Tema 8: Movimiento relativo

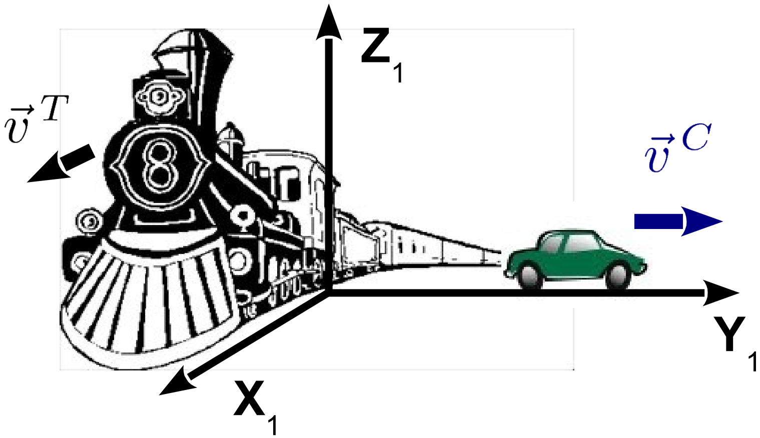
Física I, 1º Grado en Ingeniería Electrónica, Robótica y Mecatrónica

Departamento de Física Aplicada III

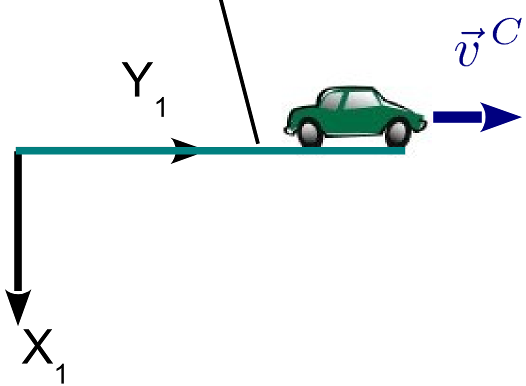
Escuela Técnica Superior de Ingeniería

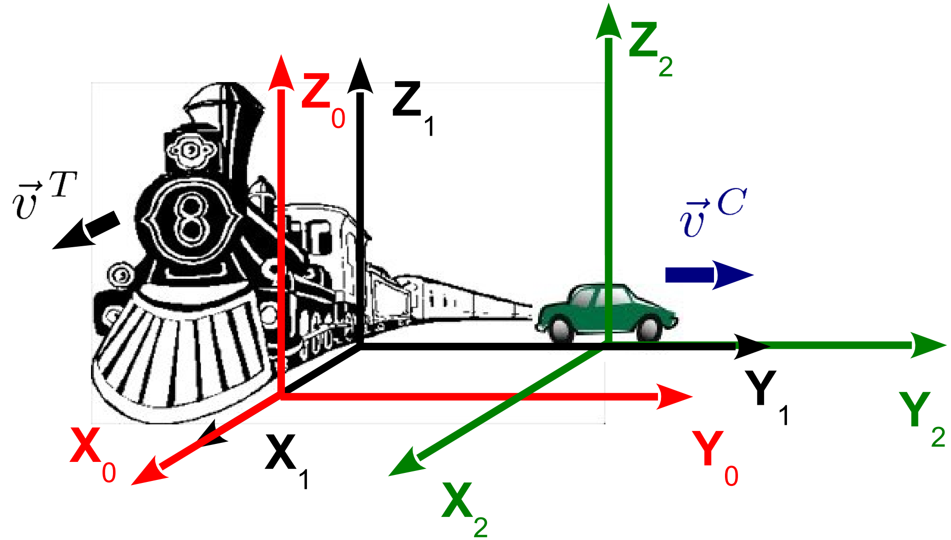
Universidad de Sevilla

Índice

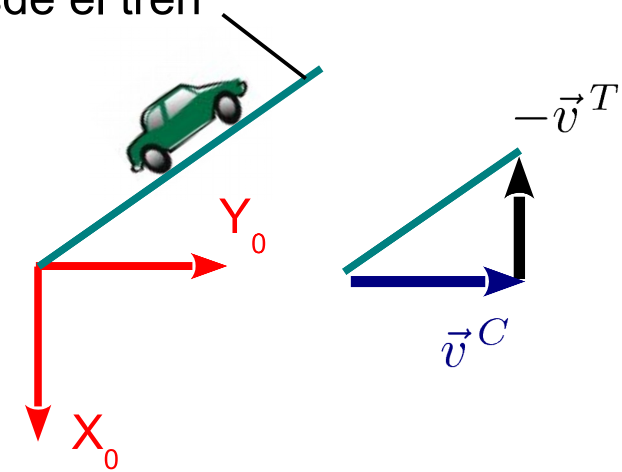


Trayectoria del coche vista desde el suelo

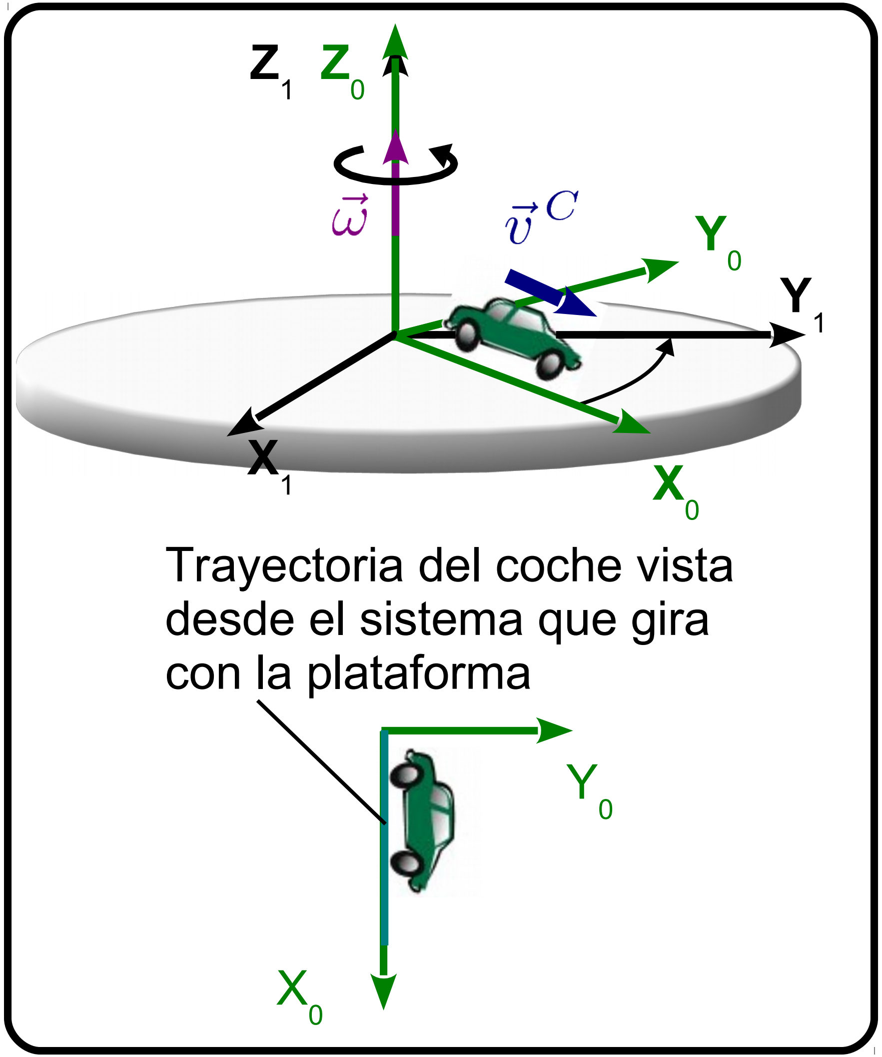


