



Tema 10: Introducción a la Dinámica del Sólido Rígido

FISICA I, 1º, Grado en Ingeniería Energética, Robótica y Mecatrónica

Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

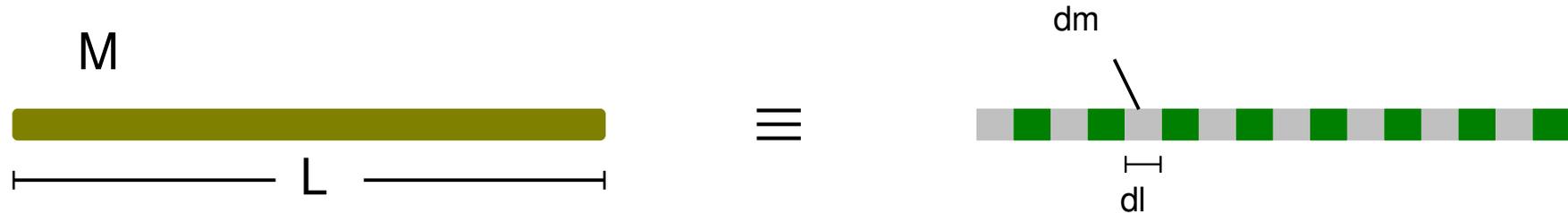
Universidad de Sevilla

- **Introducción**
- Densidades de masa
- Centro de masas
- Teoremas de conservación
 - **Cantidad de movimiento**
 - **Momento cinético**
 - **Energía**
- Colisiones

- Los **sistemas reales** son sistemas de partículas
- El comportamiento de los sistemas se puede descomponer en **dos partes**
 - El movimiento del sistema **como un todo** (movimiento del centro de masas)
 - El movimiento **interno** (movimiento respecto al centro de masas)
- Las magnitudes cinéticas (energía, cantidad de movimiento y momento angular) se generalizan para sistemas de partículas
- Bibliografía
 - Tipler, Mosca, Física par la Ciencia y la Tecnología,
 - Wiki de la página web

- Introducción
- Densidades de masa
- Centro de masas
- Teoremas de conservación
 - Cantidad de movimiento
 - Momento cinético
 - Energía
- Colisiones

- Un cuerpo continuo puede considerarse compuesto por un número infinito de masas diferenciales



- Los sumatorios se convierten en diferenciales

$$M = \sum dm \implies \int dm$$

$$L = \sum dl \implies \int dl$$

- Densidad lineal de masa $dm = \mu dl$

$$M = \int_L \mu dl$$

- Si el cuerpo es homogéneo $\mu = \frac{M}{L}$

- Densidad superficial de masa

$$dm = \sigma dS$$

$$M = \int_S \sigma dS$$

- Si el cuerpo es homogéneo $\sigma = \frac{M}{S}$

- Densidad volumétrica de masa

$$dm = \rho dV$$

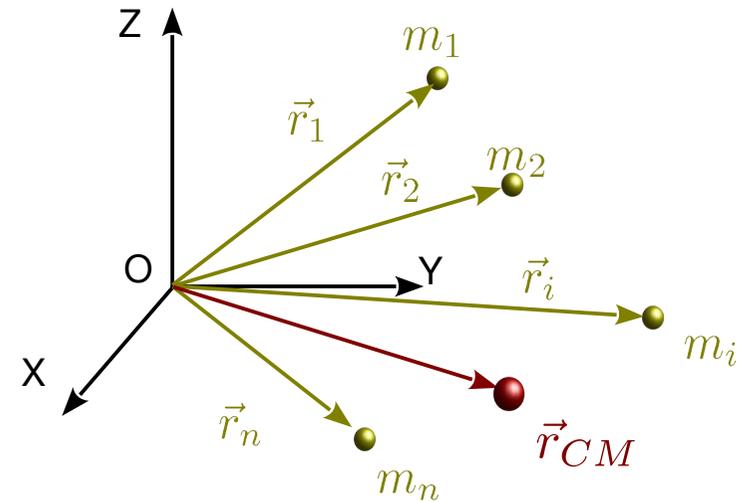
$$M = \int_V \rho dV$$

- Si el cuerpo es homogéneo $\rho = \frac{M}{V}$

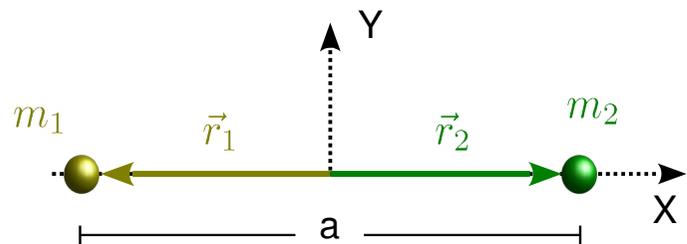
- Introducción
- Densidades de masa
- Centro de masas
- Teoremas de conservación
 - Cantidad de movimiento
 - Momento cinético
 - Energía
- Colisiones

- Dado un sistema de n partículas, se define la posición de su centro de masas

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{M}$$



- m_i es la masa de cada partícula
- \mathbf{r}_i es el vector de posición de cada partícula
- M es la masa total del sistema

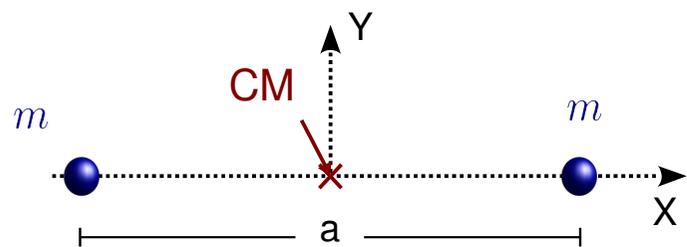


$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= -\frac{a}{2} \vec{i} \\ \vec{r}_2 &= +\frac{a}{2} \vec{i} \end{aligned}$$



