



MECÁNICA RACIONAL, 2º CURSO, INGENIERÍA CIVIL, 2019/20

BOLETÍN DE PROBLEMAS DEL TEMA 2: MOVIMIENTO RELATIVO

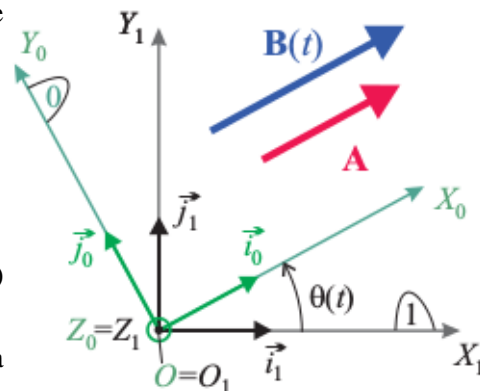
1. Los triedros $O_1X_1Y_1Z_1$ y $OX_0Y_0Z_0$ están definidos de modo que sus orígenes y los ejes O_1Z_1 coinciden. El triedro “1” está en reposo, mientras que el triedro “0” gira respecto al “1” con velocidad angular uniforme $\vec{\omega}_{01} = \omega \vec{k}_1 = \omega \vec{k}_0$, de modo que el ángulo θ indicado en la figura depende del tiempo como $\theta(t) = \omega t$.

- a) Calcula las derivadas respecto al tiempo de los vectores de la base del triedro “0” vistos desde el triedro “1”.
- b) Dado el vector $\vec{A}(t) = a \vec{i}_0$, con a constante, calcula

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_1, \quad \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_0$$

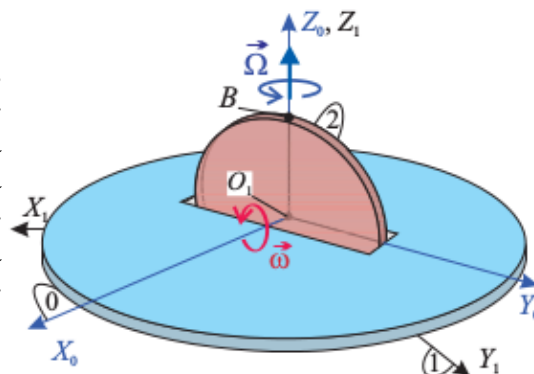
Expresa el resultado en los vectores de la base móvil (triadro “0”) y la base fija (triadro “1”).

- c) Haz el mismo cálculo para el vector $\vec{B} = bt \vec{i}_0$, siendo b una constante.

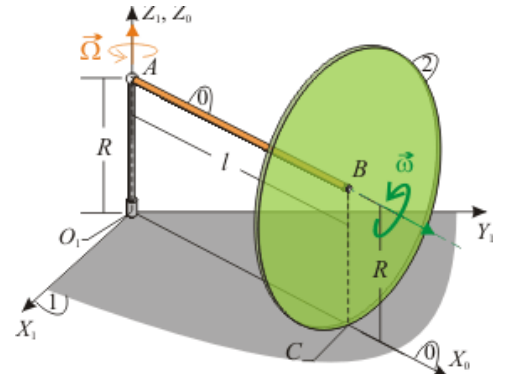


2. Una plataforma circular gira alrededor de un eje perpendicular a ella que pasa por su centro con velocidad angular uniforme ω . Un coche se mueve radialmente desde el centro de la plataforma hacia fuera con velocidad uniforme v_c . Encuentra la expresión de la velocidad del coche visto desde la plataforma y desde un observador en reposo absoluto.

3. En la figura se muestra un disco de radio R (sólido “2”), que gira con velocidad angular $\omega_{20} = \omega$, constante, alrededor del eje perpendicular a él, O_1X_0 . Dicho eje está rígidamente unido a una plataforma (sólido “0”), que gira también con velocidad angular constante $\omega_{01} = \Omega$, alrededor del eje vertical O_1Z_1 de un sistema de referencia fijo $O_1X_1Y_1Z_1$ (sólido “1”). Determina las magnitudes cinemáticas \vec{v}_{21}^B y \vec{a}_{21}^B en el instante representado en la figura.

