^{\,P}_{21} = \vec{v}^{\,P}_{20} + \vec{v}^{\,P}_{01}$

$\vec{v}^{\,P}_{ij} = -\vec{v}^{\,P}_{ji}$

Velocidades angulares

$$\vec{\omega}_{21}(t) = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01}$$

$\vec{\omega}_{ij} = -\vec{\omega}_{ji}$

Aceleraciones

$$\vec{a}^{\,P}_{21}(t) = \vec{a}^{\,P}_{20} + \vec{a}^{\,O}_{01} + \vec{\alpha}_{01} \times \vec{r}^{\,P}_{20} + \vec{\omega}_{01} \times (\vec{\omega}_{01} \times \vec{r}^{\,P}_{20}) + 2\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}^{\,P}_{20}$$

Instantánea $\vec{a}^{\,P}_{21} = \vec{a}^{\,P}_{20} + \vec{a}^{\,P}_{01} + 2\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}^{\,P}_{20}$

$\vec{a}^{\,P}_{ij} \neq -\vec{a}^{\,P}_{ji}$

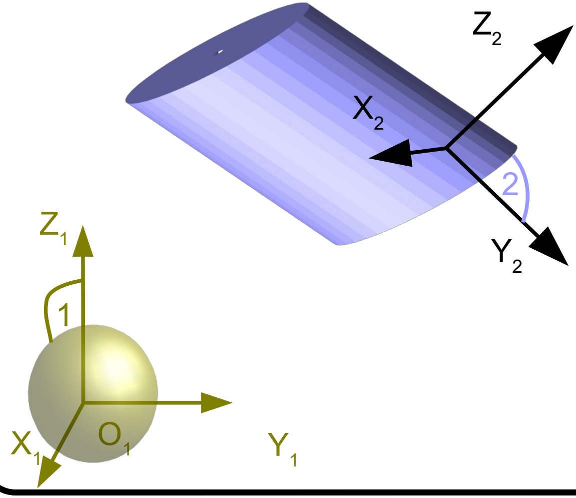
Aceleraciones angulares

$$\vec{\alpha}_{21}(t) = \vec{\alpha}_{20} + \vec{\alpha}_{01} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{\omega}_{20}$$

$\vec{\alpha}_{ij} = -\vec{\alpha}_{ji}$

Índice

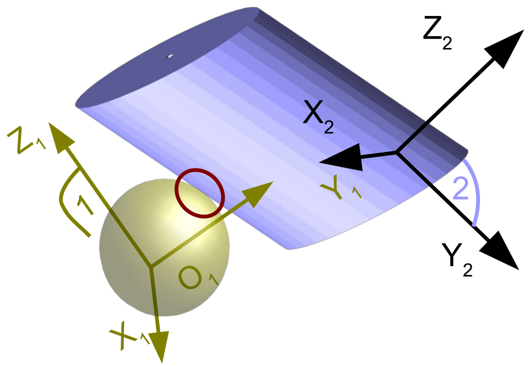
- Introducción
- Derivación en triedros móviles
- Notación y definiciones
- Composición de velocidades
  - Traslaciones
  - Rotaciones
- Composición de aceleraciones
  - Traslaciones
  - Rotaciones
- Pares cinemáticos. Sólidos en contacto puntual
- Dinámica en sistemas de referencia no inerciales



El sólido rígido **libre** tiene 6 grados de libertad

La reducción cinemática en cualquier punto tiene 6 componentes independientes

$$\{\vec{\omega}_{21};\vec{v}^{O}_{21}\}$$



El sólido rígido vinculado tiene sus movimientos limitados, por tanto tiene menos grados de libertad

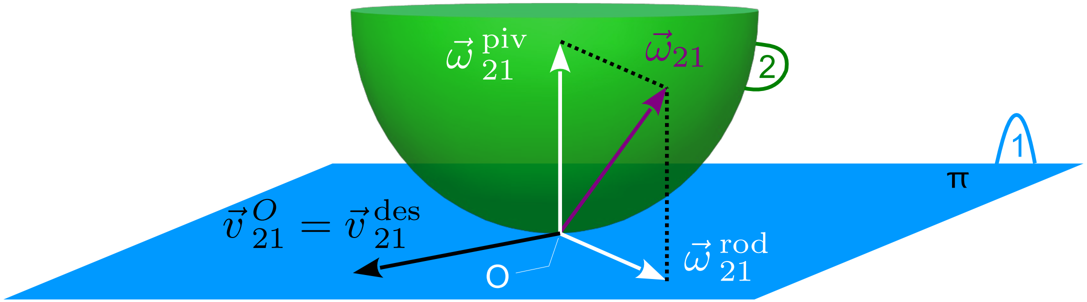
El numero de componentes independientes de la reducción cinemática es igual al número de grados de libertad