$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) \frac{a}{2} \vec{i}$$

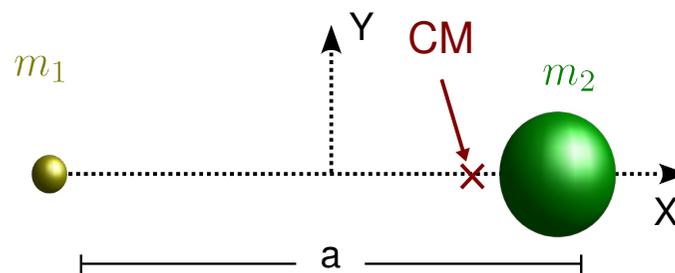
$$m_1 = m_2 = m$$



$$\vec{r}_{CM} = \vec{0}$$

Si el sistema tiene algún plano, línea o punto de **simetría**, el CM está en él

$$m_1 \ll m_2$$



$$\begin{aligned} \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) &\simeq \frac{m_2 - m_1}{m_2} \\ &\simeq 1 - \frac{m_1}{m_2} \end{aligned}$$

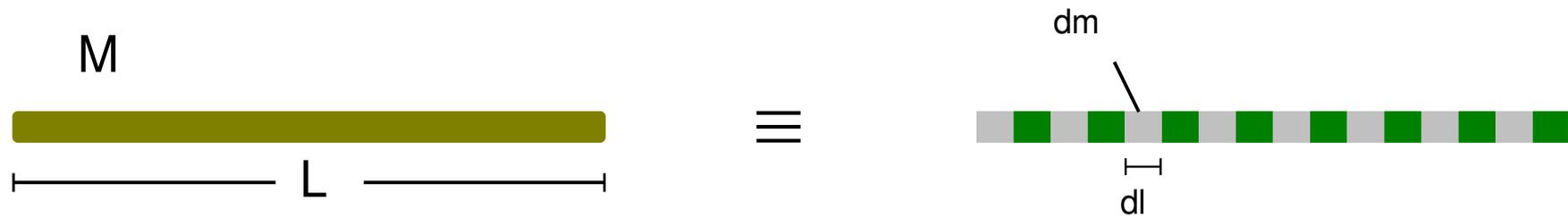
$$\vec{r}_{CM} \simeq \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \right) \frac{a}{2} \vec{i}$$

El CM está cerca de la masa **mayor**

Ejemplo: $m_{\text{tierra}} = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$, $m_{\text{sol}} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$,

$$a = 1.5 \times 10^8 \text{ km}$$

- Un cuerpo continuo puede considerarse compuesto por un número infinito de masas diferenciales

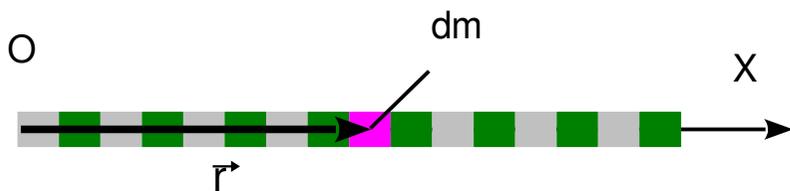


- Los sumatorios se convierten en diferenciales

$$M = \sum dm \implies \int dm$$

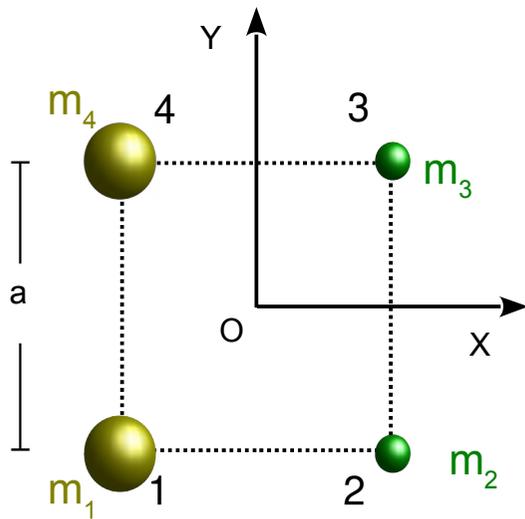
$$L = \sum dl \implies \int dl$$

- Posición del centro de masas



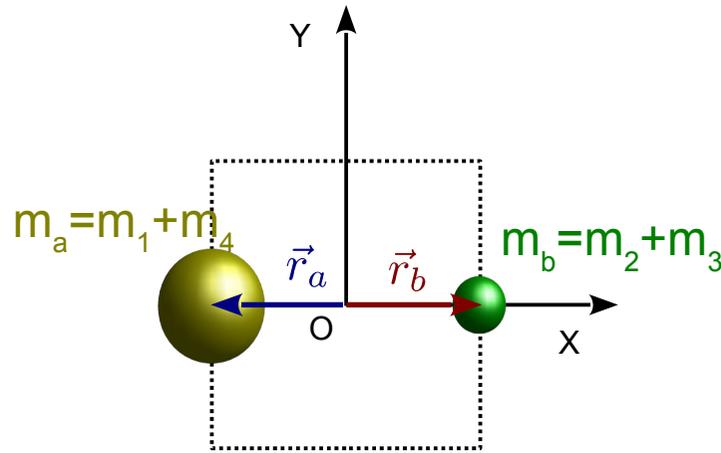
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} dm}{M}$$

