Tema 9: Movimiento oscilatorio

FISICA I, 1º, Grado en Ingeniería Civil

Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Índice

- Introducción
- Representación matemática del MAS
  - Ejemplos: muelle, péndulo simple
- Energía
- Oscilaciones amortiguadas
- Otras aplicaciones del MAS
- Oscilaciones forzadas: resonancia

Introducción

- Movimiento periódico: la posición, velocidad y aceleración del cuerpo se repiten cada cierto intervalo de tiempo

- Ejemplos
  - Barca en el mar
  - Bandera al viento
  - Péndulo de un reloj
  - Moléculas en un sólido
  - Voltaje e intensidad en circuitos de corriente alterna

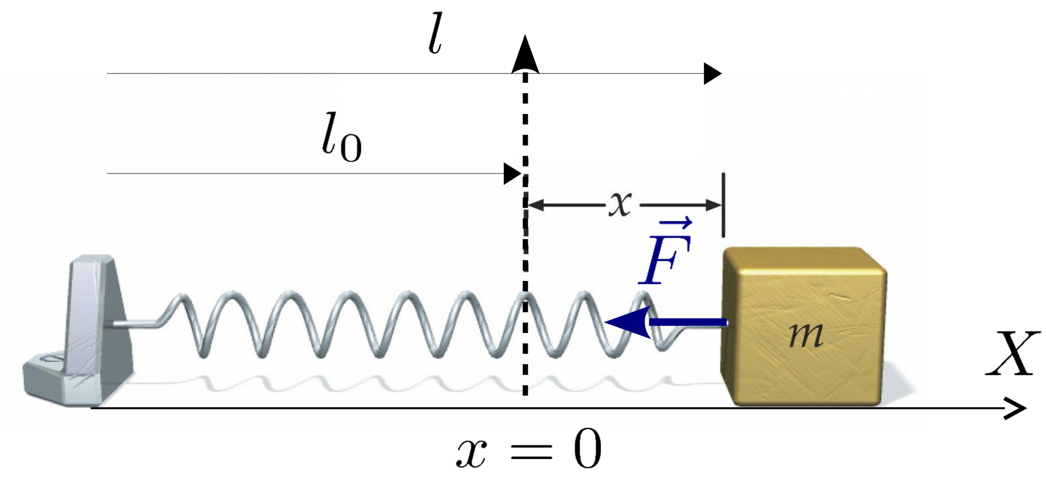
- En general cualquier objeto desplazado ligeramente de una posición de equilibrio realiza un movimiento periódico

- El tipo más básico de movimiento periódico es el movimiento armónico simple (MAS)

- ¿Por qué interesa estudiar el MAS?
  - Ejemplo sencillo de movimiento oscilatorio
  - Aproximación válida en muchos casos de movimiento oscilatorio
  - Movimientos oscilatorios más complejos pueden expresarse como la combinación de varios MAS

- Introducción
- Representación matemática del MAS
  - Ejemplos: muelle, péndulo simple
- Energía
- Oscilaciones amortiguadas
- Otras aplicaciones del MAS
- Oscilaciones forzadas: resonancia

- Cuerpo unido a un muelle



$$\vec{F} = -k(l - l_0)\,\vec{\imath} = -kx\,\vec{\imath}$$

- Constante del muelle *k*
- Fuerza restauradora proporcional al desplazamiento

- Segunda Ley de Newton en una dimensión

$$F = ma = m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = -\frac{k}{m}x}$$

Ecuación diferencial del MAS

Si la ecuación de un movimiento tiene esa forma, es un MAS

- Problema
  - Ecuación diferencial $$\ddot{x} = -\omega^2 x \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$
  - Condiciones iniciales $$x(t=0) = x_0 \qquad \dot{x}(t=0) = v_0$$
- Solución general
  - Forma 1 $$x(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \operatorname{sen}(\omega t)$$
  - Forma 2 $$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \phi)}$$
    - Relación

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) = \underbrace{(A\cos\Phi)}_{a_1}\cos(\omega t) + \underbrace{(-A\operatorname{sen}\Phi)}_{a_2}\operatorname{sen}(\omega t)$$

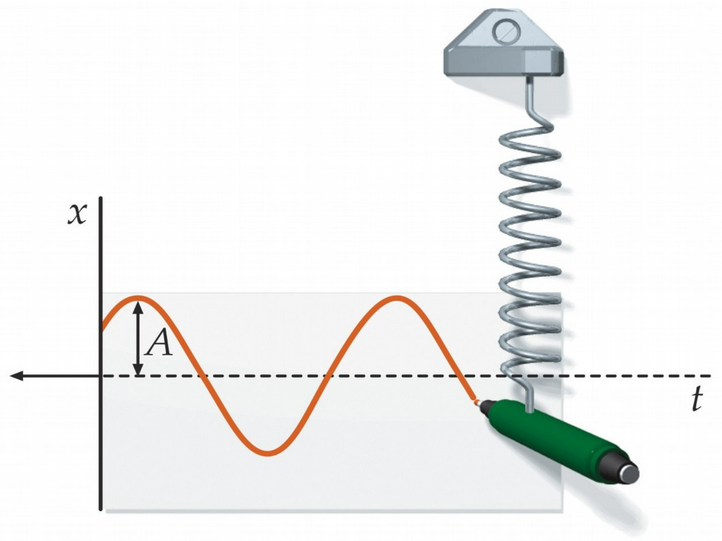
  - Forma 2b $$x(t) = \mathrm{Re}\left(A\,e^{i\,(\omega t+\phi)}\right) = \mathrm{Re}\left(A\,e^{i\phi}\,e^{i\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(\tilde{A}\,e^{i\omega t}\right)$$

$$\tilde{A} = A\,e^{i\phi}$$

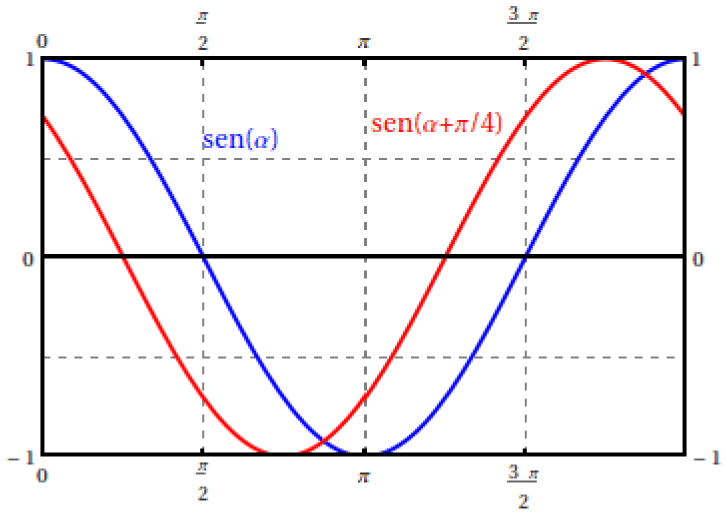
- Significado físico de las constantes

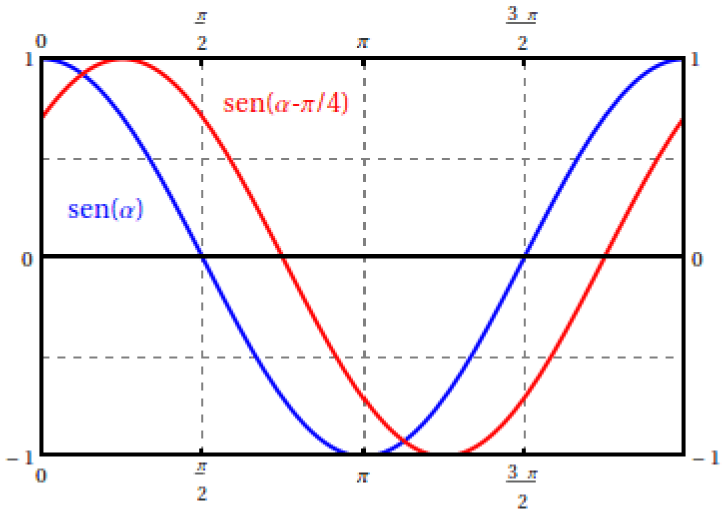
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

  - A es la amplitud
  - ω es la frecuencia angular
  - ϕ es la constante de fase



- La constante de fase indica cuando “comienza” la función





Período y frecuencia

- Período: es el tiempo necesario para completar una oscilación

$$x(t) = x(t+T) = A\cos(\omega(t+T)+\phi) = A\cos(\omega t + \phi + \omega T)$$

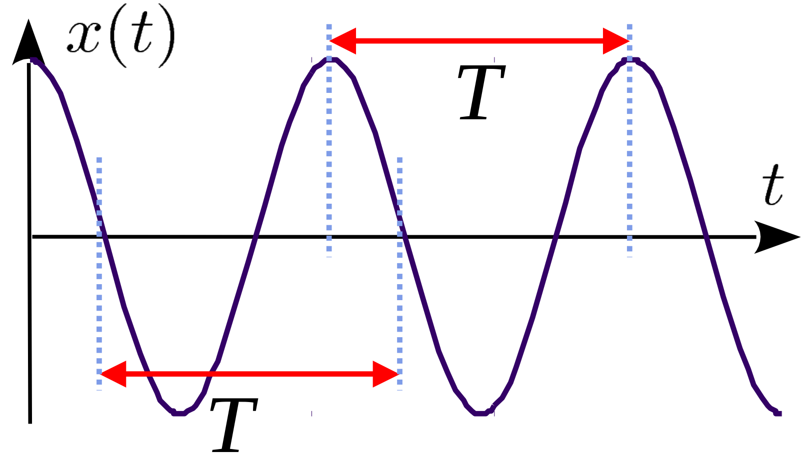
$$\omega T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