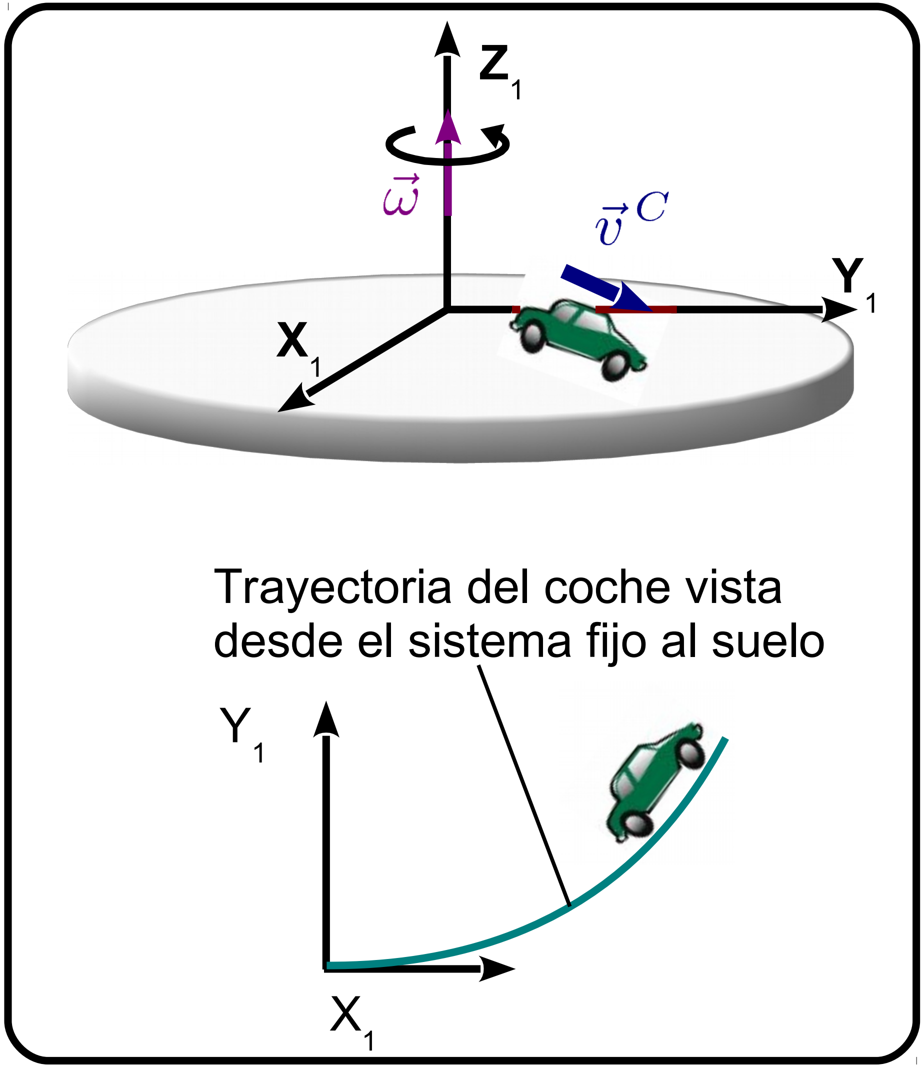


Trayectoria del coche vista desde el tren



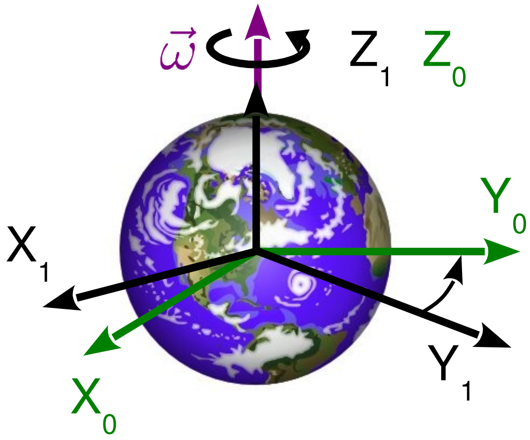
Movimiento relativo: rotación





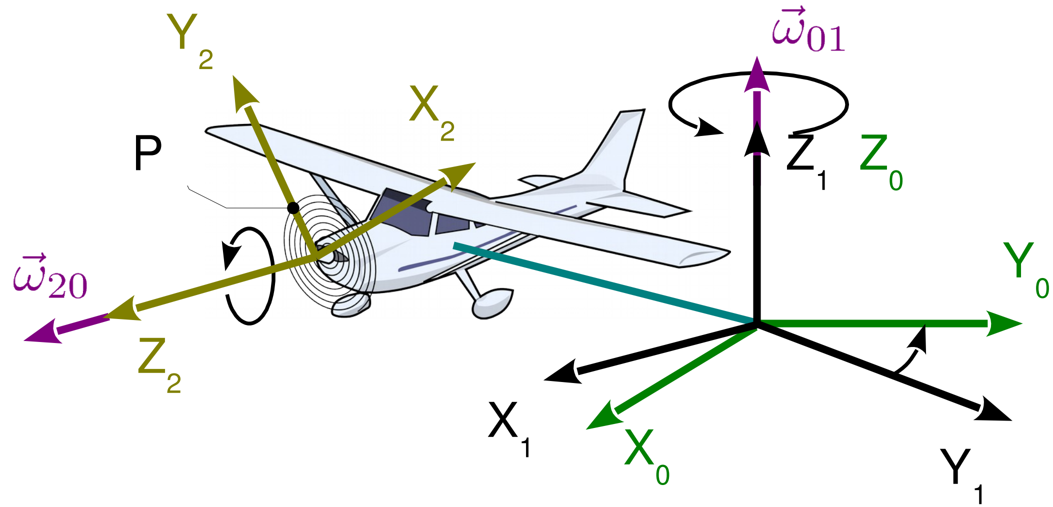
Rotación de la Tierra

Un sistema solidario a la tierra
es un sistema en rotación



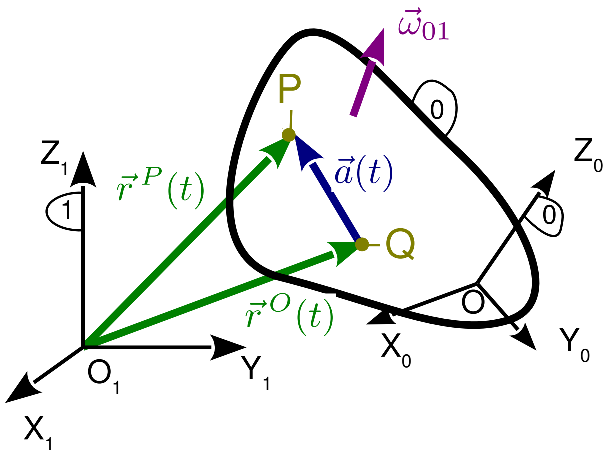
Composición de movimientos

El movimiento de un punto de la
hélice se describe más
fácilmente intercalando un
sistema de referencia auxiliar