Un par de sólidos vinculados y en movimiento relativo es un **par cinemático**

Sólidos en contacto puntual (par esférico instantáneo)

Las superficies de los sólidos están siempre en **contacto puntual**

π es el plano tangente común



$$\vec{\omega}_{21} = \overbrace{\vec{\omega}^{\text{rod}}_{21}}^{\parallel\,\pi} + \overbrace{\vec{\omega}^{\text{piv}}_{21}}^{\perp\,\pi}$$

$$\vec{v}^{O}_{21} = \overbrace{\vec{v}^{\text{des}}_{21}}^{\parallel\,\pi} + \overbrace{\vec{0}}^{\perp\,\pi}$$

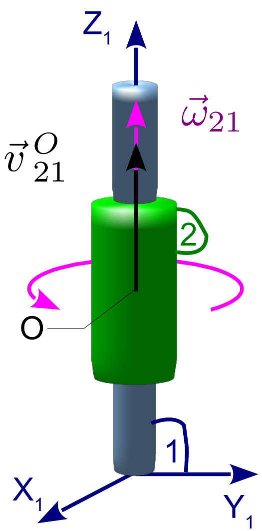
$\vec{\omega}^{\text{rod}}_{21}$ rodadura: es la componente de la rotación paralela al plano π

$\vec{\omega}^{\text{piv}}_{21}$ pivotamiento es la componente de la rotación perpendicular al plano π

$\vec{v}^{\text{des}}_{21}$ es la velocidad de desplazamiento, paralela al plano π

La semiesfera tiene 5 grados de libertad

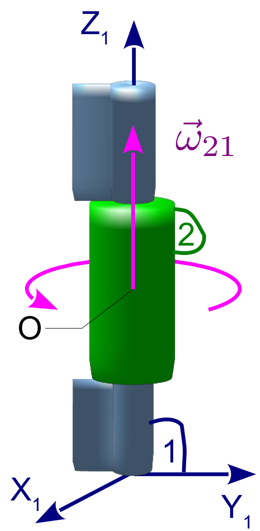
Par cilíndrico	Par de revolución	Par esférico	Par helicoidal



$$\vec{\omega}_{21} = [0,0,\omega_z]$$
$$\vec{v}^{\,O}_{21} = [0,0,v_z]$$

Cojinete de sustentación

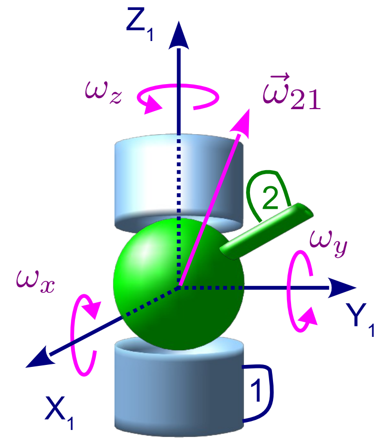
2 grados de libertad



$$\vec{\omega}_{21} = [0,0,\omega_z]$$
$$\vec{v}^{\,O}_{21} = [0,0,0]$$

Bisagra

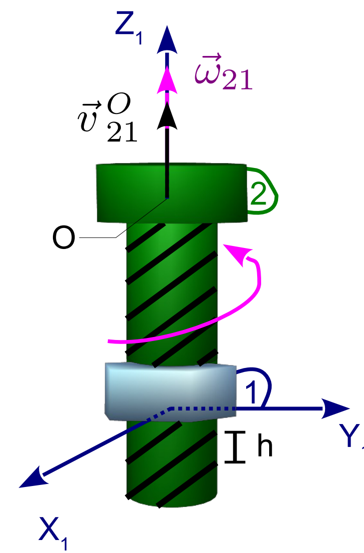
1 grado de libertad



$$\vec{\omega}_{21} = [\omega_x,\omega_y,\omega_z]$$
$$\vec{v}^{\,O}_{21} = [0,0,0]$$