[T] = s

- Frecuencia: número de oscilaciones por segundo

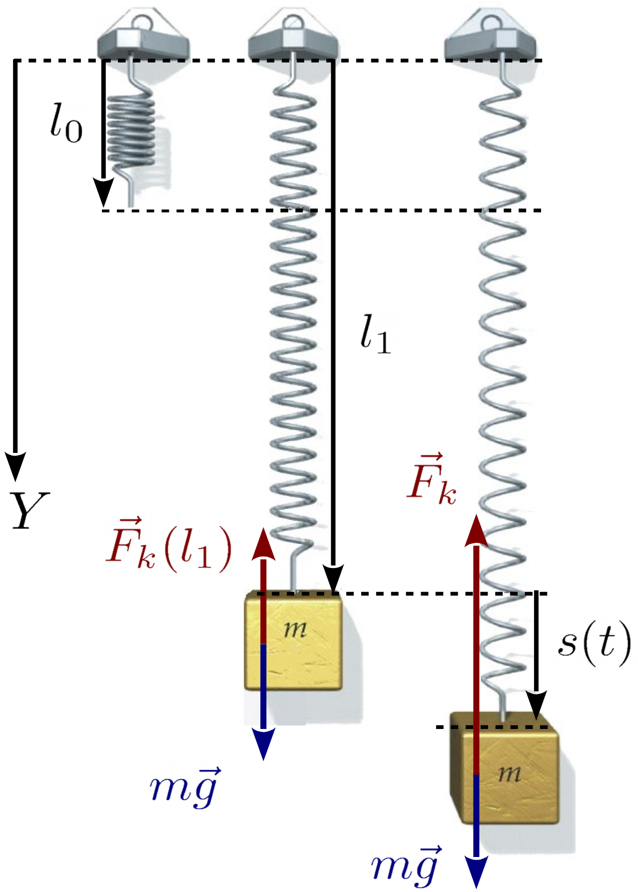
$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$$

[f] = Hz = s^{-1}



- Frecuencia – frecuencia angular

$$\omega = 2\pi f$$



- Muelle de longitud natural l_0
- Una masa colgando en equilibrio

$$m\vec{g} - k(l_1 - l_0)\vec{\jmath} = \vec{0} \qquad \Longrightarrow \qquad l_1 = l_0 + \frac{mg}{k}$$

- Se tira de la masa y se suelta

$$\left.\begin{array}{l} m\vec{g} - k(l(t) - l_0)\vec{\jmath} = m\,\vec{a} \\ l(t) = l_1 + s(t) \end{array}\right| \Longrightarrow \boxed{\ddot{s} = -\frac{k}{m}s \qquad \text{MAS}}$$

- Problema de movimiento

$$\ddot{s} = -\frac{k}{m}s \qquad s(0) = a \qquad \dot{s}(0) = v_0$$

- Solución

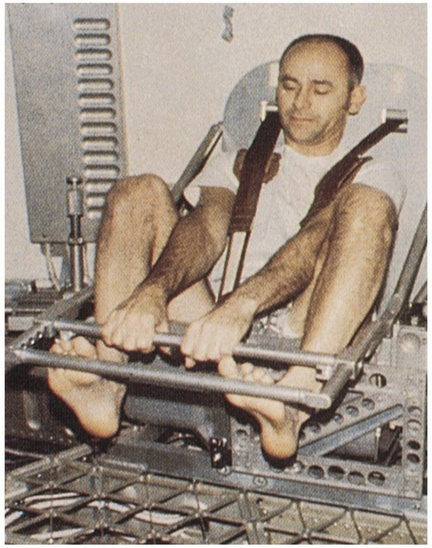
$$s(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad \boxed{\omega = \sqrt{k/m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

- La frecuencia no depende de la amplitud ni de la velocidad inicial

Aplicaciones del muelle

- El hecho de que la frecuencia no dependa de la amplitud ni la velocidad inicial tiene aplicaciones interesantes

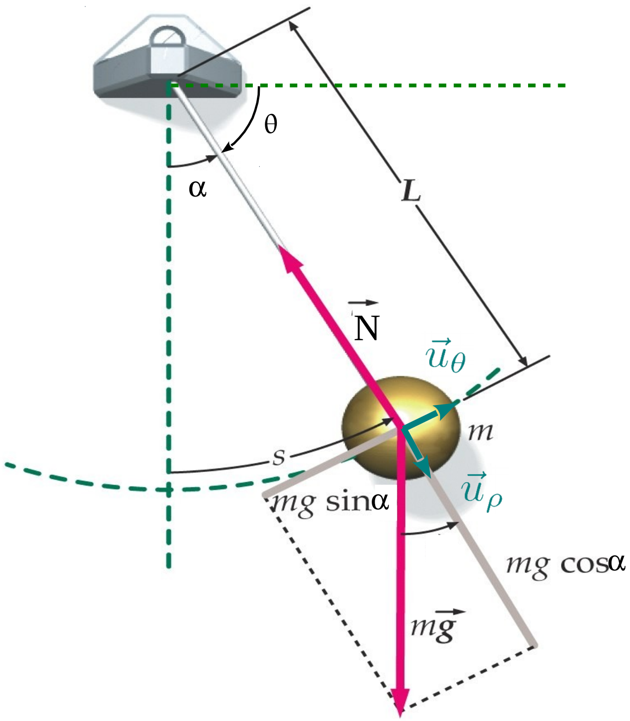
  - Medida de masas a partir del período de oscilación



El astronauta Alan L. Bean midiendo su masa en el segundo viaje del Skylab (1973)

  - En los instrumentos musicales la frecuencia del sonido no depende de la fuerza con que se pulse la cuerda o se apriete la tecla de un piano

Ejemplos: péndulo simple



- Cuerda ligera $m_{cuerda} \ll m$
- Segunda Ley de Newton

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

$$\vec{a} = -L\dot{\alpha}^2\,\vec{u}_\rho + L\ddot{\alpha}\,\vec{u}_\theta$$

$$m\vec{g} = mg\cos\alpha\,\vec{u}_\rho - mg\mathrm{sen}\,\alpha\vec{u}_\theta$$

$$\vec{N} = -N\,\vec{u}_\rho$$

- Ángulo pequeño $\mathrm{sen}\,\alpha \simeq \alpha$

- Problema $\boxed{\ddot{\alpha} = -\frac{g}{L}\alpha \quad \text{MAS}}$ $\alpha(0) = \alpha_0$ $\dot{\alpha}(0) = v_0/L$

- Solución

$$\alpha(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad \boxed{\omega = \sqrt{g/L}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

- La frecuencia no depende de la amplitud ni de la masa ni de la velocidad inicial

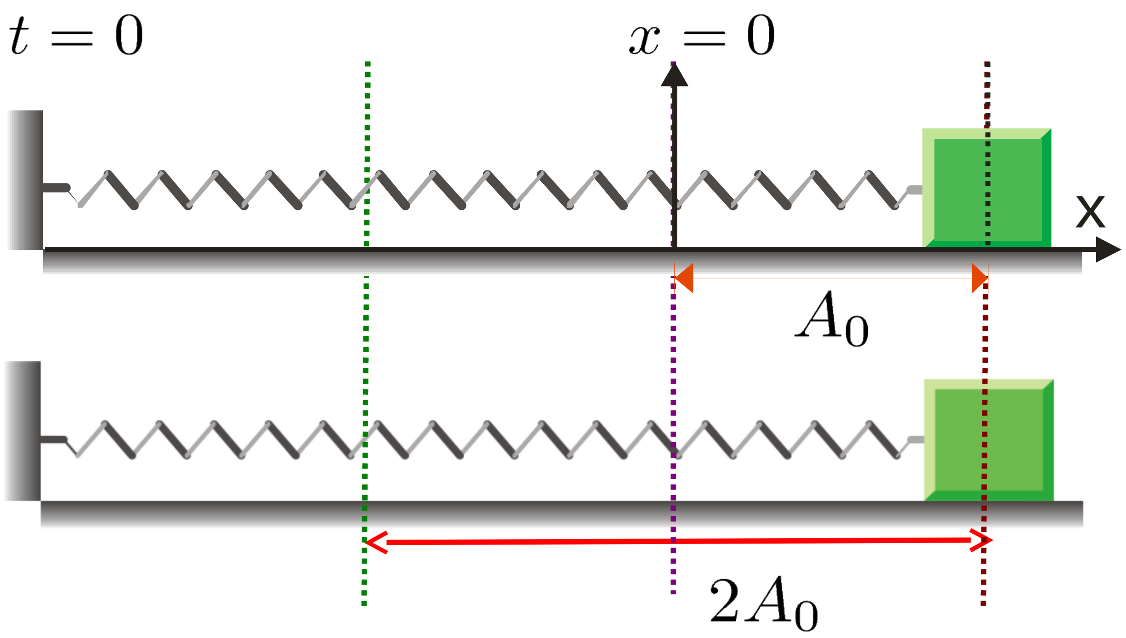
Aplicaciones del péndulo simple

- El hecho de que la frecuencia de oscilación no dependa de la amplitud ni de la masa tiene aplicaciones interesantes