- Podemos calcular el CM como una composición de partes del sistema



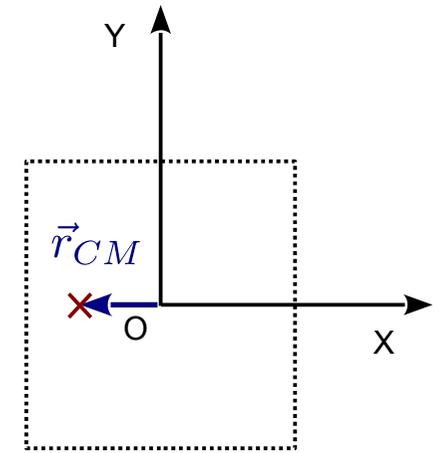
$$m_1 = m_4$$

$$m_2 = m_3$$



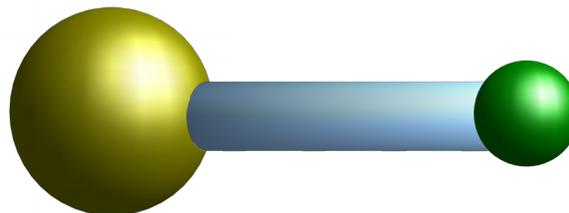
$$\vec{r}_a = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_4 \vec{r}_4}{m_1 + m_4} = -\frac{a}{2} \vec{i}$$

$$\vec{r}_b = \frac{m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_2 + m_3} = \frac{a}{2} \vec{i}$$



$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_a \vec{r}_a + m_b \vec{r}_b}{m_a + m_b}$$

- De este modo se puede calcular el CM de sistemas complejos

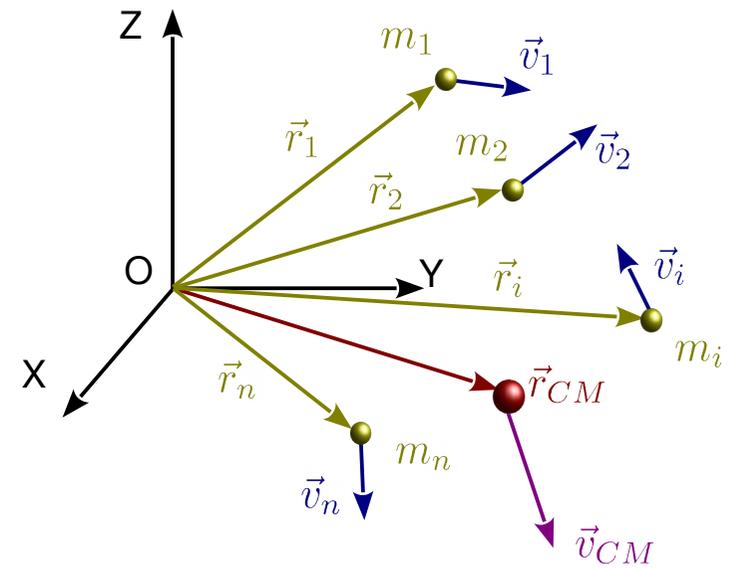


- Si las partículas se mueven la posición del CM varía en el tiempo

$$\vec{r}_{CM}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i(t)}{M}$$

- Derivando en t se obtiene la velocidad del CM

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{M}$$



Sistema discreto

$$M\vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

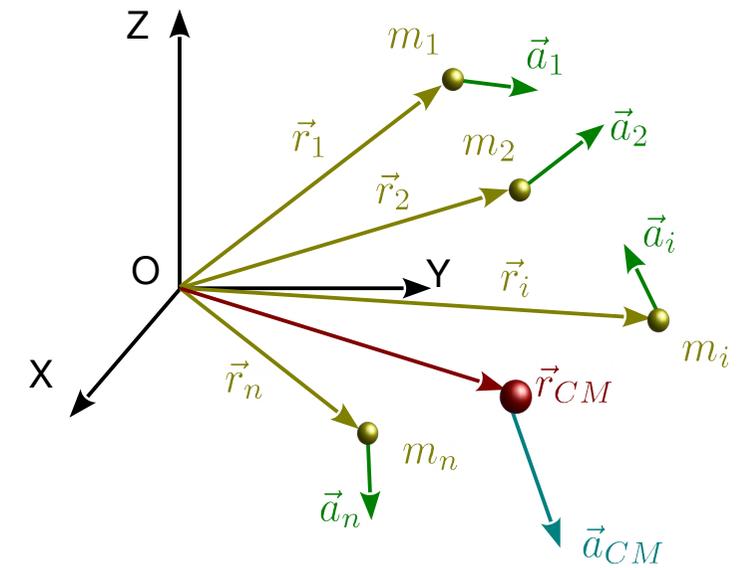
Sistema continuo

$$M\vec{v}_{CM} = \int \vec{v} dm$$

- La aceleración del CM se obtiene derivando su velocidad respecto del tiempo

$$\vec{v}_{CM}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{M}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i}{M}$$