Índice

- Introducción
- Derivación en triedros móviles
- Notación y definiciones
- Composición de velocidades
  - Traslaciones
  - Rotaciones
- Composición de aceleraciones
  - Traslaciones
  - Rotaciones



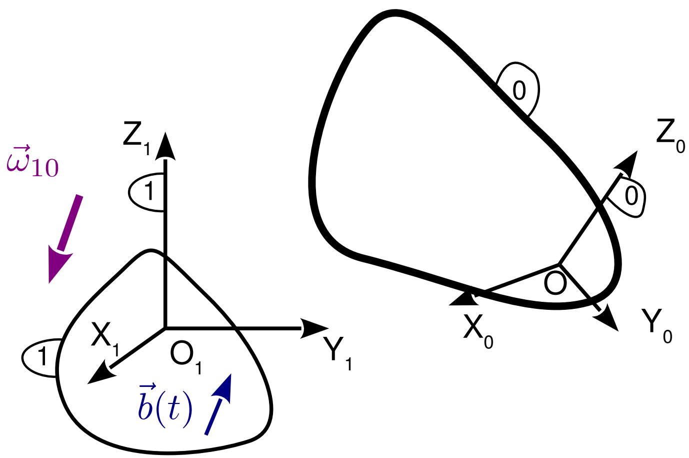
El vector **a**(t) se mueve solidariamente con el sólido (triedro) 0

$$\vec{a} = \overrightarrow{QP} = \vec{r}^{\,P} - \vec{r}^{\,Q}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \frac{\mathrm{d}\vec{r}^{\,P}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\vec{r}^{\,Q}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}^{\,P} - \vec{v}^{\,Q} = \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{QP}$$

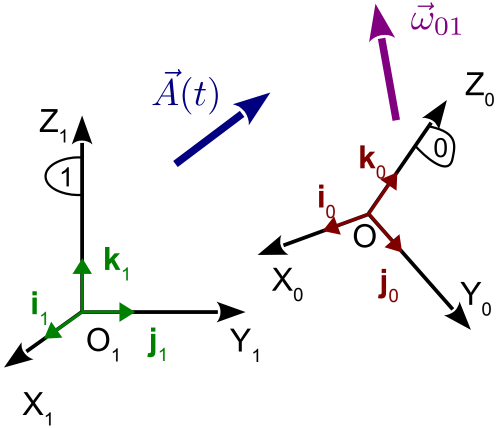
$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \vec{\omega}_{01} \times \vec{a}}$$

$\vec{\omega}_{01}$ es el vector rotación total instantáneo del movimiento del sólido 0 respecto al sólido 1



La fórmula también funciona a la inversa, suponiendo el sólido 0 en reposo y el 1 moviéndose

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}\right|_0 = \vec{\omega}_{10} \times \vec{b}$$



Los vectores de la base del triedro 0 se mueven respecto al triedro 1

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\imath}_0}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \vec{\omega}_{01} \times \vec{\imath}_0 \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\jmath}_0}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \vec{\omega}_{01} \times \vec{\jmath}_0 \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\vec{k}_0}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \vec{\omega}_{01} \times \vec{k}_0$$

Un vector cualquiera puede expresarse en los dos sistemas

$$\vec{A}(t) = A_x^{(1)}(t)\vec{\imath}_1 + A_y^{(1)}(t)\vec{\jmath}_1 + A_z^{(1)}(t)\vec{k}_1 = A_x^{(0)}(t)\vec{\imath}_0 + A_y^{(0)}(t)\vec{\jmath}_0 + A_z^{(0)}(t)\vec{k}_0$$

Variación temporal del vector **A**(t) respecto al triedro 1

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_0 + \vec{\omega}_{01} \times \vec{A}$$

Variación temporal del vector **A**(t) respecto al triedro 0

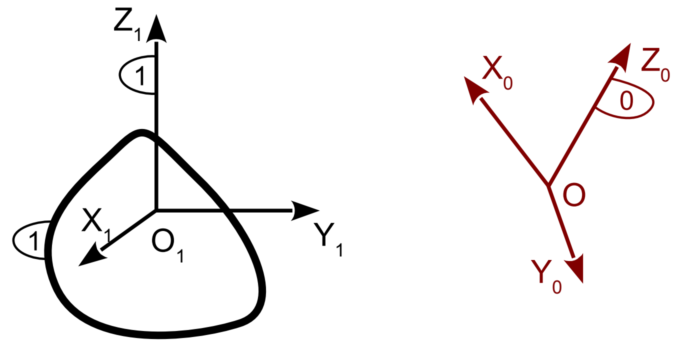
$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_0 = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_1 + \vec{\omega}_{10} \times \vec{A}$$

Índice

Notación y definiciones

Cada sólido rígido es un triedro infinito, tenga o no partes materiales

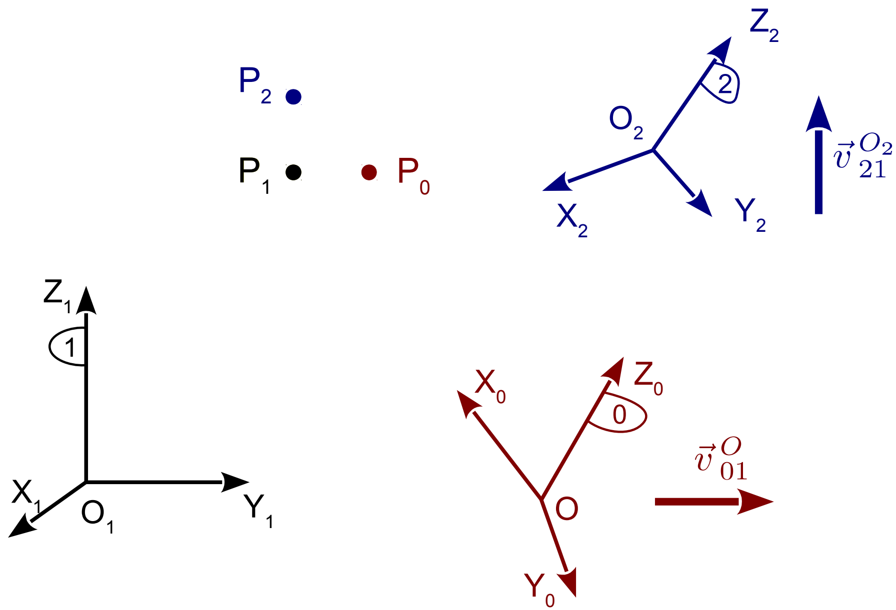
Al moverse, los sólidos se ”atraviesan” unos a otros