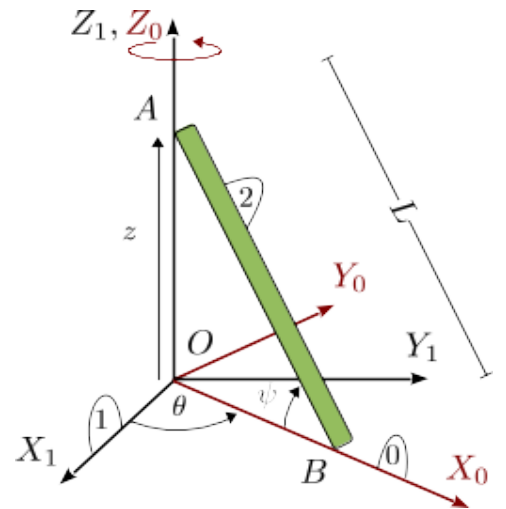


4. El sistema de la figura está formado por una varilla AB de longitud l (sólido "0"), cuyo extremo A está fijado en el eje vertical O_1Z_1 , a una altura R sobre el plano horizontal fijo $O_1X_1Y_1$ (sólido "1"). La varilla AB gira alrededor de O_1Z_1 con una velocidad angular constante Ω , permaneciendo siempre perpendicular a dicho eje vertical fijo. El extremo B del sólido "0" está articulado al centro de un disco de radio R (sólido "2"), de modo que la varilla es siempre perpendicular al disco. El disco gira con una velocidad angular constante ω , coincidiendo su eje de giro con la varilla.



- a) Caracteriza los movimientos $\{01\}$, $\{20\}$ y $\{21\}$ (reducciones cinemáticas).
- b) Obtén la expresión de la velocidad \vec{v}_{21}^C del punto de contacto del disco con el plano fijo $O_1X_1Y_1$, (punto C) en términos de los datos del problema. ¿Qué relación debe existir entre las velocidades angulares ω y Ω para que el disco ruede sin deslizar sobre el plano?
- c) Obtén las expresiones de la aceleración angular del movimiento 21 y de la aceleración \vec{a}_{21}^B del centro del disco (punto B). Calcula la aceleración del punto de contacto C perteneciente al disco cuando éste rueda sin deslizar sobre el plano $O_1X_1Y_1$.

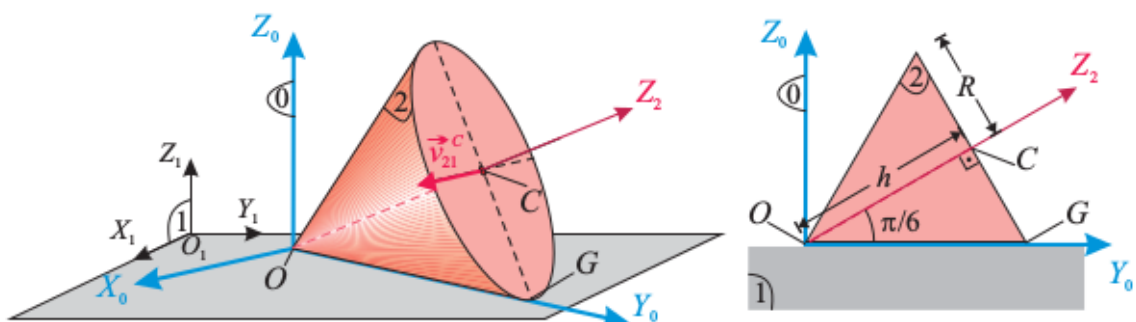
5. El extremo A de una barra de longitud L desliza sobre el eje OZ_1 . La barra gira respecto al eje OZ_1 , de modo que está siempre contenida en el plano OX_0Z_0 y el punto B está siempre en el eje OX_0 . Este plano gira respecto al eje OZ_1 con eje permanente OZ_0 . En el instante inicial el punto A coincidía con O y el punto B estaba sobre el eje OX_1 .