  - Técnica sencilla para calcular la aceleración de la gravedad

  - Medida del tiempo: péndulo de un reloj

- Aplicación de las condiciones iniciales



$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

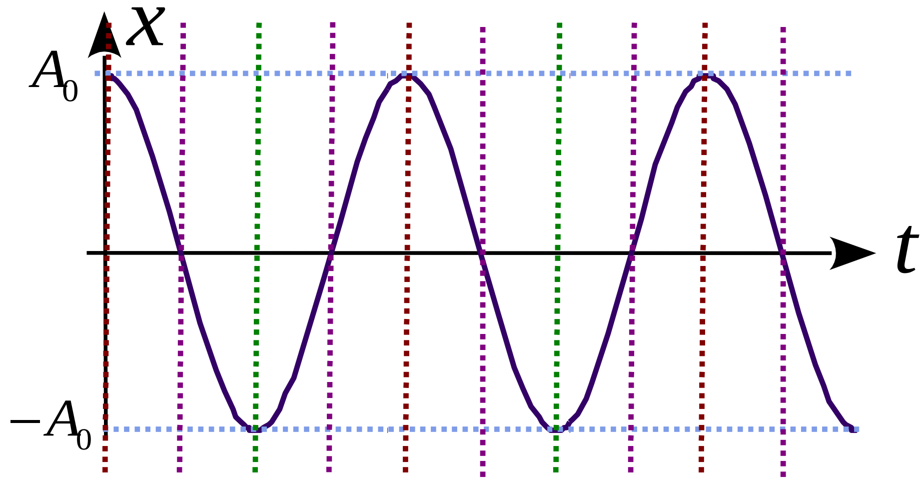
$$\left| \begin{array}{l} x(0) = A\cos(\phi) = A_0 \\ v(0) = \dot{x}(0) = -A\omega\,\mathrm{sen}\,(\phi) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$

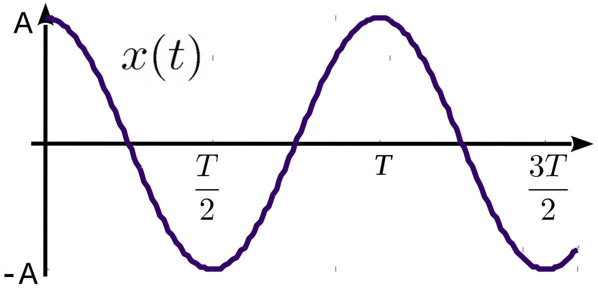
$$A = A_0 \qquad \phi = 0$$

- Representación gráfica

$$x(t) = A_0\cos(\omega t)$$



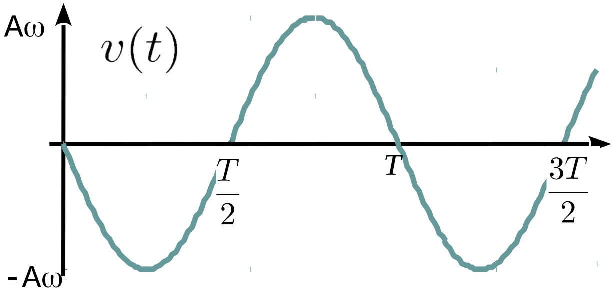
- Posición



$$x(t) = A_0 \cos(\omega t)$$

- Amplitud máxima: A_0

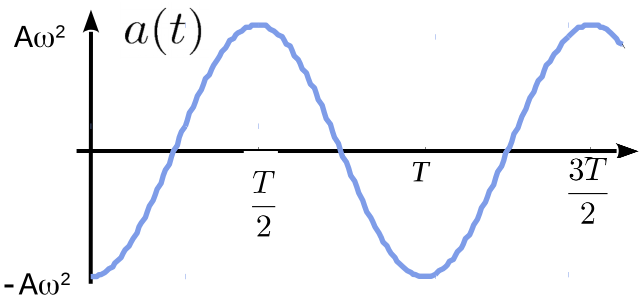
- Velocidad



$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega A_0 \mathrm{sen}\,(\omega t) = \omega\, A_0 \cos(\omega t + \pi/2)$$