Sistema discreto

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i$$

Sistema continuo

$$M\vec{a}_{CM} = \int \vec{a} dm$$

- La fuerza sobre cada partícula tiene una componente externa y otra interna

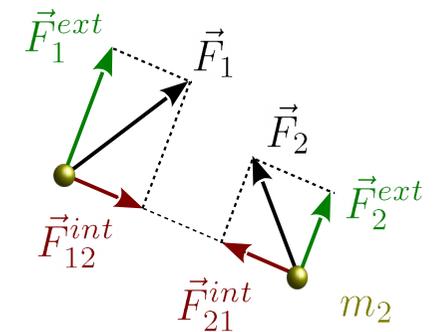
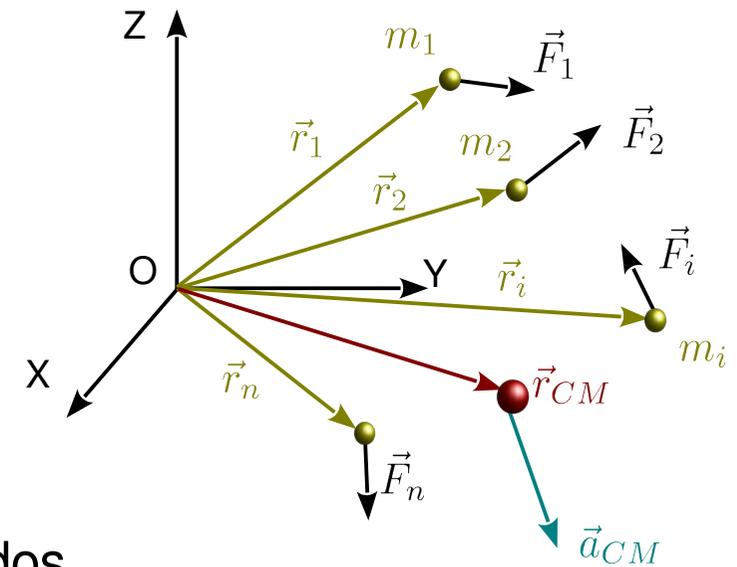
$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}$$

- Aplicando la Segunda Ley a cada partícula

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{int} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{ext}$$

- Por la Tercera Ley, las fuerzas internas se anulan dos a dos

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{int} = \vec{0}$$

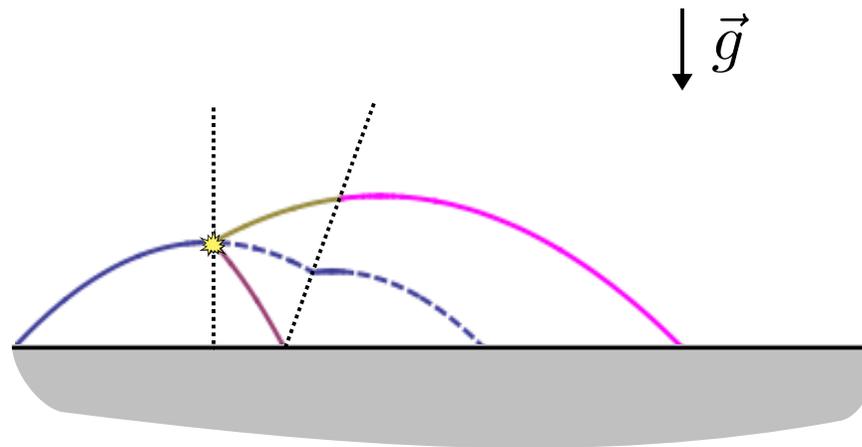


El centro de masas se mueve como una partícula con toda la masa del sistema sometida a la acción de la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema

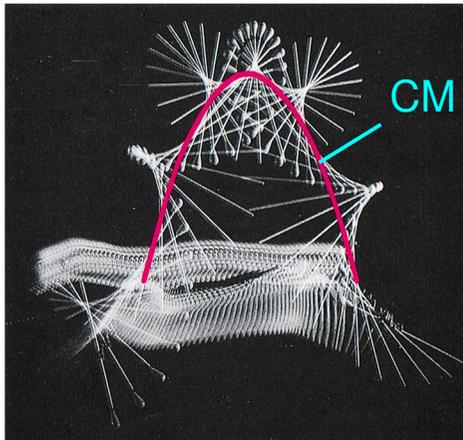
$$M\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{ext} = \vec{F}_{neta}^{ext}$$

- El movimiento del sistema **como un todo** puede describirse como el movimiento de su centro de masas sometido a la fuerza externa total sobre el sistema
- El movimiento interno del sistema es el **movimiento relativo** a un sistema de referencia solidario con el centro de masas

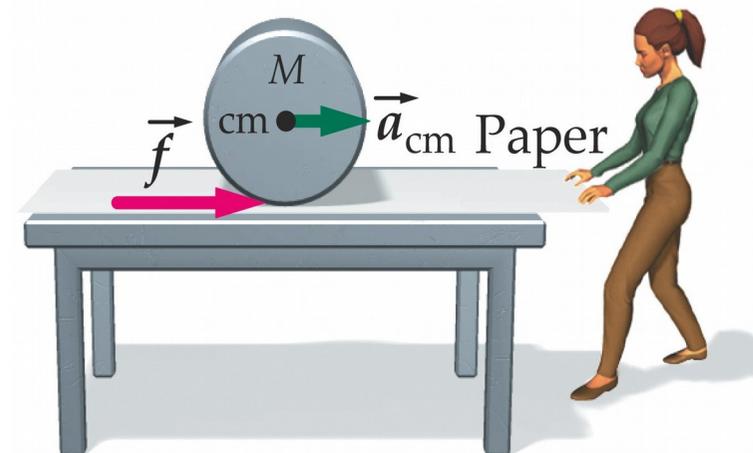
- Explosión de una granada en dos trozos de la misma masa