Rótula

3 grados de libertad



$$\vec{\omega}_{21} = [0,0,\omega_z]$$
$$\vec{v}^{\,O}_{21} = [0,0,\omega_z h/2\pi]$$

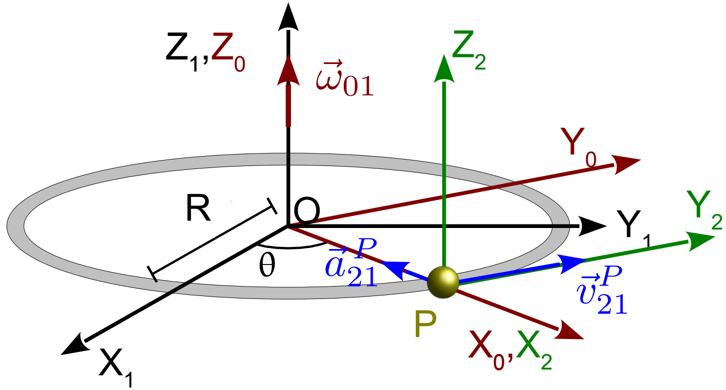
Tornillo

1 grado de libertad

Índice

- Introducción
- Derivación en triedros móviles
- Notación y definiciones
- Composición de velocidades
  - Traslaciones
  - Rotaciones
- Composición de aceleraciones
  - Traslaciones
  - Rotaciones
- Pares cinemáticos. Sólidos en contacto puntual
- Dinámica en sistemas de referencia no inerciales

- Consideramos un punto material que realiza un movimiento circular con velocidad angular constante



  - Movimiento {01}

$$\vec{v}_{01}^{O} = \vec{0} \qquad \vec{a}_{01}^{O} = \vec{0}$$

$$\vec{\omega}_{01} = \dot{\theta}\,\vec{k}_1 = \omega_0\,\vec{k}_1 \qquad \vec{\alpha}_{01} = \vec{0}$$

  - Movimiento {20}

$$\vec{v}_{20}^{P} = \vec{0} \qquad \vec{a}_{20}^{P} = \vec{0}$$

$$\vec{\omega}_{20} = \vec{0} \qquad \vec{\alpha}_{20} = \vec{0}$$

  - Movimiento {21}

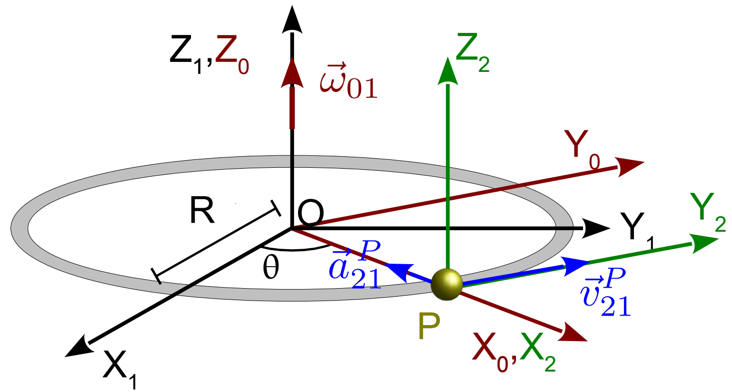
$$\vec{v}_{21}^{P} = \vec{v}_{20}^{P} + \vec{v}_{01}^{P} = R\omega_0\,\vec{\jmath}_0$$

$$\vec{a}_{21}^{P} = \vec{a}_{20}^{P} + \vec{a}_{01}^{P} + 2\vec{\omega}_{01}\times\vec{v}_{20}^{P} = -R\omega_0^2\,\vec{\imath}_0$$

$$\vec{a}_{01}^{P} = \vec{a}_{01}^{O} + \vec{\alpha}_{01}\times\overrightarrow{OP} + \vec{\omega}_{01}\times(\vec{\omega}_{01}\times\overrightarrow{OP}) = -R\omega_0^2\,\vec{\imath}_0$$