- Velocidad máxima: ωA_0
- Desfase de π/2 con la posición

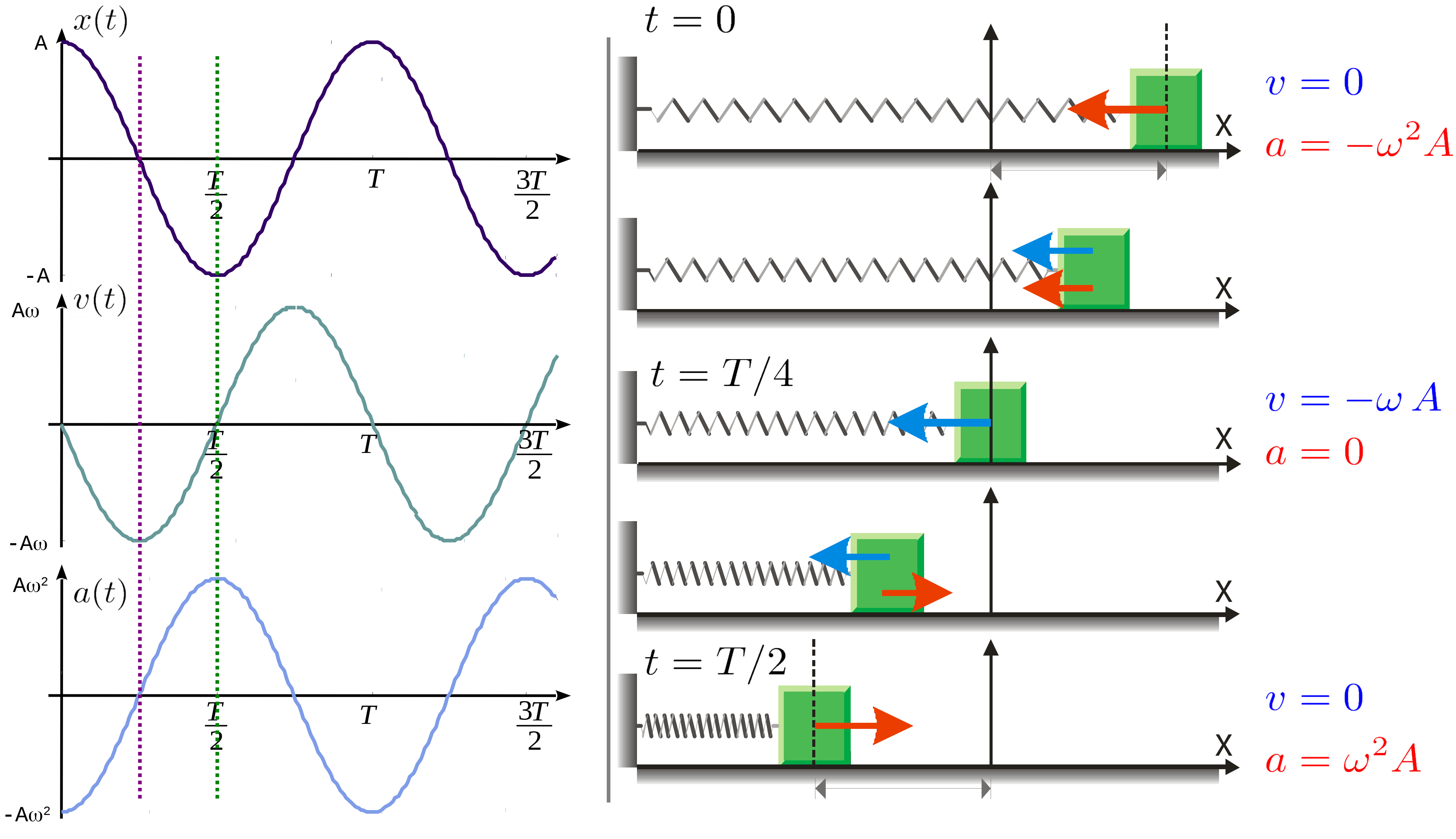
- Aceleración

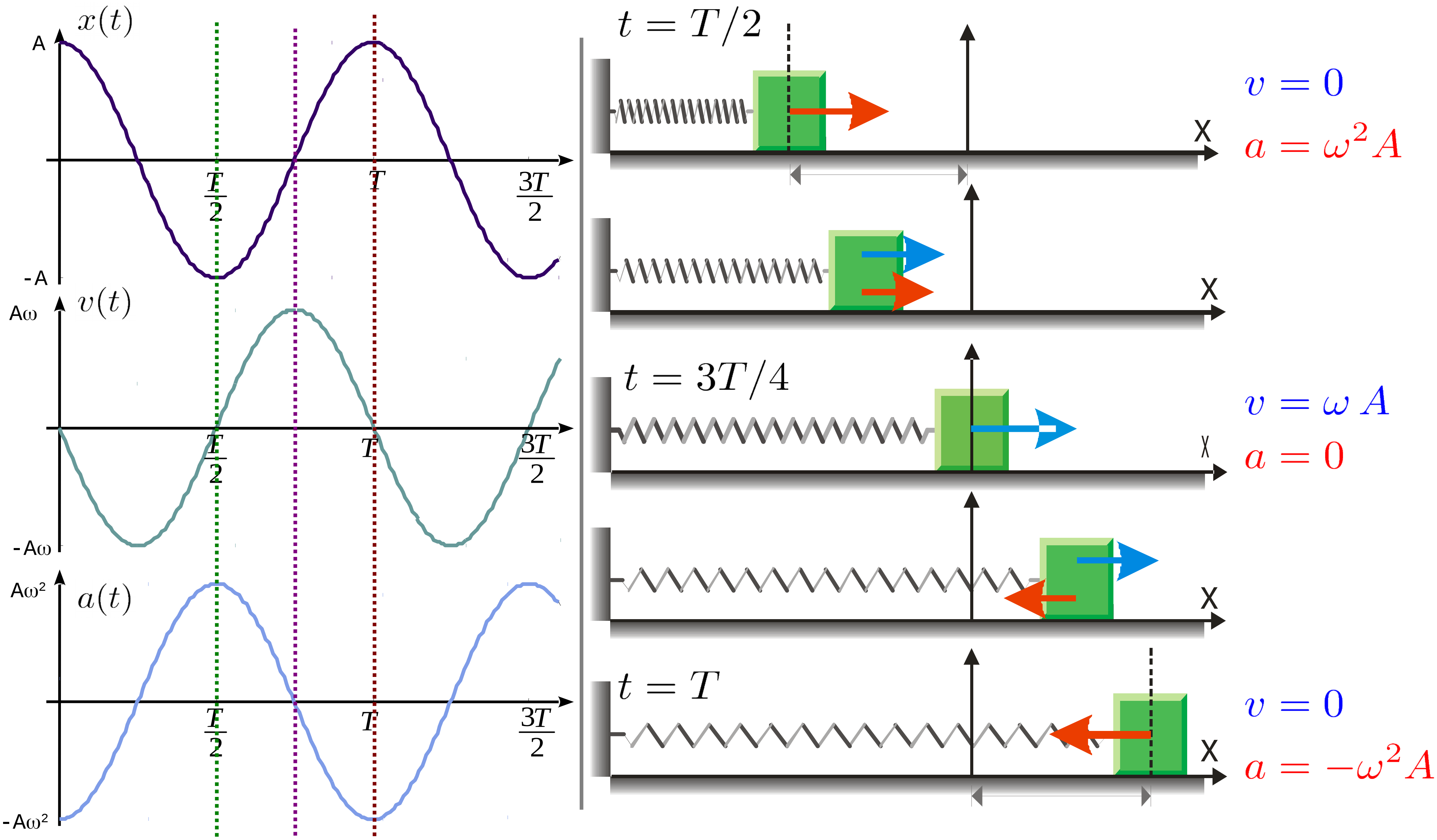


$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 A_0 \cos(\omega t) = -\omega^2 A_0 \mathrm{sen}\,(\omega t + \pi/2)$$
$$= \omega^2 A_0 \cos(\omega t + \pi)$$

- Aceleración máxima: $\omega^2 A_0$
- Desfase de π/2 con la velocidad
- Desfase de π con la posición

Velocidad y aceleración





$x(t)$
A
-A
$\frac{T}{2}$
T
$\frac{3T}{2}$
$v(t)$
Aω
-Aω
$a(t)$
$A\omega^2$
$-A\omega^2$
$t = T/2$
$v = 0$
$a = \omega^2 A$
X
$t = 3T/4$
$v = \omega A$
$a = 0$
$t = T$
$v = 0$
$a = -\omega^2 A$

Índice

- Introducción
- Representación matemática del MAS
  - Ejemplos: muelle, péndulo simple
- Energía
- Otras aplicaciones del MAS
- Oscilaciones amortiguadas
- Oscilaciones forzadas: resonancia

- Despreciando el rozamiento la energía mecánica es constante

- Posición y velocidad

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad\qquad v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \phi)$$

- Energía cinética: $$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\mathrm{sen}\,^2(\omega t + \phi)$$

- Energía potencial: $$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

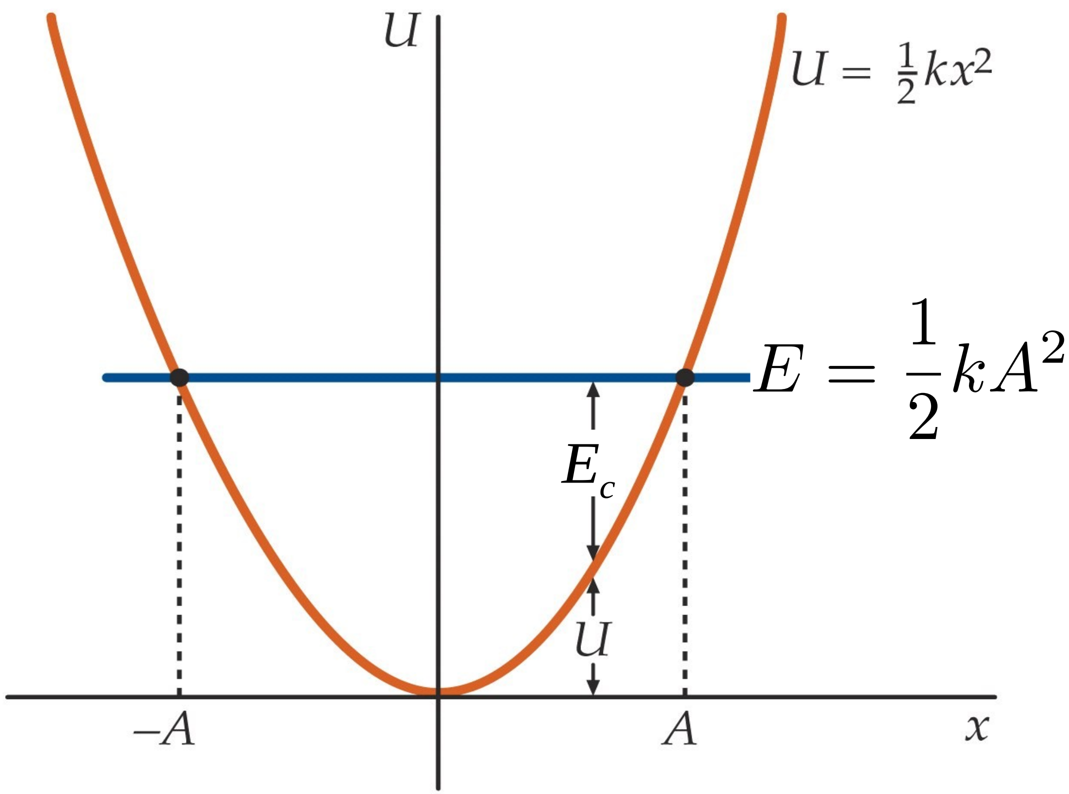
- Energía mecánica

$$E = E_c + U = \frac{1}{2}\cancel{m}A^2\frac{k}{\cancel{m}}\mathrm{sen}\,^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}kA^2}$$

No depende de la masa

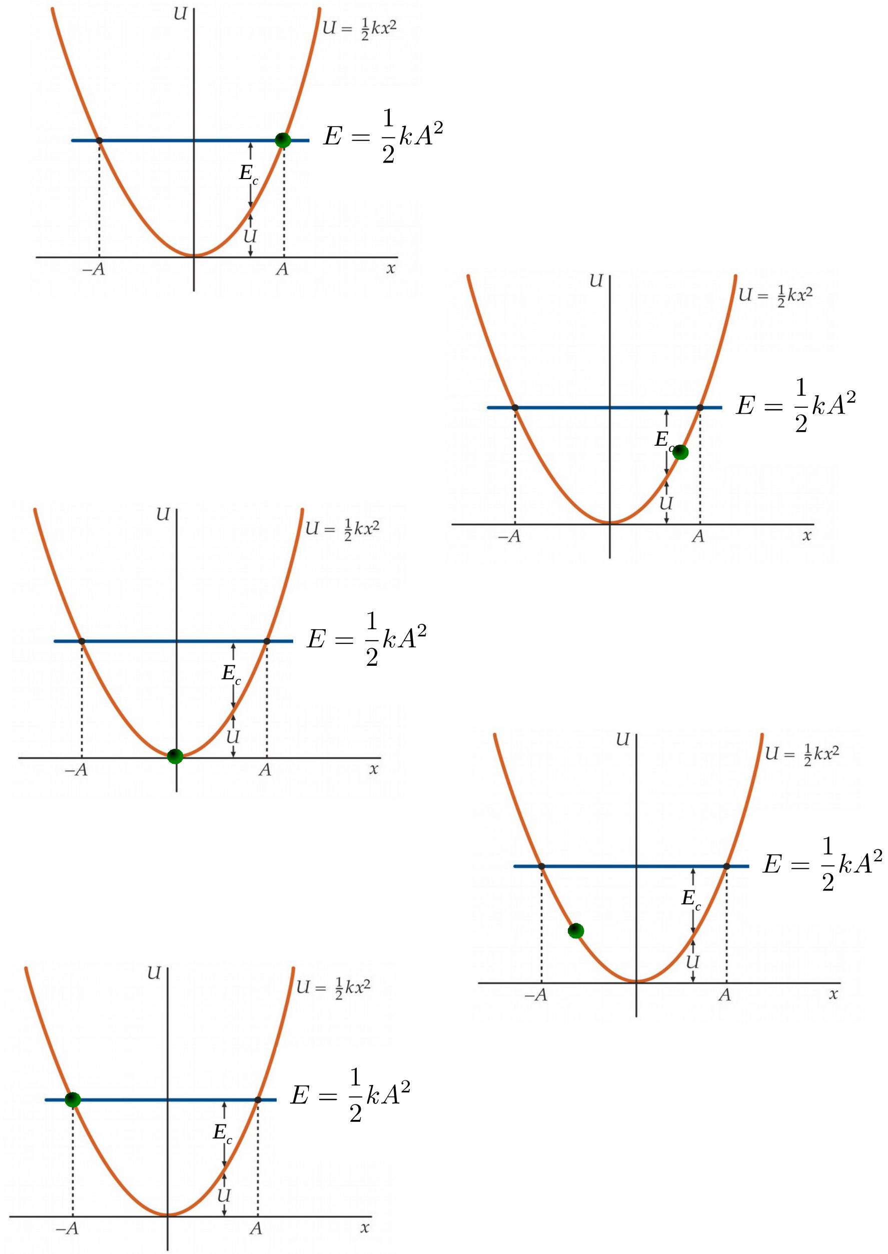
- La energía se trasvasa continuamente de cinética a transversal y viceversa