- Bastón lanzado al aire



- Cilindro sobre una mesa



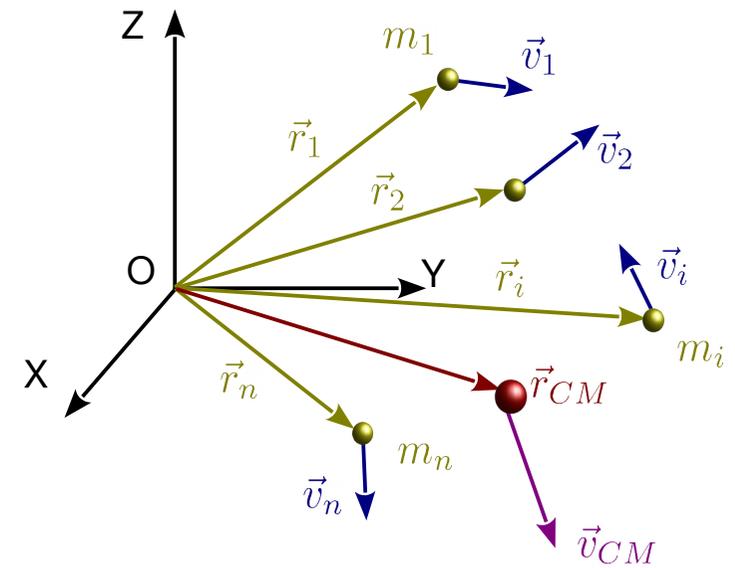
- Introducción
- Densidades de masa
- Centro de masas
- Teoremas de conservación
 - Cantidad de movimiento
 - Momento cinético
 - Energía
- Colisiones

Cantidad de movimiento de un sistema

- La cantidad de movimiento del sistema es la suma de la cantidad de movimiento de cada una de las partículas que lo componen

$$\vec{P}_{sis} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{P}_{sis} = \int d\vec{p} = \int \vec{v} dm$$



- En función de la velocidad del centro de masas

$$\vec{P}_{sis} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_{CM}$$

- Derivando respecto al tiempo (suponiendo M constante en el tiempo)

$$\frac{d\vec{P}_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt} (M\vec{v}_{CM}) = M \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = M \vec{a}_{CM}$$

$$M \vec{a}_{CM} = \sum_{j=1}^m \vec{F}_j^{ext} = \vec{F}_{neta}^{ext}$$

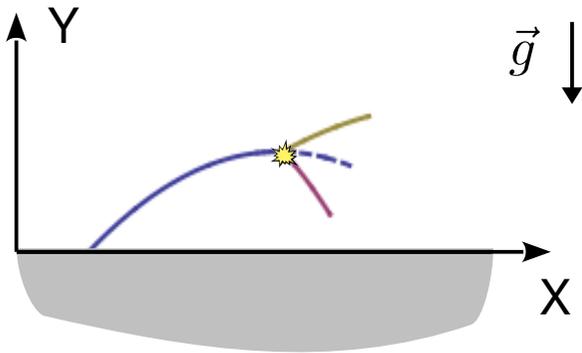


$$\frac{d\vec{P}_{sis}}{dt} = \vec{F}_{neta}^{ext}$$

La cantidad de movimiento de un sistema se conserva si la fuerza neta sobre él es nula

$$\vec{F}_{neta}^{ext} = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \frac{d\vec{P}_{sis}}{dt} = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \vec{P}_{sis} = cte$$

- Si alguna componente de la fuerza es nula se conserva el momento lineal en esa componente



Antes de la explosión

$$\vec{F}_{neta}^{ext} = -Mg\vec{j}$$

Después de la explosión

$$\begin{aligned} \vec{F}_{neta}^{ext} &= -m_1g\vec{j} - m_2g\vec{j} = -(m_1 + m_2)g\vec{j} \\ &= -Mg\vec{j} \end{aligned}$$

$$F_x^{ext} = 0 \implies P_x = cte \implies M v_x^{CM} = cte \implies v_x^{CM} = cte$$

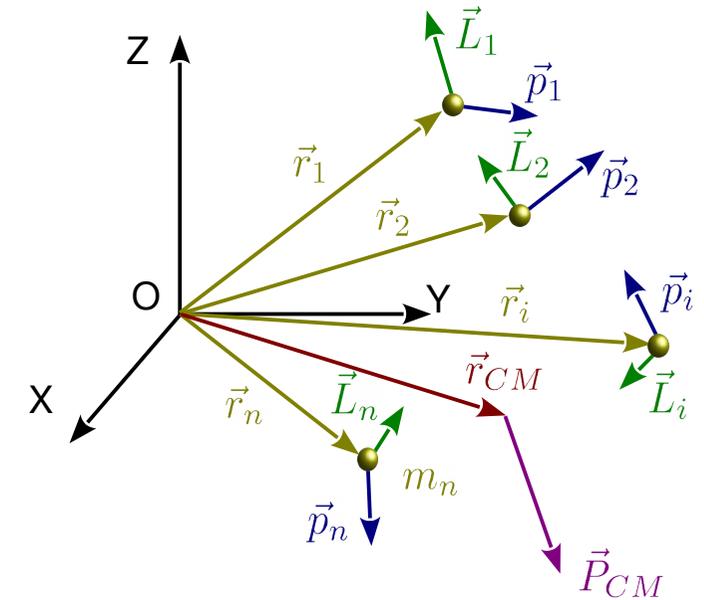
- Introducción
- Densidades de masa
- Centro de masas
- Teoremas de conservación
 - Cantidad de movimiento
 - Momento cinético
 - Energía
- Colisiones

Momento angular de un sistema

- El momento angular del sistema respecto a un punto es la suma de los momentos angulares de cada una de las partículas que lo componen respecto al mismo punto

$$\vec{L}_O^{sis} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_{O_i} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$$

$$\vec{L}_O^{sis} = \int d\vec{L}_O = \int \vec{r} \times d\vec{p} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm$$