- Aplicamos la Segunda Ley de Newton en el sistema $OX_1Y_1Z_1$ para obtener la fuerza

$$\vec{F} = m\vec{a}_{21}^{P} = -mR\,\omega_0^2\,\vec{\imath}_0$$



- Ahora aplicamos la Segunda Ley de Newton en el sistema $OX_2Y_0Z_0$ para obtener la aceleración

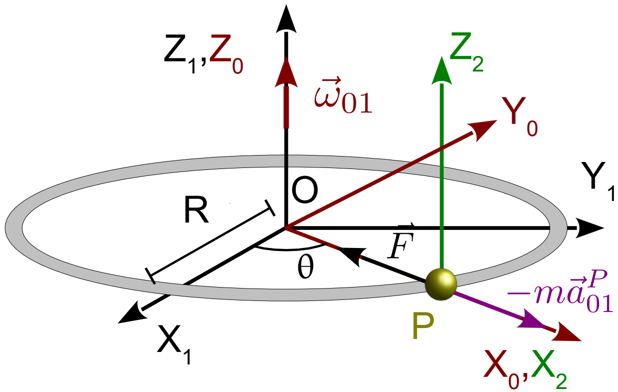
$$m\,\vec{a}_{20}^{P} = \vec{F} = -m\omega_0^2 R\,\vec{\imath}_0 \Longrightarrow \vec{a}_{20}^{P} \neq \vec{0}$$

  - Es contradictorio con lo que sabemos del movimiento {20} $\vec{a}_{20}^{P} = \vec{0}$
  - ¿La segunda Ley de Newton no funciona?
  - Las leyes de Newton tienen que aplicarse en un S.R.I.
    - El sistema “1” SÍ es un SRI

      El sistema “0” NO es un SRI: $\vec{\omega}_{01} \neq \vec{0}$
  - Para aplicar la Segunda Ley de Newton en un S.R.N.I. hay que corregirla con la fuerzas de inercia

Sistemas de referencia no inerciales

- ¿Hay alguna forma de analizar el problema desde el sistema “0”?



  - Usamos el Teorema de Coriolis

$$m\vec{a}^P_{20} = m\vec{a}^P_{21} - m\vec{a}^P_{01} - 2m\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}^P_{20}$$

$$m\vec{a}^P_{21} = \vec{F} = -mR\,\omega_0^2\,\vec{\imath}_0$$

$$m\vec{a}^P_{01} = \cancelto{0}{m\vec{a}^O_{01}} + \cancelto{0}{\vec{\alpha}} \times \overrightarrow{OP} + \vec{\omega}_{01} \times (\vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OP}) = -mR\,\omega_0^2\,\vec{\imath}_0$$

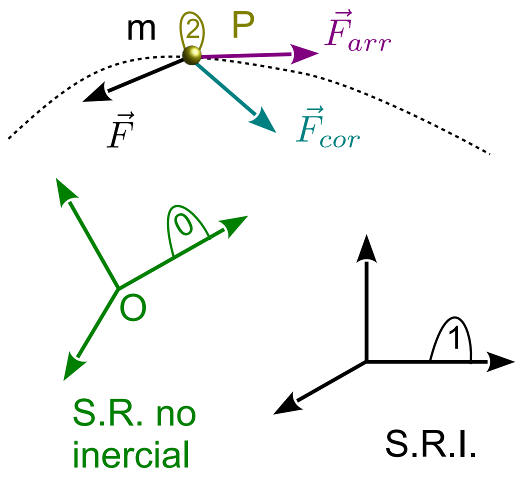
$$2m\,\vec{\omega}_{01} \times \cancelto{0}{\vec{v}^P_{20}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow\quad m\vec{a}^P_{20} = \vec{F} - m\vec{a}^P_{01} = \vec{0}$$

  - Sale que en el sistema “0” la partícula tiene aceleración nula, como debe ser
  - Para poder analizar la dinámica en el sistema “0” hemos tenido que corregir la Segunda Ley introduciendo fuerzas de inercia
  - $-ma^P_{01}$ es, en este caso, la fuerza centrífuga, que no es la reacción de la centrípeta