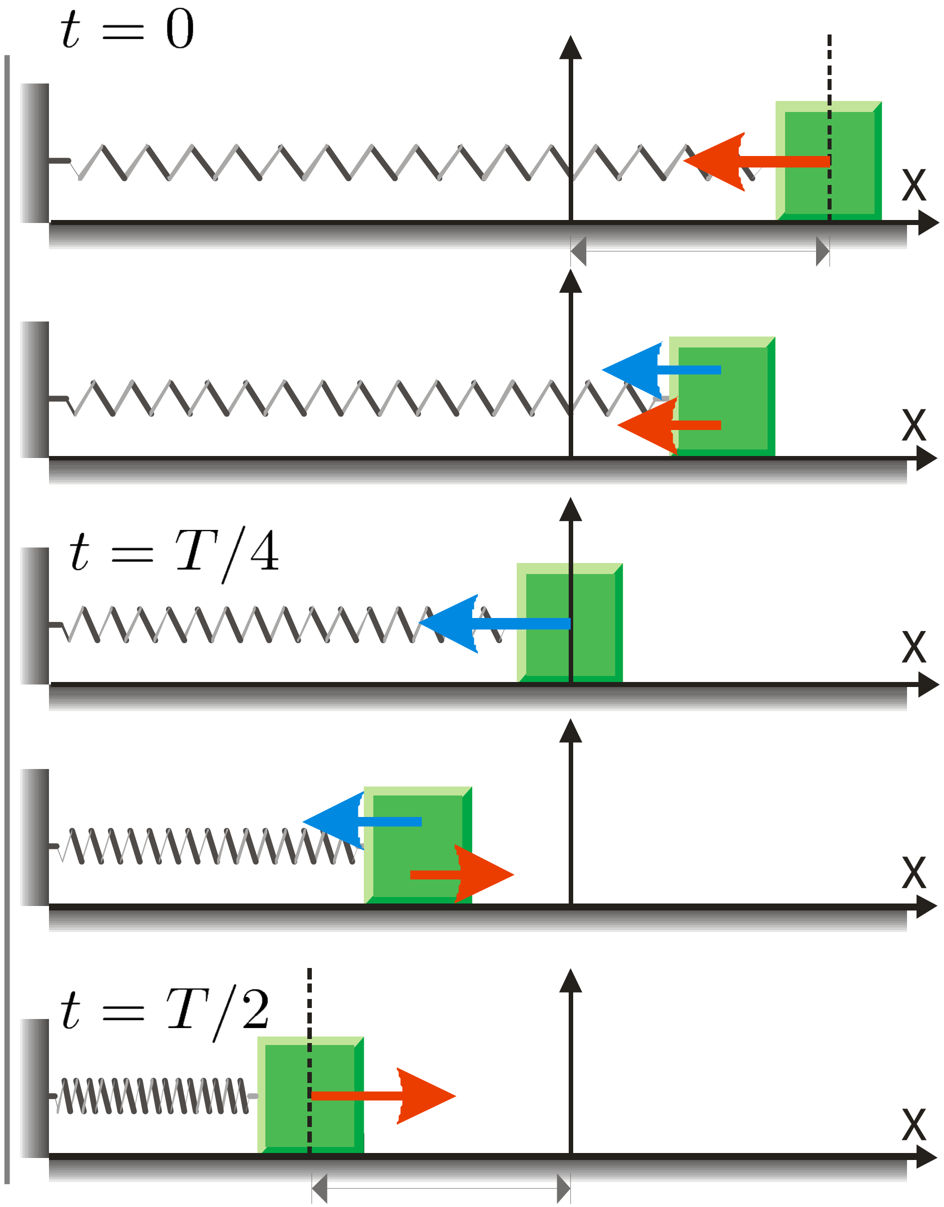


$$x = A \Rightarrow E = U_{\max} = \frac{1}{2}kA^2$$

$$x = 0 \Rightarrow E = E_{c,\max} = \frac{1}{2}mv^2_{\max} = \frac{1}{2}kA^2$$

Energía mecánica: muelle





$E_c = 0$

$U = \frac{1}{2}KA^2$

$E_c \uparrow$

$U \downarrow$

$E_c = \frac{1}{2}kA^2$

$U = 0$

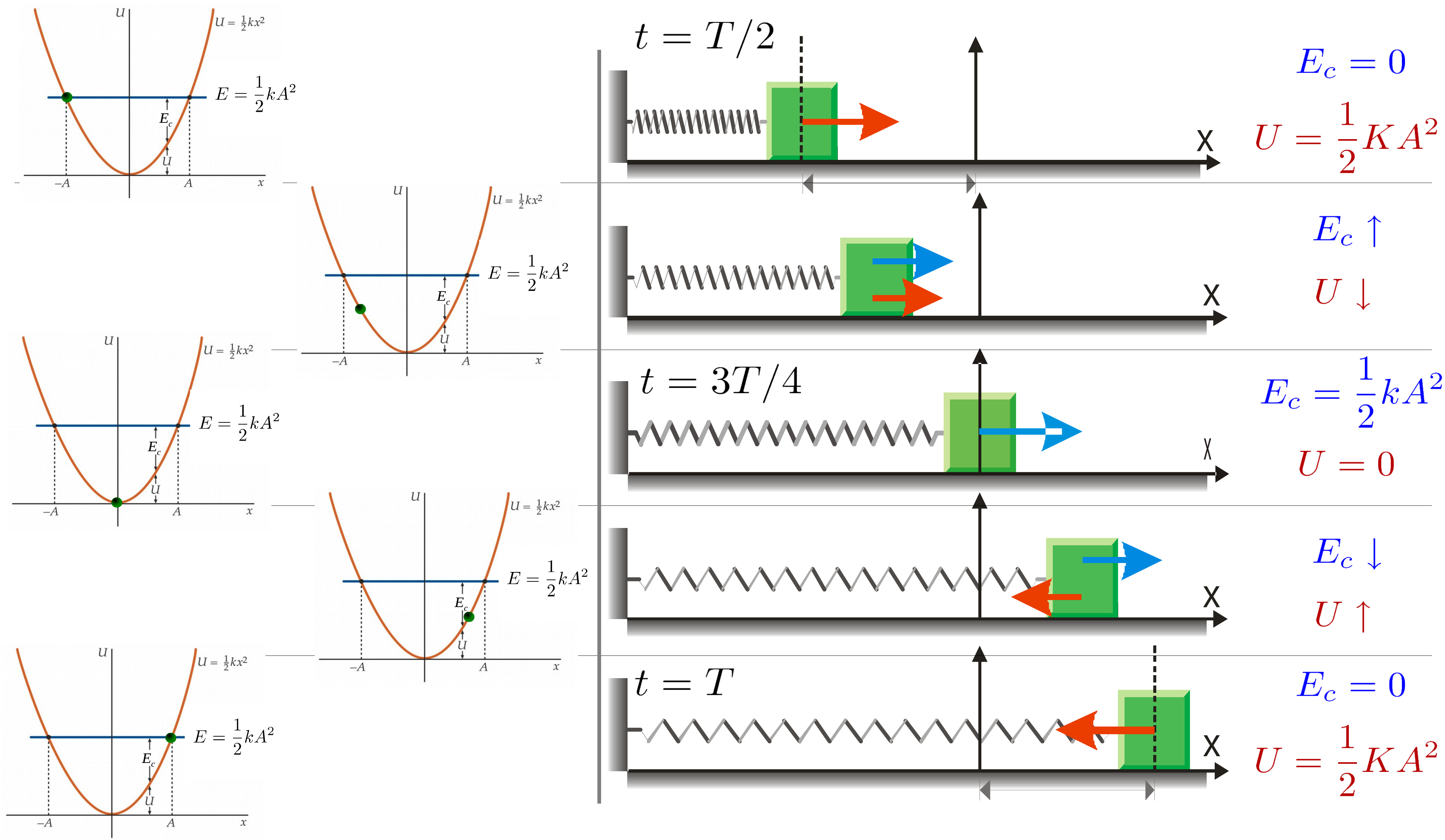
$E_c \downarrow$

$U \uparrow$

$E_c = 0$

$U = \frac{1}{2}KA^2$

Energía mecánica: muelle

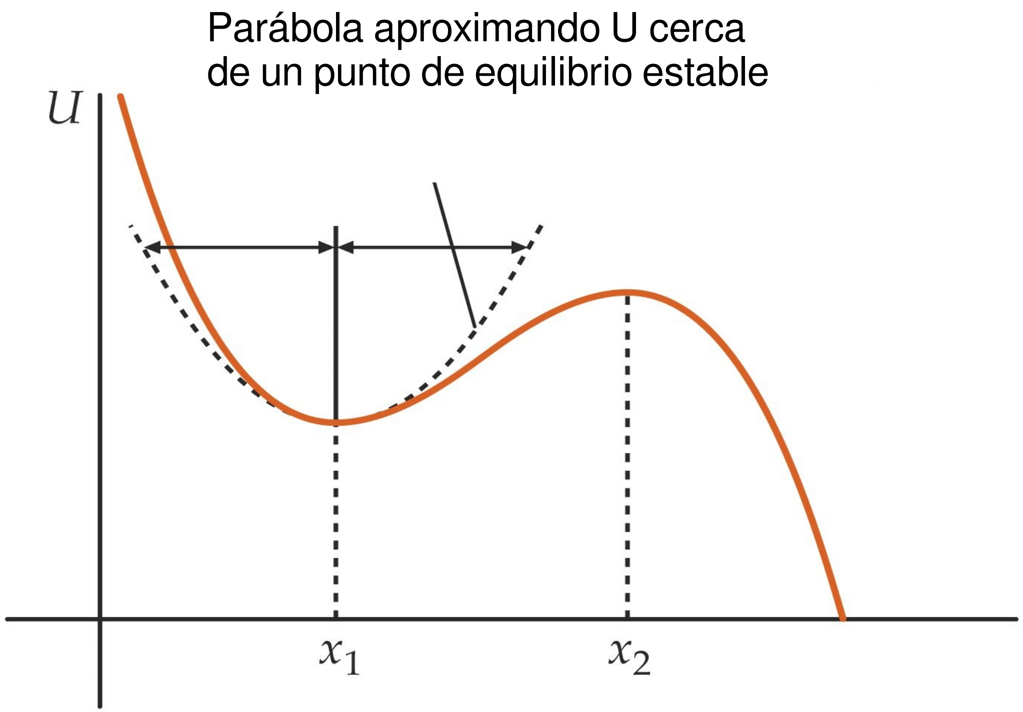


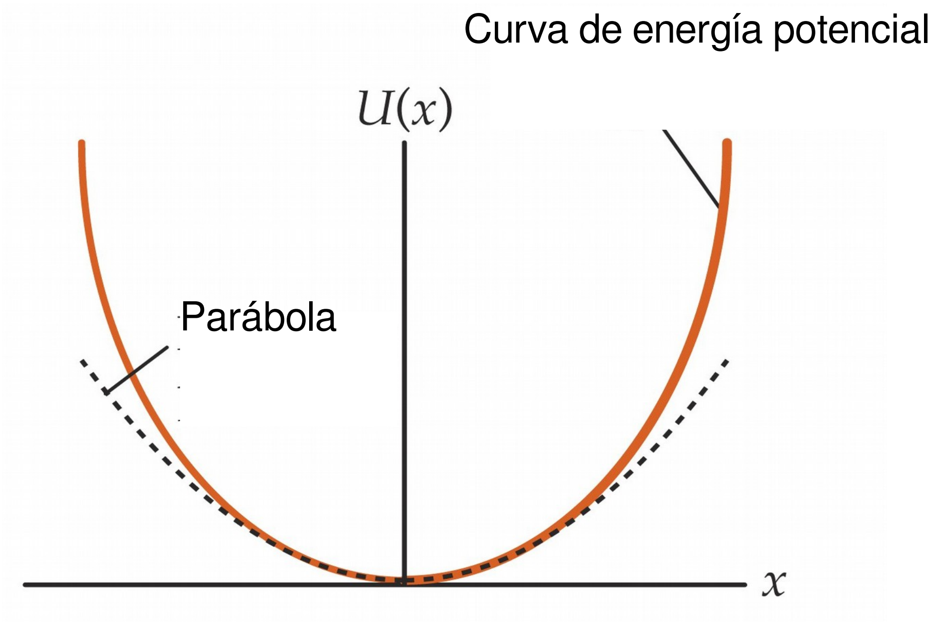
Índice

- Introducción
- Representación matemática del MAS
  - Ejemplos: muelle, péndulo simple
- Energía
- Otras aplicaciones del MAS
- Oscilaciones amortiguadas
- Oscilaciones forzadas: resonancia

MAS como aproximación

- Cualquier partícula que se desplaza ligeramente de una posición de equilibrio (mínimo de la energía potencial) realiza un MAS, pues cualquier curva puede aproximarse por una parábola cerca de un mínimo



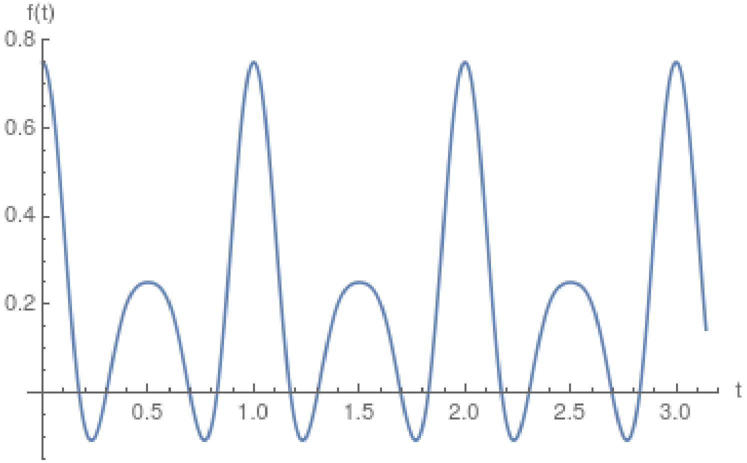


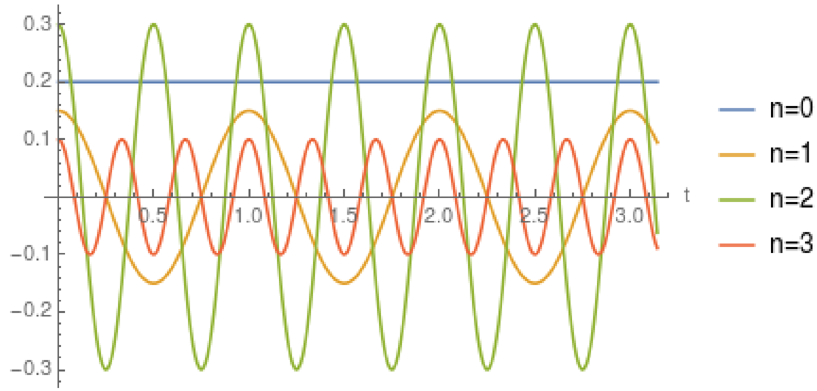
U(x) para una partícula en el fondo de un cuenco esférico

- Una función periódica puede expresarse como combinación lineal de varios MAS de diferentes frecuencias: los modos de Fourier

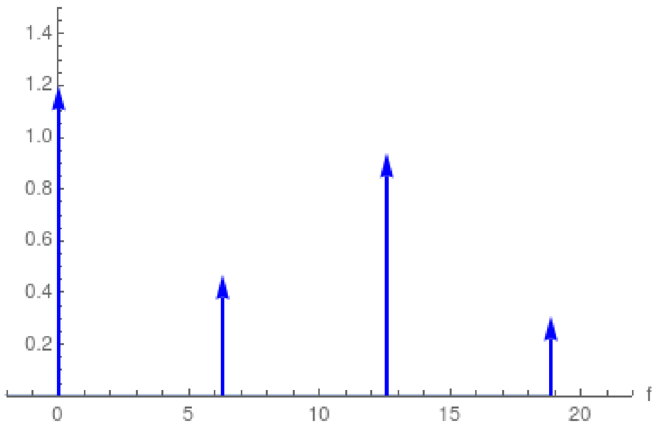
$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + b_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} t\right)\right)$$

  - Ejemplo $f(t) = 0.20 + 0.15\cos(2\pi t) + 0.30\cos(4\pi t) + 0.10\cos(6\pi t)$





- Una función no periódica puede expresarse como combinación de MAS usando la Transformada de Fourier