- Teorema del Momento Cinético (T.C.M.)

$$\frac{d\vec{L}_O^{sis}}{dt} = \vec{M}_O^{ext}$$

- El momento angular de un sistema se puede dividir en dos partes

$$\vec{L}_O = \vec{L}_O^{CM} + \vec{L}'$$

$$d\vec{L}'/dt = \vec{M}_{CM}^{ext}$$

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Momento angular total del sistema respecto al punto O

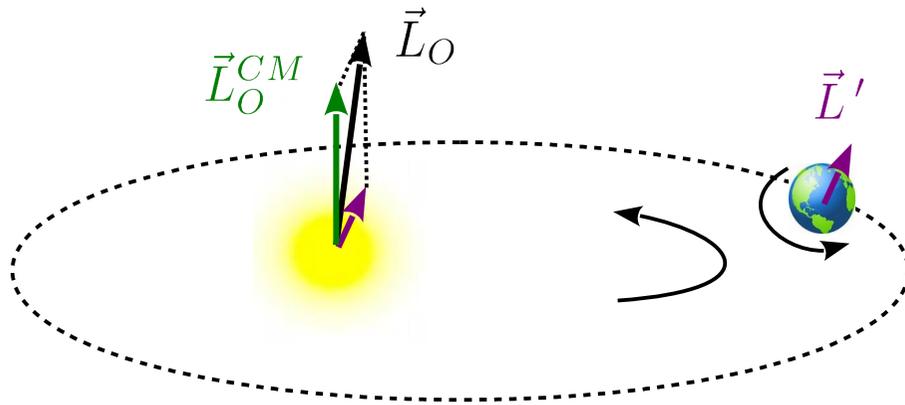
$$\vec{L}_O^{CM} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}_{sis} = \vec{r}_{CM} \times (M\vec{V}_{CM})$$

Momento angular del CM respecto al punto O

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i$$

Momento angular del sistema respecto al CM

- Ejemplo: rotación de la Tierra alrededor del Sol y de su eje



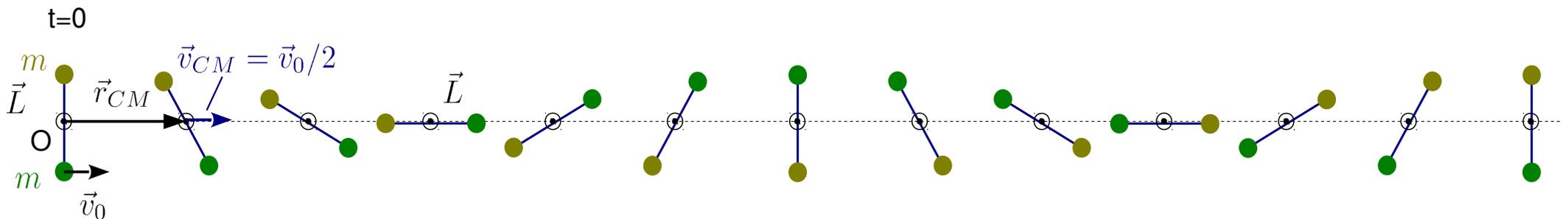
$$|\vec{L}_O^{CM}| \simeq M_T d_{TS}^2 \omega_{tras} \simeq 10^{40} \text{ kgm}^2/\text{s}$$

$$|\vec{L}'| \simeq \frac{2}{5} M_T R_T^2 \omega_{rot} \simeq 10^{33} \text{ kgm}^2/\text{s}$$

El momento angular de un sistema respecto a un punto se conserva si el momento resultante del sistema de fuerzas externas que actúa sobre él respecto al mismo punto se anula

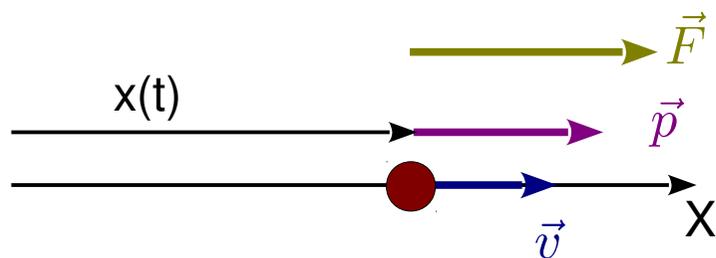
$$\vec{M}_O^{ext} = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \frac{d\vec{L}_O^{sis}}{dt} = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \vec{L}_O^{sis} = cte$$

■ Ejemplo



- Después del impulso inicial la fuerza neta externa es nula
- Se conserva la cantidad de movimiento y el momento angular del sistema

$$\vec{L} = \vec{L}^{CM} + \vec{L}' = \vec{r}_{CM} \times (M\vec{v}_{CM}) + \vec{L}' = \vec{L}'$$



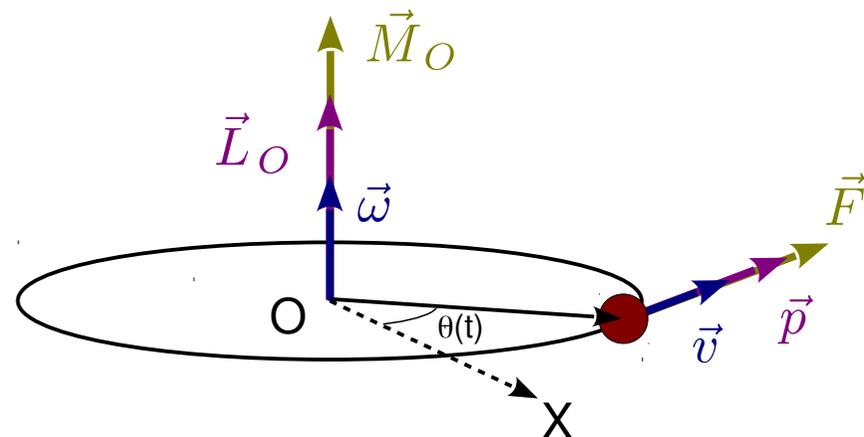
$$\vec{v} = \dot{x} \vec{i}$$

$$\vec{a} = \ddot{x} \vec{i}$$

$$\vec{p} = m \dot{x} \vec{i} = m \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$