- Segunda Ley de Newton en un sistema no inercial en el caso general ($\boldsymbol{\omega}_{01} \neq \mathbf{0}$ y/o $\mathbf{a}^O_{01} \neq \mathbf{0}$)

$$\boxed{m\vec{a}^P_{20} = \vec{F} - m\vec{a}^P_{01} - 2m\,\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}^P_{20} = \vec{F} + \vec{F}_{arr} + \vec{F}_{cor}}$$

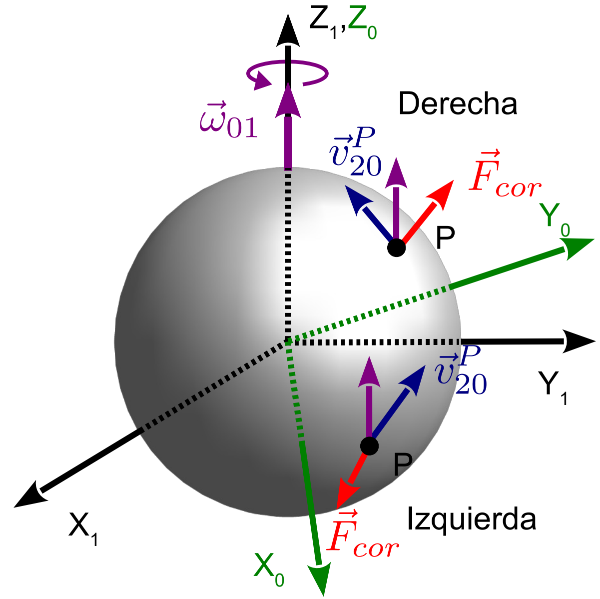


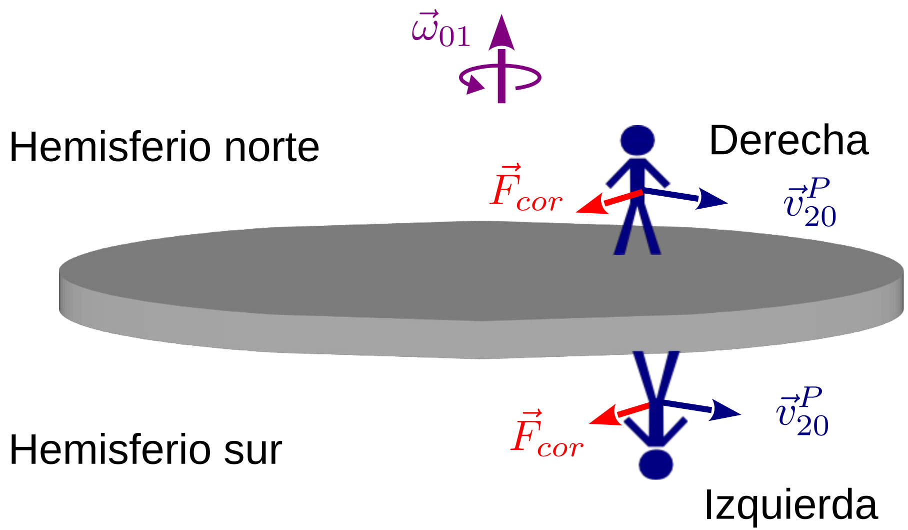
  - **F** es la fuerza neta real en el S.R.I (debida a interacciones)
  - $\mathbf{F}_{arr}$ es la fuerza de arrastre $\vec{F}_{arr} = -m\vec{a}^P_{01}$
  - $\mathbf{F}_{cor}$ es la fuerza de Coriolis $\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}^P_{20}$
  - Propiedades de la fuerzas de inercia
    - Son aparentes o ficticias para el observador inercial, pero para el no inercial tienen los mismos efectos que una fuerza real (realizan trabajo, pueden ser conservativas)
    - Son proporcionales a la masa
    - No añaden incógnitas al problema dinámico {20} (conocido el movimiento {01})

- El sólido 2 es un punto P moviéndose con velocidad $\mathbf{v}_0$ paralela la superficie de la Tierra

$$m\vec{a}^{P}_{20}(t) = m\vec{a}^{P}_{21} - m\vec{a}^{P}_{01} - 2m\vec{\omega}_{01}\times\vec{v}^{P}_{20}$$