Índice

- Introducción
- Representación matemática del MAS
  - Ejemplos: muelle, péndulo simple
- Energía
- Otras aplicaciones del MAS
- Oscilaciones amortiguadas
- Oscilaciones forzadas: resonancia

- En sistemas reales el rozamiento hace que las oscilaciones se amortigüen

- El rozamiento puede modelarse como una fuerza

$$\vec{F}_R = -b\,\vec{v} \qquad \left|\begin{array}{ll} b & \text{constante} \\ \vec{v} & \text{velocidad} \end{array}\right.$$

  - Amortiguamiento lineal: valido si la velocidad no es muy grande
    - Gotas de lluvia cayendo en la atmósfera
    - Movimiento de células y bacterias

- Segunda Ley de Newton

$$m\vec{a} = \vec{F}_R + \vec{F}_{osc}$$

- Consideramos el caso de un muelle unidimensional

- Segunda Ley de Newton (muelle unidimensional)

$$m\vec{a} = \vec{F}_R + \vec{F}_{osc}$$

$$ma = -b\,v - k\,x \implies \left| \boxed{\begin{array}{ll} \ddot{x} + 2\,\gamma\,\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 & \\ \gamma = b/2m & \text{Parámetro de rozamiento} \\ \omega_0 = \sqrt{k/m} & \text{Frecuencia propia o natural} \end{array}} \right.$$

- Consideramos tres regímenes de movimiento
  - Amortiguamiento débil : $\gamma < \omega_0$
  - Sobreamortiguado : $\gamma > \omega_0$
  - Amortiguamiento crítico : $\gamma = \omega_0$

Oscilador subamortiguado ($\gamma<\omega_0$)

- Solución

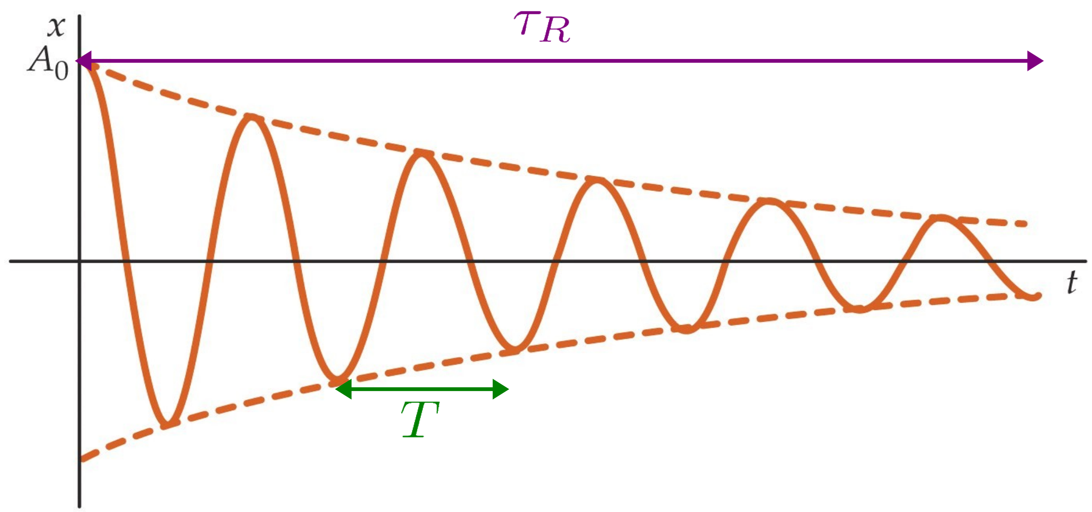
$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t+\phi) \\ \omega &= \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}} \end{aligned}}$$