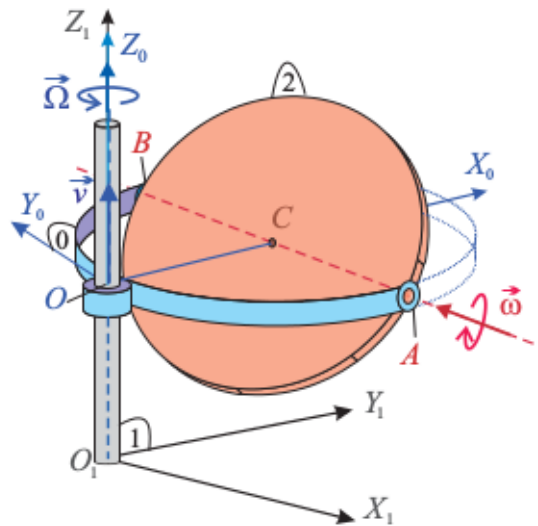
- a) Determina las reducciones cinemáticas de los movimientos $\{01\}$, $\{20\}$ y $\{21\}$, así como sus derivadas. El resultado debe quedar en función de z , ψ , θ y sus derivadas temporales.
- b) Supongamos que la velocidad del punto A respecto al eje es constante y de magnitud v_0 . Encuentra la ecuación diferencial que determina la función $\psi(t)$.

6. Un cono recto de radio R en su base y altura $h = \sqrt{3}R$ (sólido "2"), se mueve rodando sin deslizar sobre el plano fijo $O_1X_1Y_1$ (sólido "1"), en el cual apoya, en cada instante, una generatriz OG . La velocidad del centro C de la base del cono, medida desde el sistema de referencia ligado al sólido "1", tiene módulo constante de valor v_0 . para facilitar la descripción del movimiento, se introduce un sistema de referencia $OX_0Y_0Z_0$ (sólido "0") con origen O en el vértice del cono, el eje OZ_0 siempre perpendicular al plano fijo "1", y cuyo eje OY_0 contiene en cada instante a la generatriz del cono en contacto con dicho plano.

- a) Reducciones cinemáticas de los movimientos relativos.
- b) Ejes de rotación y tipos de movimientos.
- c) Campos de aceleraciones.



7. El sistema de la figura consiste en una horquilla semicircular (sólido “0”), siempre contenida en un plano paralelo al fijo $O_1X_1Y_1$ (sólido “1”). El punto O de la horquilla (siempre el mismo) se desplaza con velocidad v a lo largo del eje O_1Z_1 , a la vez que este sólido “0” gira con velocidad angular constante Ω alrededor de dicho eje fijo. Un disco de radio R (sólido “2”), cuyo perímetro se ajusta a la horquilla, se mueve respecto a “0” girando alrededor de ul diámetro común AB , con velocidad angular constante ω . Teniendo en cuenta que los valores v , Ω y ω pueden ser positivos y negativos, determina:



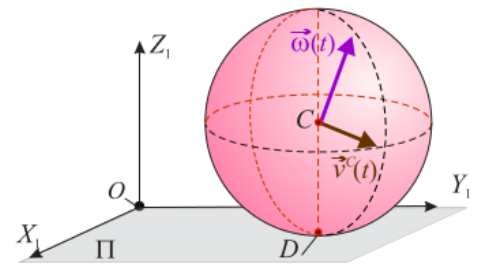
- a) La reducción cinemática del movimiento {21} ¿Bajo que condiciones puede ser una rotación instantánea?
- b) El eje de rotación y mínimo deslizamiento del movimiento {21}. ¿Cuál debe ser el valor de v para que el EIRMD pase por el centro del disco? Calcula en este caso la derivada temporal de la reducción canónica.

8. Una esfera de radio b (sólido “2”) se mueve en contacto con un plano $\Pi = OX_1Y_1$ (sólido “1”). El movimiento de la esfera queda completamente caracterizado, para todo instante de tiempo, por la reducción cinemática:

$$\vec{\omega}_{21}(t) = \frac{v_0}{b} \left(1 - \frac{v_0}{b}t \right) (2\vec{i}_1 + \vec{j}_1 + \vec{k}_1); \quad \vec{v}_{21}^C(t) = v_0 \left(\left(1 - \frac{v_0}{b}t \right) \vec{i}_1 + \vec{j}_1 \right)$$

donde C es el centro de la esfera, y v_0 un valor constante conocido.

- a) Indica los tipos de movimientos elementales que ejecuta la esfera a lo largo del tiempo.
- b) Indica, para todo instante de tiempo, si la esfera rueda, pivota o desliza en el punto de contacto con el plano.



9. Una partícula de masa m se encuentra en el interior de un tubo estrecho, el cual gira con velocidad angular uniforme ω en torno a un eje perpendicular al del tubo. Obtén las ecuaciones de movimiento para la partícula utilizando un sistema de referencia en reposo y otro asociado con la varilla (no inercial).