- El término de Coriolis empuja hacia la derecha en el hemisferio norte y hacia la izquierda en el hemisferio sur





Fuerza de Coriolis

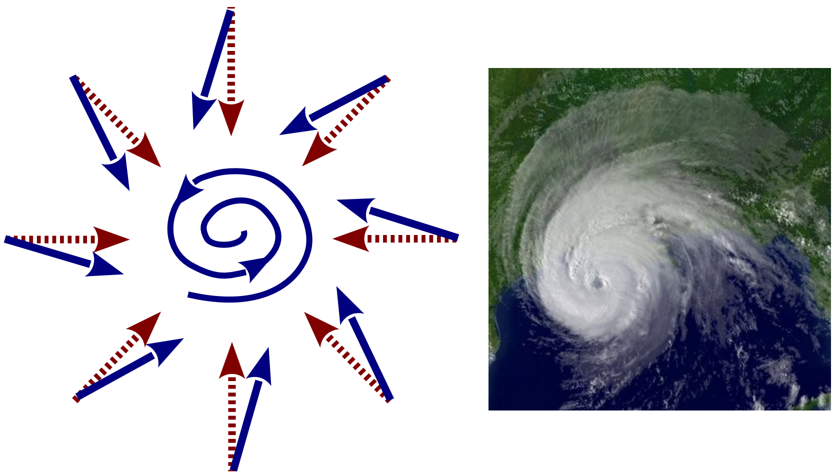
- Este efecto se deja sentir sólo en sistemas de tamaño muy grande o que se mueven muy rápido, o en los que se acumula el efecto en el tiempo
  - Huracanes
  - Péndulo de Foucault
  - El efecto en el sentido de giro del agua en los desagües es despreciable

Fuerza de Coriolis: sentido de giro de los huracanes

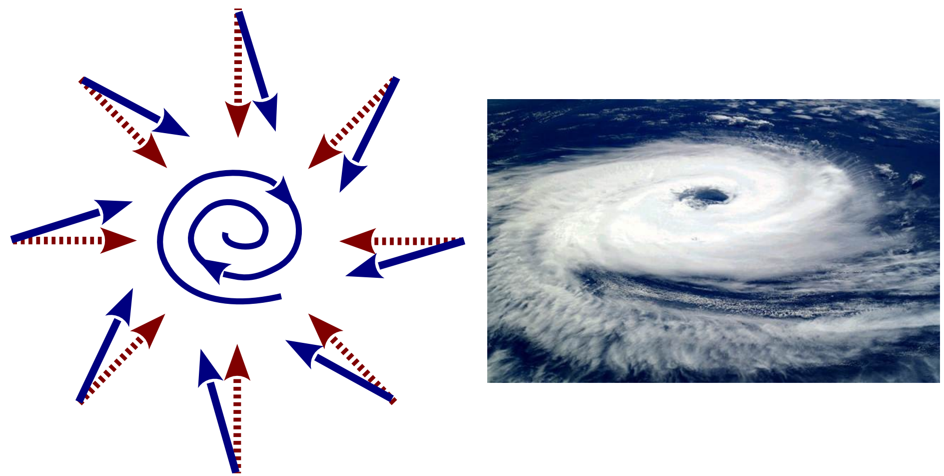
En las tormentas, una zona de bajas presiones relativas atrae el aire formando un corriente convergente de aire

En el hemisferio norte el flujo de aire se desvía hacia la derecha, y en el hemisferio sur hacia la izquierda, formando la estructura espiral del torbellino