$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k} \quad (\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta = R \omega \vec{u}_\theta)$$

$$\vec{\alpha} = \ddot{\theta} \vec{k} \quad (\vec{a}_T = R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta = R \alpha \vec{u}_\theta)$$

$$\vec{L}_O = m R^2 \dot{\theta} \vec{k} = m R^2 \omega \vec{k} = m R^2 \vec{\omega}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2$$

Momento de inercia respecto a un eje

- Si el eje de rotación es un eje de simetría y O es un punto fijo

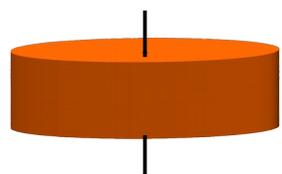
$$\vec{L}_O = I_{eje} \vec{\omega} \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_{eje} \vec{\alpha} = \vec{M}_O^{ext}$$

- Si el eje de rotación es un eje de simetría y G es el CM

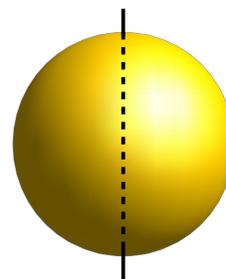
$$\vec{L}_G = I_{eje} \vec{\omega} \quad \frac{d\vec{L}_G}{dt} = I_{eje} \vec{\alpha} = \vec{M}_G^{ext}$$

- Válido aunque G se mueva

- Ejemplos de momentos de inercia

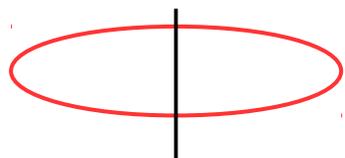


Disco o cilindro $I_{eje} = \frac{1}{2}MR^2$

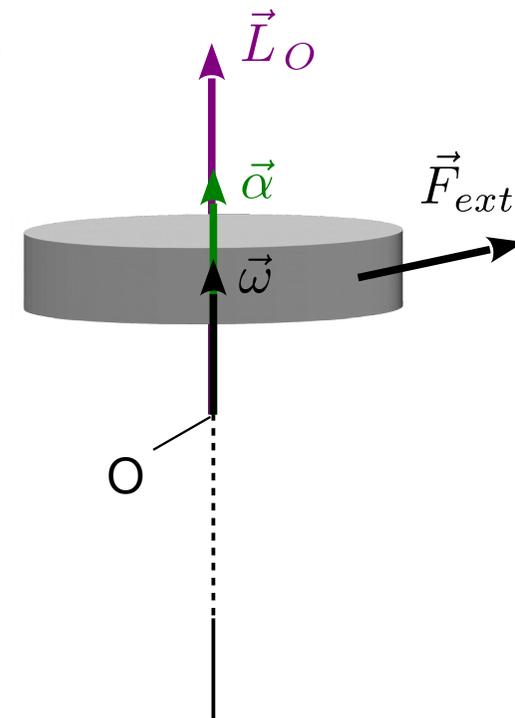


Esfera hueca $I_{eje} = \frac{2}{3}MR^2$

Esfera maciza $I_{eje} = \frac{2}{5}MR^2$

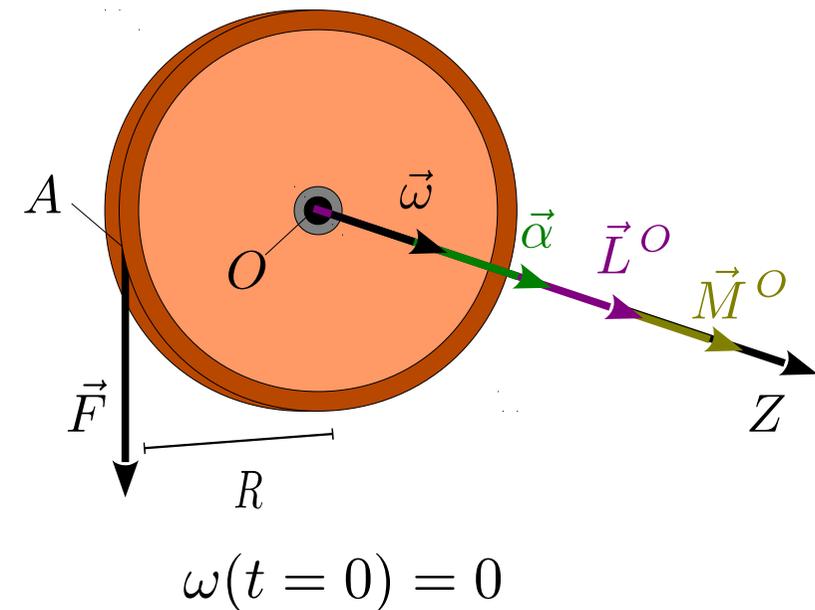


Aro o cilindro hueco $I_{eje} = MR^2$



Polea con masa con una fuerza constante aplicada

- Queremos calcular la aceleración angular de una polea de masa M y radio R , que parte del reposo, a la que se le aplica una fuerza constante F tangente a la polea



$$\vec{L}_O = I_O \omega \vec{k}$$

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{F} = R F \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_O \alpha \vec{k} = R F \vec{k}$$

$$\alpha = \frac{R F}{I_O} = \text{cte} \quad \longrightarrow \quad \omega = \frac{R F}{I_O} t$$