Cada punto geométrico del espacio pertenece simultáneamente a todos los sólidos definidos

En cada punto geométrico del espacio se superponen en cada instante varios puntos

En el instante posterior, cada uno de esos puntos superpuestos se mueve con su sólido correspondiente



Notación y definiciones

{ij} mov. del sólido ”i” respecto al sólido *observador* ”j”

Magnitudes cinemáticas

$\vec{\omega}_{ij}$ Velocidad angular del sólido “i” respecto al “j”

$\vec{\alpha}_{ij}$ Aceleración angular del sólido “i” respecto al “j”

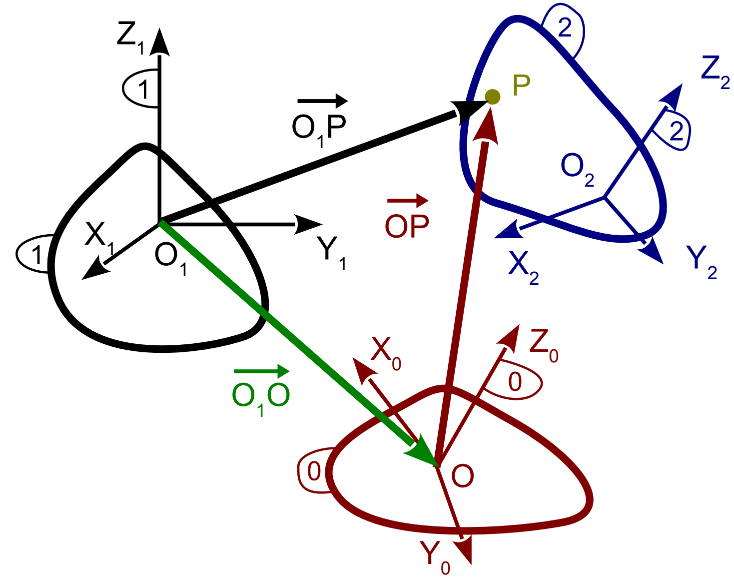
$\vec{r}^{P}_{ij}$ Vector de posición del punto P perteneciente al sólido “i” respecto al sólido “j”

$\vec{v}^{P}_{ij}$ Vector de velocidad del punto P perteneciente al sólido “i” respecto al sólido “j”

$\vec{a}^{P}_{ij}$ Vector de aceleración del punto P perteneciente al sólido “i” respecto al sólido “j”

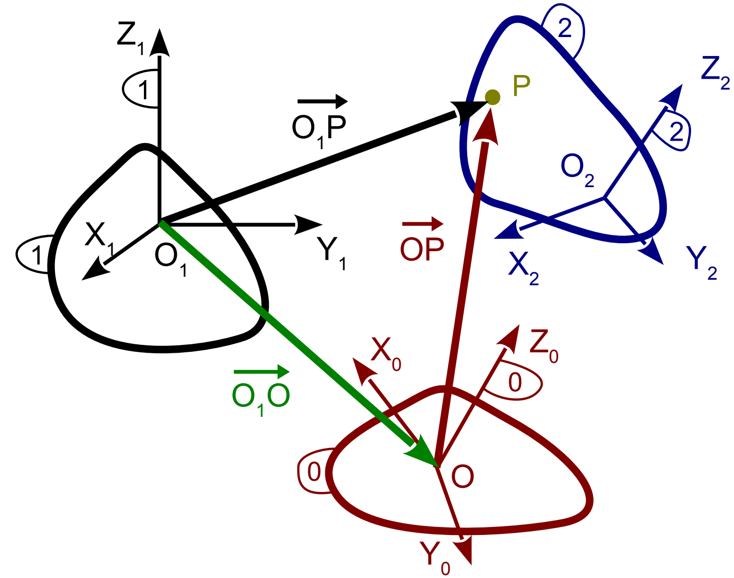
Si sólo hay tres sólidos

- ”1” sólido de referencia
- ”0” sólido intermedio
- ”2” sólido problema



{21} mov. absoluto	$\vec{r}^{\,P}_{21}$	$\vec{v}^{\,P}_{21} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}^{\,P}_{21}}{\mathrm{d}t}\right\|_1$	$\vec{a}^{\,P}_{21} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}^{\,P}_{21}}{\mathrm{d}t}\right\|_1$	$\vec{\omega}_{21}$	$\vec{\alpha}_{21} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{21}}{\mathrm{d}t}\right\|_1$
{20} mov. relativo	$\vec{r}^{\,P}_{20}$	$\vec{v}^{\,P}_{20} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}^{\,P}_{20}}{\mathrm{d}t}\right\|_0$	$\vec{a}^{\,P}_{20} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}^{\,P}_{20}}{\mathrm{d}t}\right\|_0$	$\vec{\omega}_{20}$	$\vec{\alpha}_{20} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{20}}{\mathrm{d}t}\right\|_0$
{01} mov. arrastre	$\vec{r}^{\,P}_{01}$	$\vec{v}^{\,P}_{01} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}^{\,P}_{01}}{\mathrm{d}t}\right\|_1$	$\vec{a}^{\,P}_{01} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}^{\,P}_{01}}{\mathrm{d}t}\right\|_1$	$\vec{\omega}_{01}$	$\vec{\alpha}_{01} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{01}}{\mathrm{d}t}\right\|_1$

Para dos sólidos genéricos "i", "j"



$$\vec{v}_{ij}^{P} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{ij}^{P}}{\mathrm{d}t}\right|_{j} \qquad \vec{a}_{ij}^{P} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{ij}^{P}}{\mathrm{d}t}\right|_{j} \qquad \vec{\alpha}_{ij} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{ij}}{\mathrm{d}t}\right|_{j}$$

Campos de velocidad y aceleración

$$\vec{v}_{ij}^{P} = \vec{v}_{ij}^{Q} + \vec{\omega}_{ij} \times \overrightarrow{QP}$$

$$\vec{a}_{ij}^{P} = \vec{a}_{ij}^{Q} + \vec{\alpha}_{ij} \times \overrightarrow{QP} + \vec{\omega}_{ij} \times (\vec{\omega}_{ij} \times \overrightarrow{QP})$$

El movimiento entre dos sólidos se puede descomponer en dos movimientos introduciendo un sólido intermedio