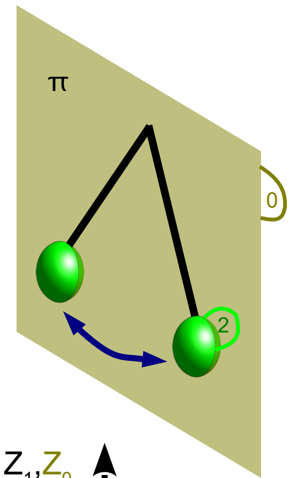
Hemisferio norte

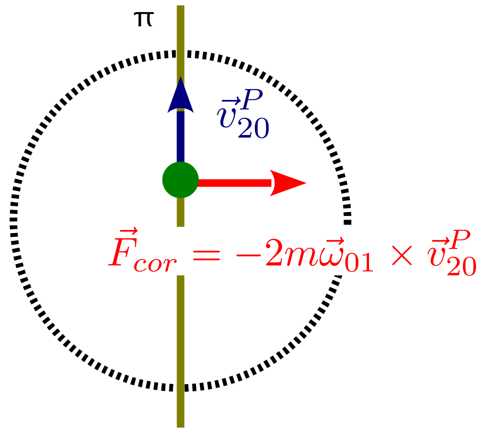


Hemisferio sur

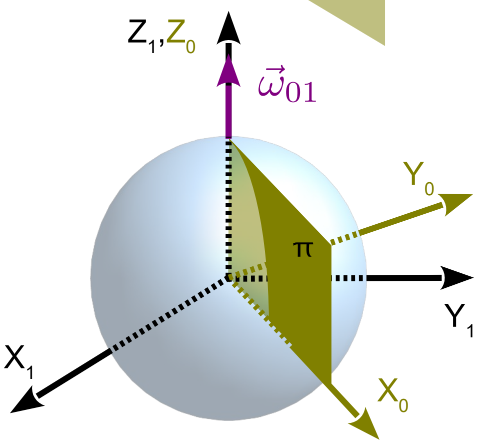


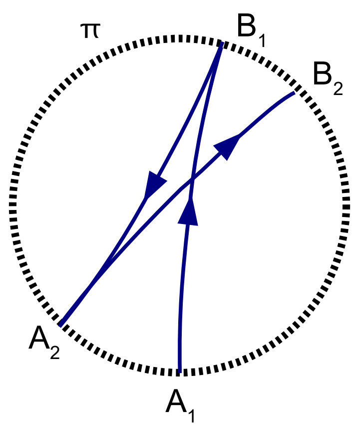
El término de Coriolis hace rotar el plano de oscilación de un péndulo





En cada oscilación, el término de Coriolis empuja al péndulo hacia la derecha (en el hemisferio norte)

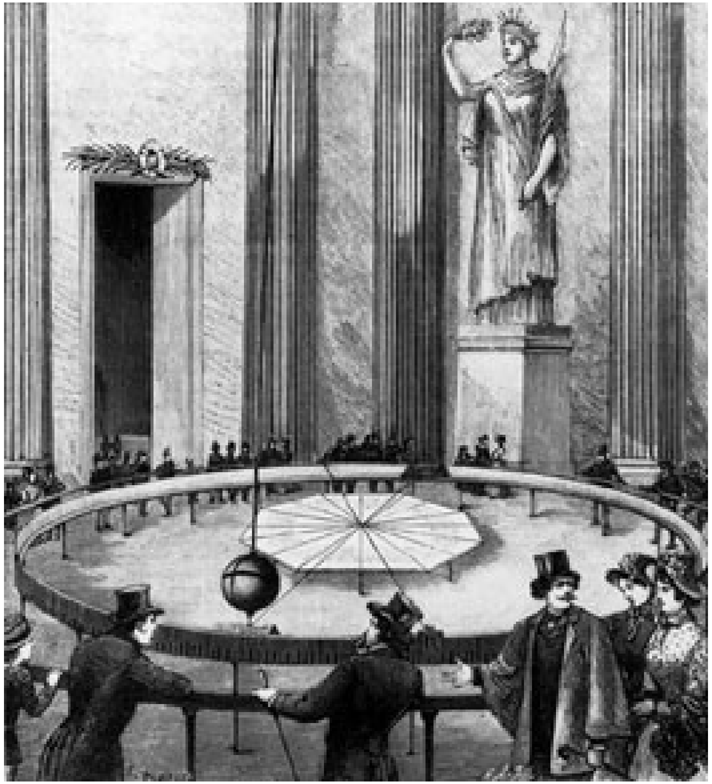




A lo largo del tiempo, el plano de oscilación gira respecto a la Tierra, pero no respecto al espacio (si estuviese en el Polo Norte o Sur). Esto demuestra que la Tierra tiene un movimiento de rotación

Fuerza de Coriolis: péndulo de Foucault

Experimento de Foucault en
el Pantheon en París, 1851



Péndulo de Foucault en
el Pantheon en París,
en la actualidad