- Es una oscilación de pseudo-frecuencia ω y cuya amplitud decae en el tiempo

- La frecuencia de oscilación es menor que la natural

$$\omega < \omega_0$$

  - Si b=0 (γ=0) entonces $\omega=\omega_0$



- La amplitud decae más rápido cuanto mayor sea b (γ)

- Hay dos tiempos típicos $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ $\qquad \tau_R = \dfrac{2\pi}{\gamma}$

En este caso $\tau_R > T_0$

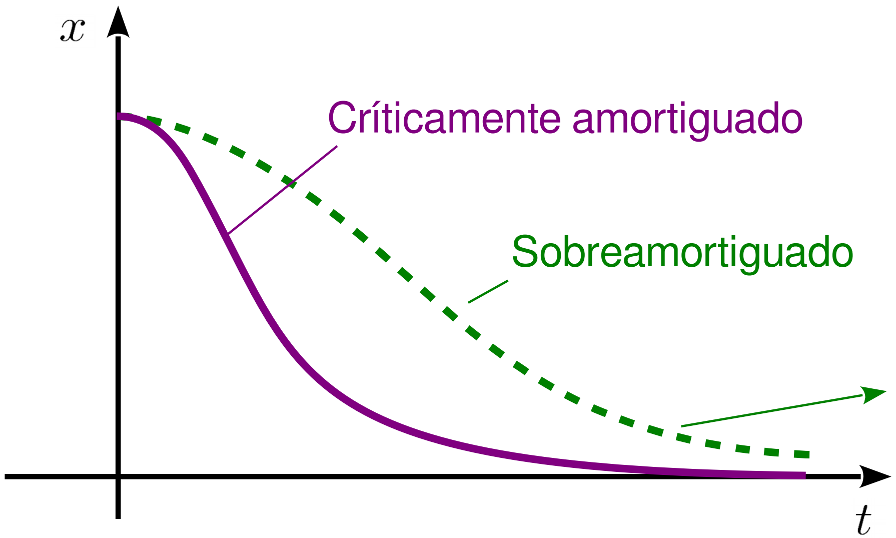
Oscilador sobreamortiguado ($\gamma>\omega_0$)

- Solución

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = a_1\, e^{-\lambda_1 t} + a_2\, e^{-\lambda_2 t} \\ \lambda_1, \lambda_2 > 0 \end{array}}$$

- Es una función decreciente en el tiempo: no hay oscilaciones

- Si $\gamma=\omega_0$ está críticamente amortiguado, el decaimiento es el más rápido



- Tiempos típicos

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad \tau_R = \frac{2\pi}{\gamma}$$

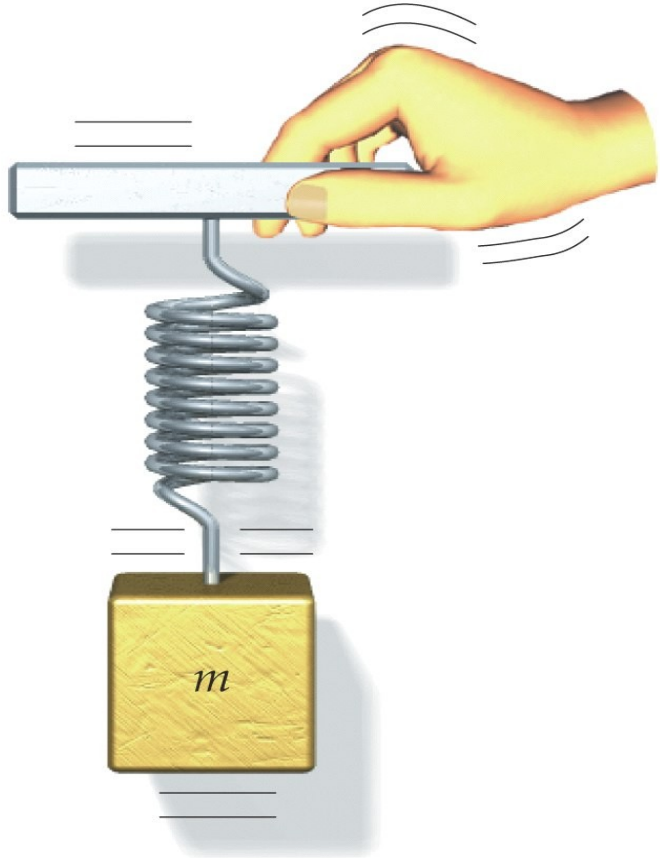
En el caso sobreamortiguado $\tau_R < T_0$

En amortiguamiento crítico $\tau_R = T_0$

- Introducción
- Representación matemática del MAS
  - Ejemplos: muelle, péndulo simple
- Energía
- Otras aplicaciones del MAS
- Oscilaciones amortiguadas
- Oscilaciones forzadas: resonancia

- En un oscilador amortiguado la energía decrece con el tiempo y las oscilaciones decaen

- Para mantener las oscilaciones un agente externo debe suministrar al sistema la energía que se pierde



- El agente externo ejerce una fuerza sobre el oscilador, con una frecuencia ω_e

$$\vec{F} = \vec{F}_0 \cos(\omega_e t)$$

- Segunda Ley de Newton en una dimensión

$$m\vec{a} = \vec{F}_R + \vec{F}_{osc} + \vec{F}_0 \cos(\omega_e t)$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_e t)$$

$$\gamma = b/2m$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

- Fasores
  - Buscamos soluciones que oscilen con la misma frecuencia que el término forzador (régimen permantente)

$$F(t) = F_0 \cos(\omega_e t) = \mathrm{Re}(F_0 e^{i\omega_e t})$$

$$x(t) = A\cos(\omega_e t + \phi) = \mathrm{Re}(A\, e^{i(\omega_e t + \phi)}) = \mathrm{Re}(\tilde{x} e^{i\omega_e t}) \qquad \tilde{x} = A\, e^{i\phi}$$

$\tilde{x}$ no depende del tiempo

- Planteamos la ecuación del MAS forzado para los fasores

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_e t)$$

$$x(t) \to \tilde{x}\, e^{i\,\omega_e t}$$

$$\dot{x}(t) \to i\,\omega_e\,\tilde{x}\, e^{i\,\omega_e t}$$

$$\ddot{x}(t) \to -\omega_e^2\,\tilde{x}\, e^{i\,\omega_e t}$$

$$F_0 \to F_0\, e^{i\,\omega_e t}$$

$$\boxed{-\omega_e^2\tilde{x} + i2\gamma\omega_e\tilde{x} + \omega_0^2\tilde{x} = \frac{F_0}{m} \qquad \text{Ecuación algebraica para } \tilde{x}}$$

- Resolvemos la ecuación algebraica

$$-\omega_e^2\tilde{x} + i2\gamma\omega_e\tilde{x} + \omega_0^2\tilde{x} = \frac{F_0}{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tilde{x}(\omega_e) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega_e^2 + 2\omega_e\gamma i}}$$

- La solución para el fasor puede escribirse $\tilde{x}(\omega_e) = A\, e^{i\phi}$

$$A(\omega_e) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + (2\gamma\,\omega_e)^2}} \qquad \phi(\omega_e) = \arctan\left(\frac{2\gamma\omega_e}{\omega_e^2 - \omega_0^2}\right)$$

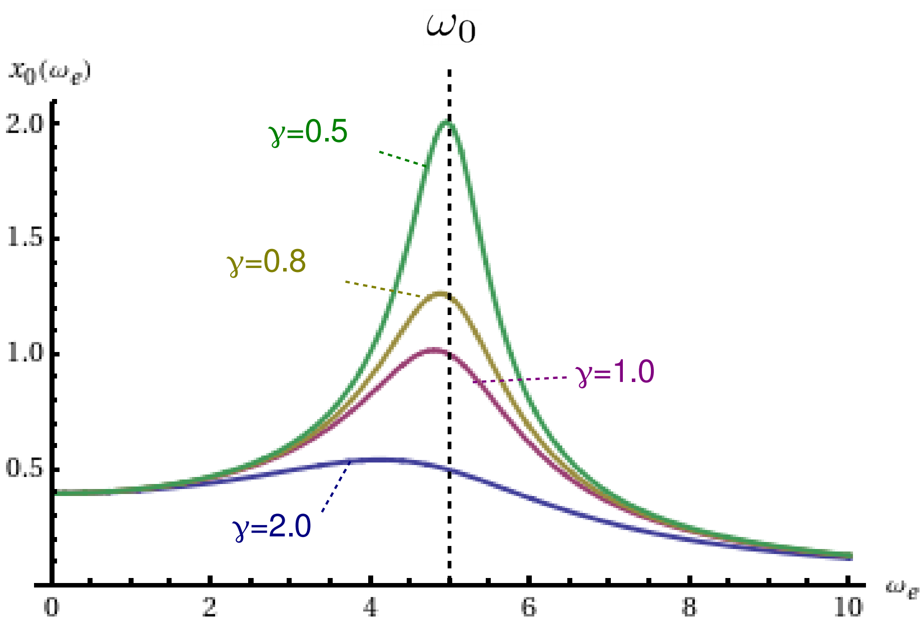
- Para recuperar la solución del MAS forzado en régimen permanente tomamos la parte real