$\{ i\ j \} = \{ i\ k \} + \{ k\ j \}$ → Leyes de composición

Índice

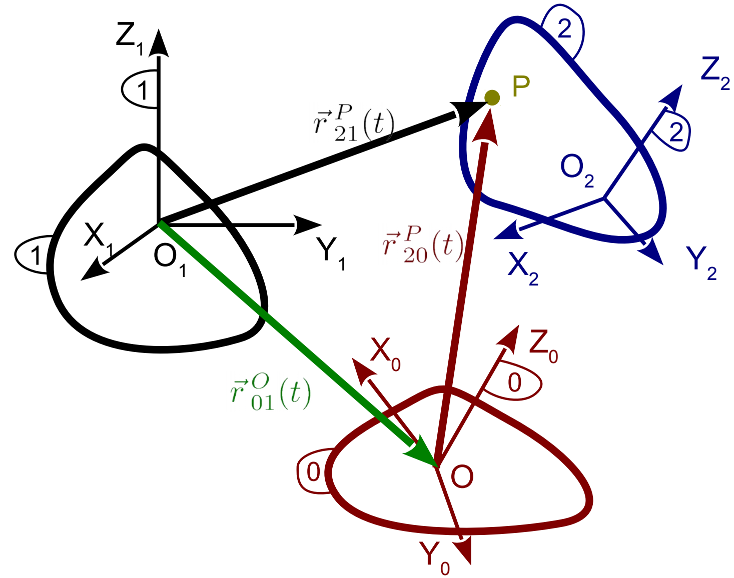
Composición de velocidades

En un instante dado

$$\overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OP}$$

Esta expresión no es derivable en el tiempo

El punto P no está asignado a un sólido determinado



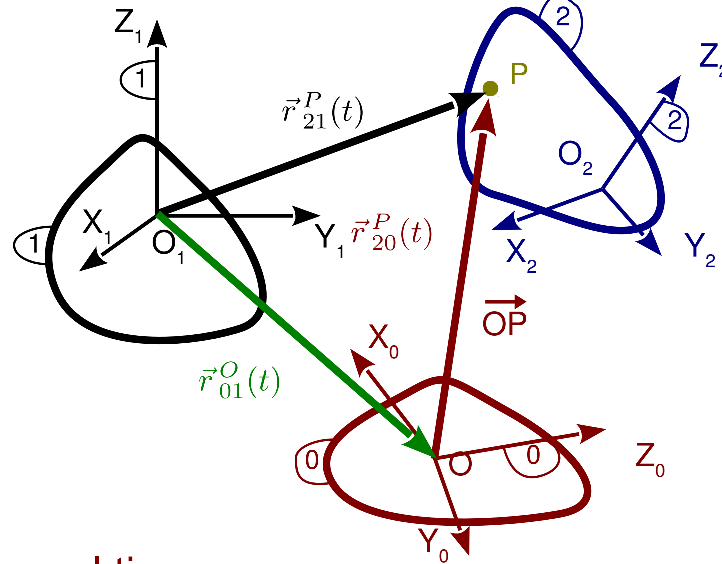
Para cualquier instante

$$\vec{r}_{21}^{\,P}(t) = \vec{r}_{01}^{\,O}(t) + \vec{r}_{20}^{\,P}(t)$$

Cada uno de los vectores esta asociado a un punto de un sólido

Esta expresión es derivable en el tiempo

Derivamos respecto del tiempo $\vec{r}^{P}_{21}(t) = \vec{r}^{O}_{01}(t) + \vec{r}^{P}_{20}(t)$



$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}^{P}_{21}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}^{O}_{01}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_1 + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}^{P}_{20}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_1$$

$$\vec{v}^{P}_{21}(t) = \vec{v}^{O}_{01}(t) + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}^{P}_{20}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_0 + \vec{\omega}_{01}(t)\times\vec{r}^{P}_{20}$$

$$\vec{v}^{P}_{21}(t) = \vec{v}^{O}_{01}(t) + \vec{v}^{P}_{20}(t) + \vec{\omega}_{01}(t)\times\vec{r}^{P}_{20}$$

$$\boxed{\vec{v}^{P}_{21}(t) = \vec{v}^{O}_{01}(t) + \vec{v}^{P}_{20}(t) + \vec{\omega}_{01}(t)\times\vec{r}^{P}_{20}}$$

Derivable en el tiempo

Con validez instantánea

$$\vec{r}^{P}_{20} = \vec{r}^{P}_{00} = \overrightarrow{OP} \longrightarrow \vec{v}^{P}_{21} = \vec{v}^{P}_{20} + \vec{v}^{O}_{01} + \vec{\omega}_{01}\times\vec{r}^{P}_{00}$$

$$\vec{v}^{O}_{01} + \vec{\omega}_{01}\times\overrightarrow{OP}$$

$$\vec{v}^{P}_{01}$$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{v}^{P}_{21} = \vec{v}^{P}_{20} + \vec{v}^{P}_{01}}$$

No derivable en el tiempo

$$\boxed{\vec{v}^{P}_{ij} = \vec{v}^{P}_{ik} + \vec{v}^{P}_{kj}}$$

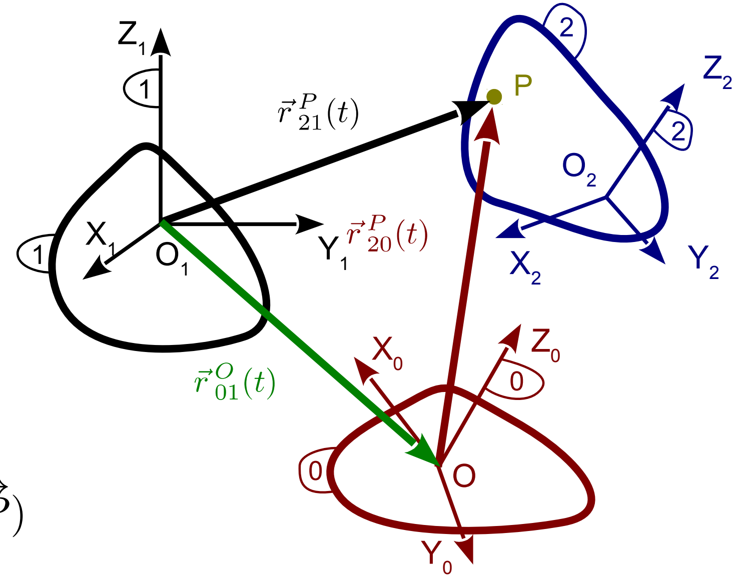
$$\boxed{\vec{v}^{P}_{ik} = -\vec{v}^{P}_{ki}}$$

Ley de composición de velocidades

$$\vec{v}^P_{21} = \vec{v}^P_{20} + \vec{v}^P_{01}$$

Ecuación del campo de velocidades

$$\vec{v}^O_{21} + \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{OP} = \vec{v}^O_{20} + \vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{OP} + \vec{v}^O_{01} + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OP}$$



Reagrupando

$$\cancelto{0}{\boxed{\vec{v}^O_{21} - \vec{v}^O_{20} - \vec{v}^O_{01}}} + (\vec{\omega}_{21} - \vec{\omega}_{20} - \vec{\omega}_{01}) \times \overrightarrow{OP} = \vec{0} \qquad (\forall\, \overrightarrow{OP})$$

Ley de composición de velocidades angulares

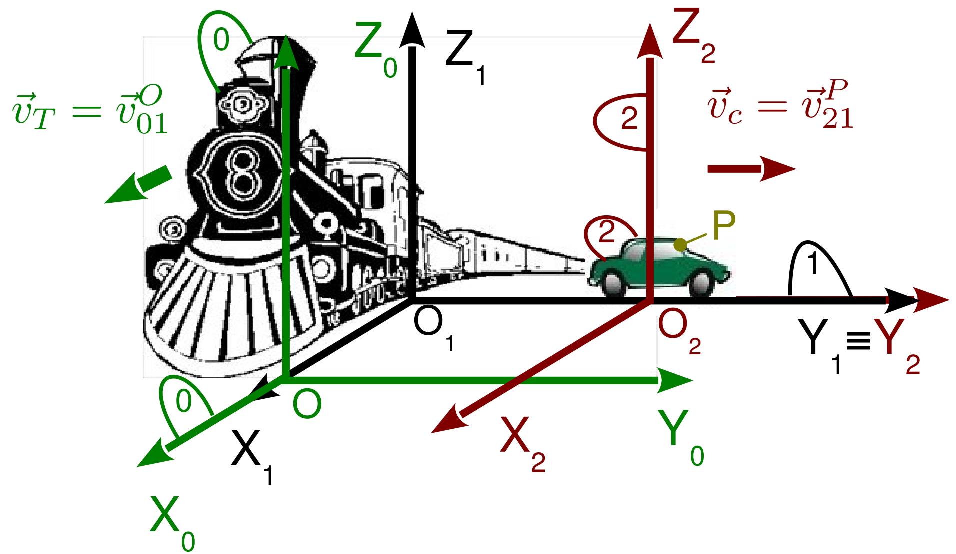
$$\boxed{\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01}} \qquad \boxed{\vec{\omega}_{ij} = \vec{\omega}_{ik} + \vec{\omega}_{kj}} \qquad \{ij\} = \{ik\} + \{kj\}$$

Esta expresión es derivable en el tiempo

Tomando i=j $\quad \vec{\omega}_{ii} = \vec{0} = \vec{\omega}_{ik} + \vec{\omega}_{ki} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{\omega}_{ik} = -\vec{\omega}_{ki}}$

Coche respecto al paso a nivel {21}

$$\vec{\omega}_{21} = \vec{0} \qquad \vec{v}^{P}_{21} = v_c\,\vec{\jmath}_1 = v_c\,\vec{\jmath}_0$$



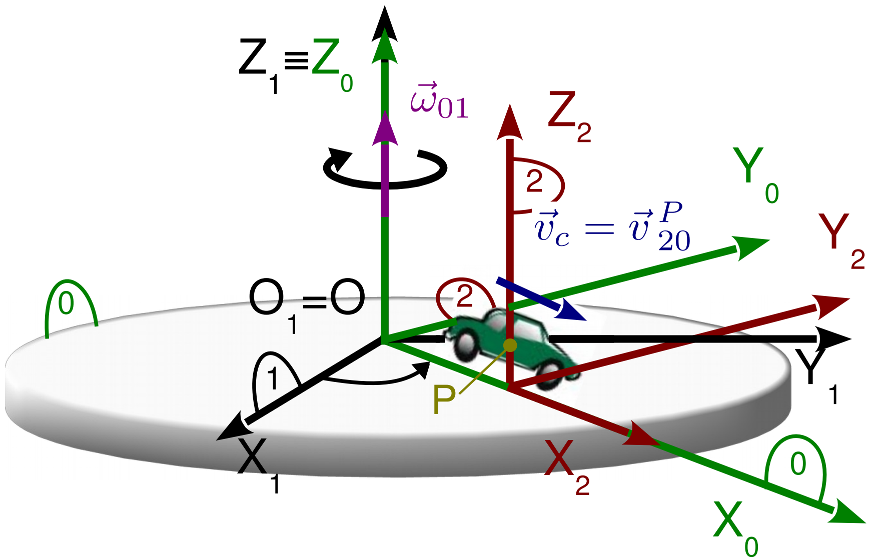
Tren respecto al paso a nivel {01}

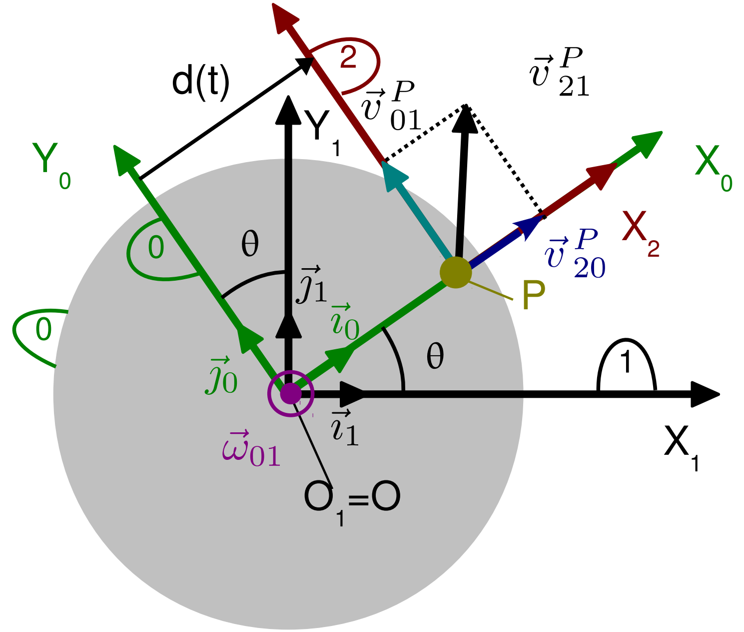
$$\vec{\omega}_{01} = \vec{0} \qquad \vec{v}^{O}_{01} = \vec{v}^{P}_{01} = v_t\,\vec{\imath}_1 = v_t\,\vec{\imath}_0$$

Coche respecto al tren {20}

$$\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\omega}_{20} = \vec{0}$$

$$\vec{v}^{P}_{21} = \vec{v}^{P}_{20} + \vec{v}^{P}_{01} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}^{P}_{20} = \vec{v}^{P}_{21} - \vec{v}^{P}_{01} = -v_t\,\vec{\imath}_0 + v_c\,\vec{\jmath}_0$$





Plataforma respecto al suelo {01}

$$\vec{\omega}_{01} = \omega\,\vec{k}_1 = \omega\,\vec{k}_0 \qquad \vec{v}^{\,O}_{01} = \vec{0}$$