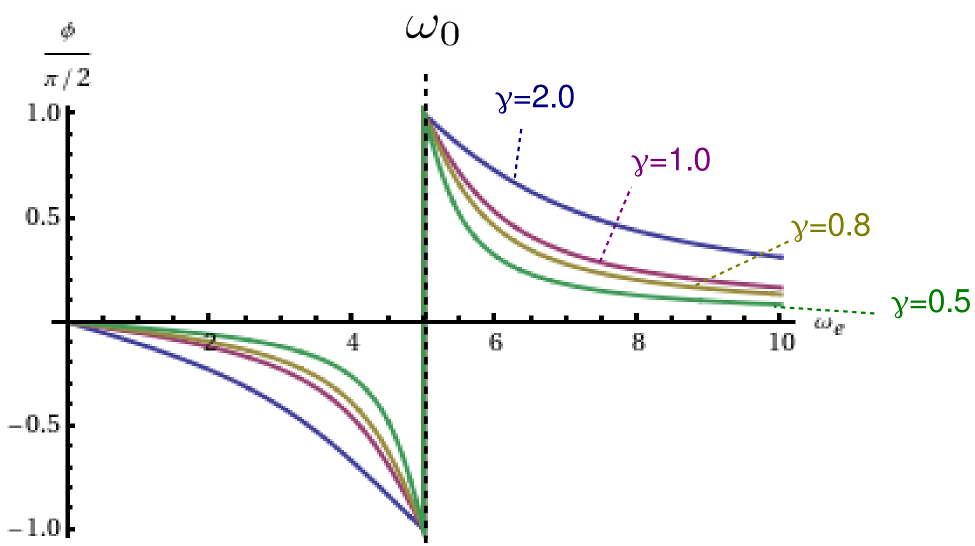
$$\boxed{x(t) = \mathrm{Re}(A\, e^{i(\omega_e t + \phi)}) = A\cos(\omega_e t + \phi)}$$

Oscilaciones forzadas

- Al aplicar la fuerza, aparecen soluciones transitorias y permanentes
  - Las transitorias son similares a las del oscilador con rozamiento
  - Después de un cierto tiempo, la única solución que queda es la del régimen permanente

- La amplitud de las oscilaciones y el desfase con la fuerza dependen de la frecuencia de la fuerza forzadora





La amplitud de la oscilación se hace máxima cuando ω_e se aproxima a ω_0 $\quad T_e \simeq T_0$

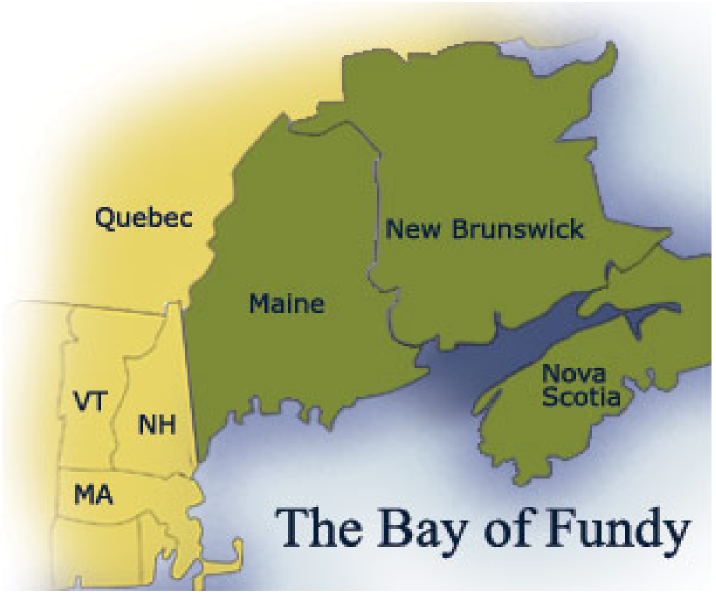
$$T_e = 2\pi/\omega_e$$
$$T_0 = 2\pi/\omega_0$$

Si el rozamiento es pequeño la amplitud puede ser muy grande

- Movimiento del oscilador forzado
  - Estado inicial transitorio
  - Estado estacionario
    - Oscila con ω_e y $A(\omega_e)$
    - La energía es constante (suministrada=disipada)
- La resonancia ocurre cuando $\omega_e \simeq \omega_0$

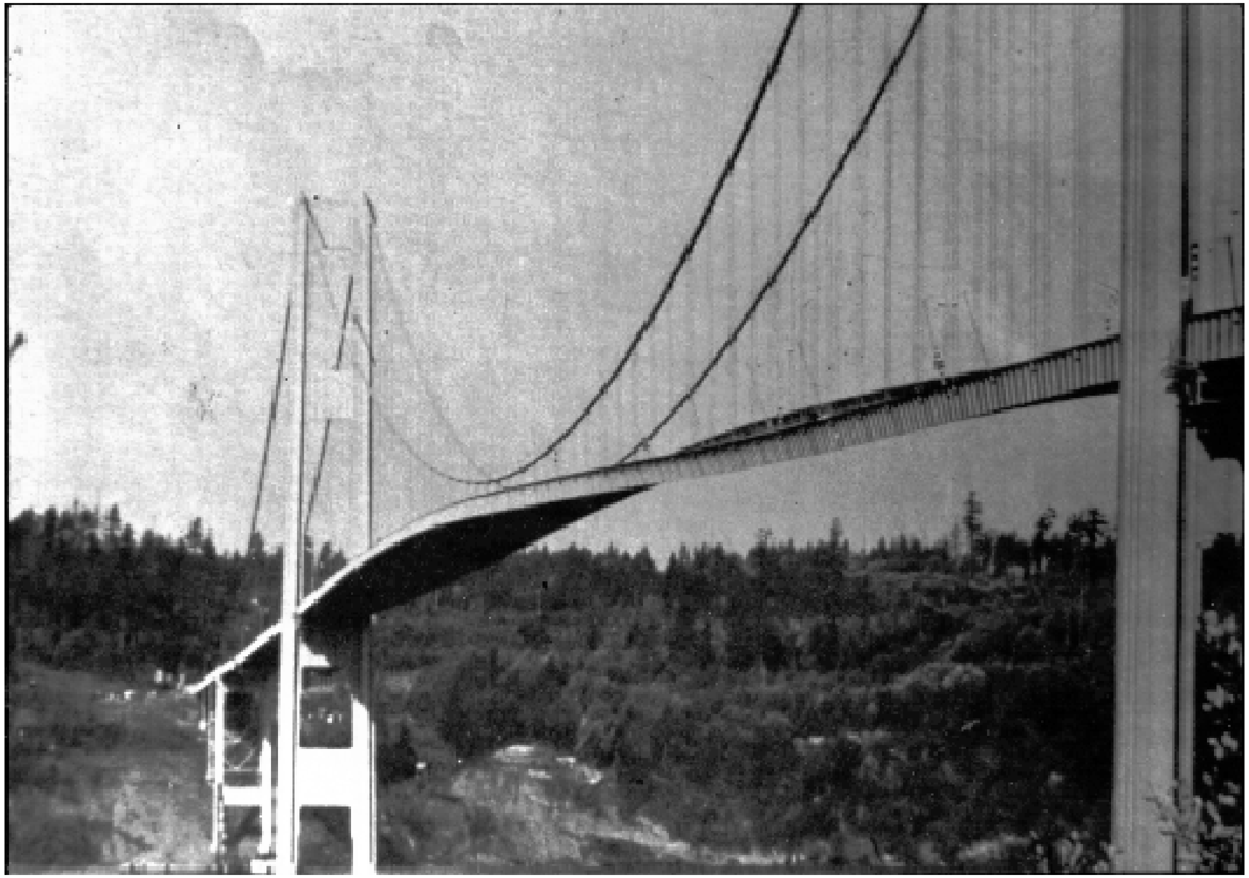
El sistema oscila con energía y amplitud máximas

- La bahía de Fundy se conoce por registrar la máxima diferencia en el nivel del agua entre la marea alta y la bajamar (alrededor de 17 metros)
- Se cree que el nombre “Fundy” data del siglo XVI, cuando exploradores portugueses llamaron a la bahía "Rio Fundo“ (río profundo)
- El folklore popular afirma que las mareas son causadas por una ballena gigante que chapotea en el agua
- Los oceanógrafos atribuyen el fenómeno a la **resonancia**, como resultado de la coincidencia entre el tiempo que necesita una gran ola para penetrar hasta el fondo de la bahía y regresar y el tiempo entre mareas altas (12.4 horas)



Resonancia: Bahía de Fundy

- El 7 de Noviembre de 1940 el puente de Tacoma Narrows, en el estado de Washington, USA, colapsó
- La causa fue la excitación de un modo de torsión propio por el viento
- Sirvió para entender que es importante comprender la interacción entre el viento y el puente colgante (aerodinámica)



Resumen

- El MAS ocurre cuando una partícula está sometida a una fuerza restauradora proporcional al desplazamiento desde la posición de equilibrio
- La posición de una partícula que experimenta un MAS varía de forma sinusoidal
  - La frecuencia depende de los parámetros del sistema (muelle, péndulo simple)
- La energía mecánica total es una constante del movimiento
- Una función periódica o no puede expresarse como combinación lineal de MAS
- Las oscilaciones amortiguadas aparecen cuando hay una fuerza resistiva que se opone al movimiento
- Para compensar la pérdida de energía un agente externo debe ejercer una fuerza: oscilaciones forzadas
- Si la frecuencia de la fuerza externa es próxima a la frecuencia propia del oscilador aparece la resonancia