Coche respecto a la plataforma {20}

$$\vec{\omega}_{20} = \vec{0} \qquad \vec{v}^{\,P}_{20} = v_c\,\vec{\imath}_0$$

Distancia recorrida sobre la plataforma

$$d(t) = v_c\,t$$

Coche respecto al suelo {21}

$$\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01} = \omega\,\vec{k}_0$$

$$\vec{v}^{\,P}_{21} = \vec{v}^{\,P}_{20} + \vec{v}^{\,P}_{01}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}^{\,P}_{01} &= \vec{v}^{\,O}_{01} + \vec{\omega}_{01}\times\overrightarrow{OP} = \\ &= \vec{\omega}_{01}\times\overrightarrow{OP} \\ &= (\omega\,\vec{k}_0)\times(d(t)\,\vec{\imath}_0) \\ &= \omega\,v_c\,t\,\vec{\jmath}_0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\omega}_{21} = \omega\,\vec{k}_0}$$

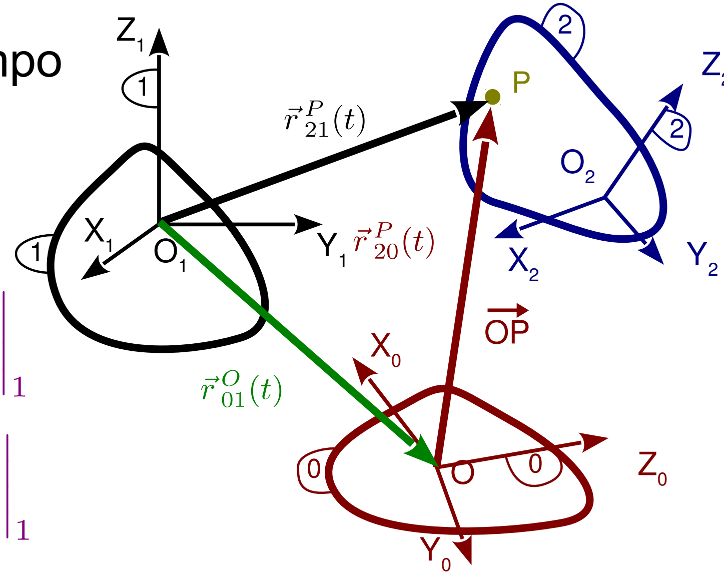
$$\boxed{\vec{v}^{\,P}_{21} = v_c\vec{\imath}_0 + \omega\,v_c\,t\,\vec{\jmath}_0}$$

Índice

- Introducción
- Derivación en triedros móviles
- Notación y definiciones
- Composición de velocidades
  - Traslaciones
  - Rotaciones
- Composición de aceleraciones
  - Traslaciones
  - Rotaciones
- Pares cinemáticos. Sólidos en contacto puntual
- Dinámica en sistemas de referencia no inerciales

Ley de composición de velocidades derivable en el tiempo

$$\vec{v}^P_{21}(t) = \vec{v}^P_{20}(t) + \vec{v}^O_{01} + \vec{\omega}_{01}(t) \times \vec{r}^P_{20}(t)$$



Derivación respecto del tiempo desde el sólido "1"

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}^P_{21}}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}^P_{20}}{\mathrm{d}t}\right|_1 + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}^O_{01}}{\mathrm{d}t}\right|_1 + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{01}}{\mathrm{d}t}\right|_1 \times \vec{r}^P_{20} + \vec{\omega}_{01} \times \left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}^P_{20}}{\mathrm{d}t}\right|_1$$

$$\vec{a}^P_{21} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}^P_{20}}{\mathrm{d}t}\right|_1 + \vec{a}^O_{01} + \vec{\alpha}_{01} \times \vec{r}^P_{20} + \vec{\omega}_{01} \times \left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}^P_{20}}{\mathrm{d}t}\right|_1$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_0 + \vec{\omega}_{01} \times \vec{A}$$

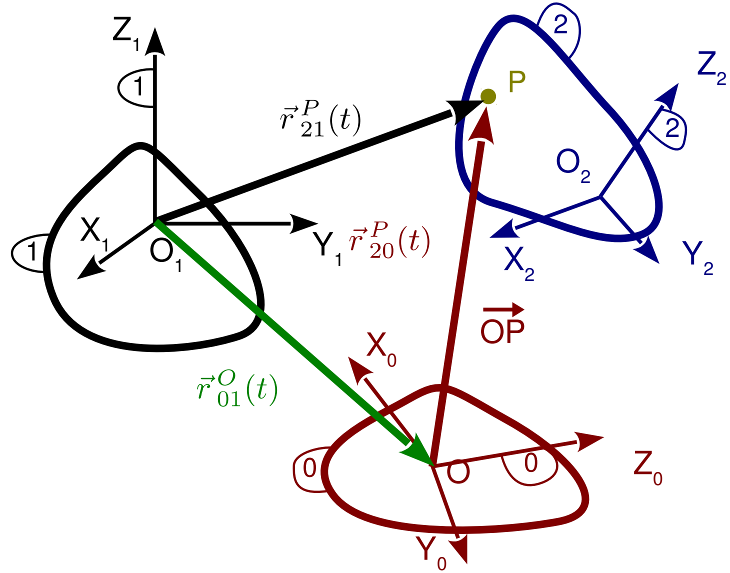
$$\vec{a}^P_{21} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}^P_{20}}{\mathrm{d}t}\right|_0 + \vec{\omega}_{01} \times \vec{v}^P_{20} + \vec{a}^O_{01} + \vec{\alpha}_{01} \times \vec{r}^P_{20} + \vec{\omega}_{01} \times \left(\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}^P_{20}}{\mathrm{d}t}\right|_0 + \vec{\omega}_{01} \times \vec{r}^P_{20} \right)$$

$$\vec{a}^P_{21} = \vec{a}^P_{20} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{v}^P_{20} + \vec{a}^O_{01} + \vec{\alpha}_{01} \times \vec{r}^P_{20} + \vec{\omega}_{01} \times \left(\vec{v}^P_{20} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{r}^P_{20} \right)$$

$$\boxed{\vec{a}^P_{21} = \vec{a}^P_{20} + \vec{a}^O_{01} + \vec{\alpha}_{01} \times \vec{r}^P_{20} + \vec{\omega}_{01} \times (\vec{\omega}_{01} \times \vec{r}^P_{20}) + 2\,\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}^P_{20}}$$

Derivable en el tiempo

Buscamos una expresión mas sencilla en términos de composición de movimientos



$$\vec{a}^{P}_{21} = \vec{a}^{P}_{20} + \vec{a}^{O}_{01} + \vec{\alpha}_{01}\times\vec{r}^{P}_{20} + \vec{\omega}_{01}\times(\vec{\omega}_{01}\times\vec{r}^{P}_{20}) + 2\,\vec{\omega}_{01}\times\vec{v}^{P}_{20}$$

$$\vec{r}^{P}_{20} = \overrightarrow{OP} = \vec{r}^{P}_{00}$$

Validez instantánea

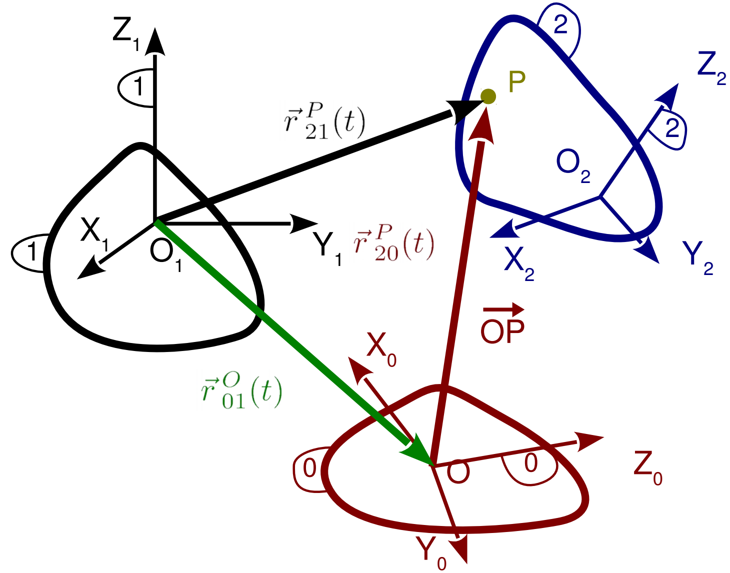
$$\vec{a}^{P}_{21} = \vec{a}^{P}_{20} + \vec{a}^{O}_{01} + \vec{\alpha}_{01}\times\overrightarrow{OP} + \vec{\omega}_{01}\times(\vec{\omega}_{01}\times\overrightarrow{OP}) + 2\,\vec{\omega}_{01}\times\vec{v}^{P}_{20}$$

$$\boxed{\vec{a}^{P}_{21} = \vec{a}^{P}_{20} + \vec{a}^{P}_{01} + 2\,\vec{\omega}_{01}\times\vec{v}^{P}_{20}}$$

Teorema de Coriolis

$$\boxed{\vec{a}^{P}_{ij} = \vec{a}^{P}_{ik} + \vec{a}^{P}_{kj} + 2\,\vec{\omega}_{kj}\times\vec{v}^{P}_{ik} \qquad \{ij\} = \{ik\} + \{kj\}}$$

Tomando i=j $\quad \vec{a}^{P}_{ii} = \vec{0} = \vec{a}^{P}_{ik} + \vec{a}^{P}_{ki} + 2\,\vec{\omega}_{ki}\times\vec{v}^{P}_{ik} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}^{P}_{ik} \neq -\vec{a}^{P}_{ki}}$



Ley de composición de velocidades angulares

$$\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01}$$

Derivamos respecto al tiempo desde el sólido "1"

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{21}}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{20}}{\mathrm{d}t}\right|_1 + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{01}}{\mathrm{d}t}\right|_1$$

$$\vec{\alpha}_{21} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{20}}{\mathrm{d}t}\right|_1 + \vec{\alpha}_{01} = \overbrace{\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{20}}{\mathrm{d}t}\right|_0}^{\vec{\alpha}_{20}} + \vec{\omega}_{01}\times\vec{\omega}_{20} + \vec{\alpha}_{01}$$

Ley de composición de aceleraciones angulares

$$\boxed{\vec{\alpha}_{21} = \vec{\alpha}_{20} + \vec{\alpha}_{01} + \vec{\omega}_{01}\times\vec{\omega}_{20}} \qquad \boxed{\vec{\alpha}_{ij} = \vec{\alpha}_{ik} + \vec{\alpha}_{kj} + \vec{\omega}_{kj}\times\vec{\omega}_{ik}} \quad \{ij\} = \{ik\} + \{kj\}$$

Tomando i=j $\quad \vec{\alpha}_{ii} = \vec{0} = \vec{\alpha}_{ik} + \vec{\alpha}_{ki} + \cancelto{0}{\vec{\omega}_{ki}\times\vec{\omega}_{ik}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{\alpha}_{ik} = -\vec{\alpha}_{ki}}$

Velocidades

$$\vec{v}^{P}_{21}(t) = \vec{v}^{P}_{20} + \vec{v}^{O}_{01} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{r}^{P}_{20}$$

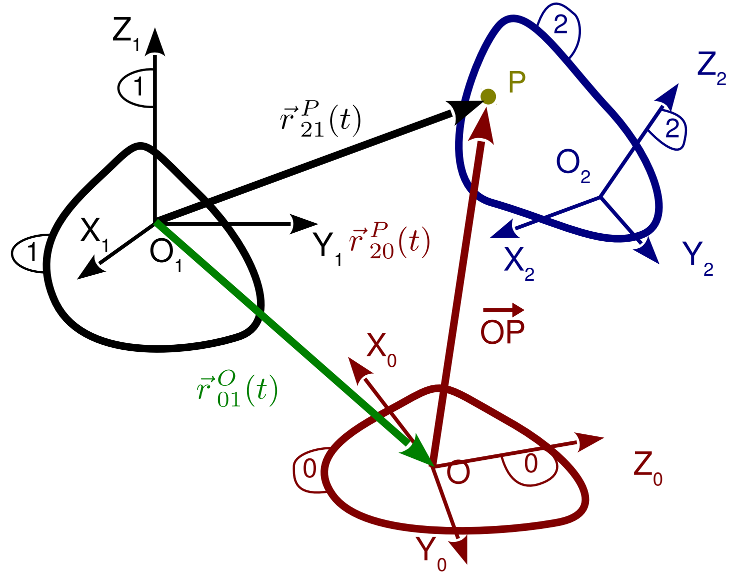
Instantánea $\vec{v}^{P}_{21} = \vec{v}^{P}_{20} + \vec{v}^{P}_{01}$

$$\vec{v}^{P}_{ij} = -\vec{v}^{P}_{ji}$$

Velocidades angulares

$$\vec{\omega}_{21}(t) = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01}$$

$$\vec{\omega}_{ij} = -\vec{\omega}_{ji}$$



Aceleraciones

$$\vec{a}^{P}_{21}(t) = \vec{a}^{P}_{20} + \vec{a}^{O}_{01} + \vec{\alpha}_{01} \times \vec{r}^{P}_{20} + \vec{\omega}_{01} \times (\vec{\omega}_{01} \times \vec{r}^{P}_{20}) + 2\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}^{P}_{20}$$

Instantánea $\vec{a}^{P}_{21} = \vec{a}^{P}_{20} + \vec{a}^{P}_{01} + 2\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}^{P}_{20}$

$$\vec{a}^{P}_{ij} \neq -\vec{a}^{P}_{ji}$$

Aceleraciones angulares

$$\vec{\alpha}_{21}(t) = \vec{\alpha}_{20} + \vec{\alpha}_{01} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{\omega}_{20}$$

$$\vec{\alpha}_{ij} = -\vec{\alpha}_{ji}$$

Índice