- Si modelamos la polea como un disco de radio R y masa M

$$I_O = \frac{1}{2} M R^2 \quad \longrightarrow \quad \omega = \frac{2 F}{M R} t$$

Disco que rueda y desliza, con contacto puntual

- Valores iniciales $v^C(0) = v^C(0) = v_0$ $\omega(0) = 0$

- La fuerza de rozamiento se opone al deslizamiento en A

- Análisis dinámico

- Fuerzas

$$\vec{\Phi} = N \vec{k}$$

$$M\vec{g} = -Mg \vec{k}$$

$$\vec{F}_R = -f \vec{v} = -\mu_d |\vec{\Phi}| \vec{v}$$

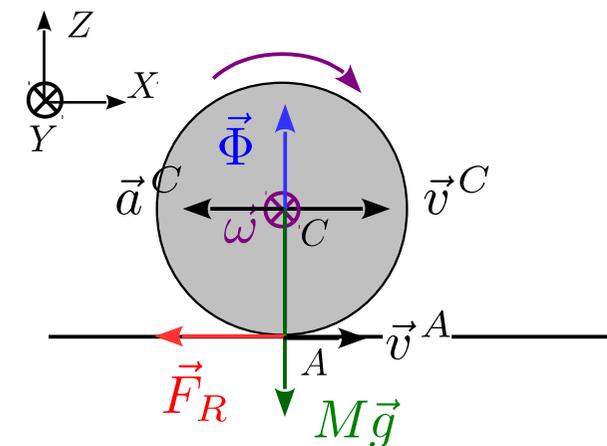
- Cinemática

$$\vec{v}^C = v \vec{i}$$

$$\vec{a}^C = a \vec{i}$$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{j}$$

$$\vec{\alpha} = \alpha \vec{j}$$



$$I = MR^2/2$$

- T.C.M.

$$M\vec{a}^C = M\vec{g} + \vec{\Phi} + \vec{F}_R$$

$$\vec{\Phi} = Mg \vec{k}$$

$$\vec{a}^C = -\mu_d g \vec{i}$$

$$\vec{v}^C = (v_0 - \mu_d g t) \vec{i}$$

- T.M.C.

$$I\vec{\alpha} = \vec{CA} \times \vec{F}_R$$

$$\vec{\alpha} = (2\mu_d g / R) \vec{j}$$

$$\vec{\omega} = t (2\mu_d g / R) \vec{j}$$

- El rozamiento aumenta la velocidad de rotación, y disminuye la de traslación, hasta que se alcanza la condición de rodadura sin deslizamiento
 - A partir de ese momento las aceleraciones se anulan

¿Cuándo rueda sin deslizar? $v^C = \omega R \implies t_{rod} = v_0 / 3\mu_d g$

- Par de fuerzas

- 2 fuerzas paralelas, igual módulo y sentido contrario

- Propiedades

- Resultante nula $\vec{R} = \vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{0}$

- Módulo del momento (d es el brazo) $|\vec{M}| = |\vec{F}| d$

- Es el mismo respecto a cualquier punto que se calcule

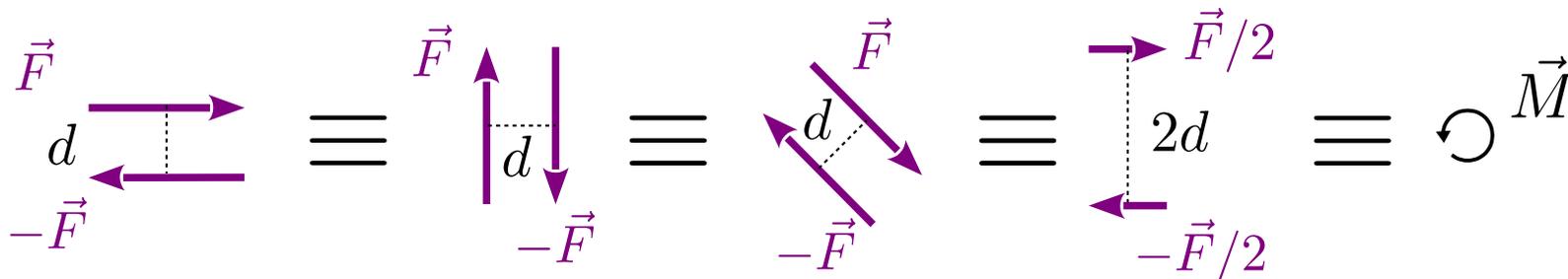
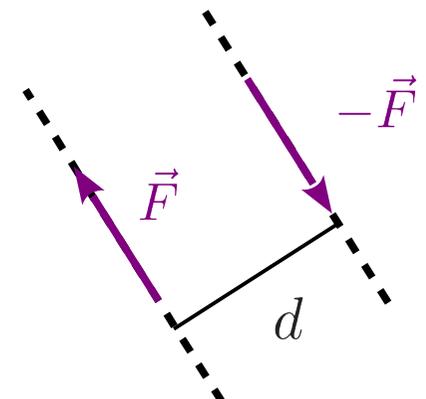
- Un par de fuerzas tiende a producir una rotación sin traslación del CM

- Volante de un coche, destornillador

- Todos los pares con el mismo momento son equivalentes

- Producen el mismo efecto mecánico

- Se pueden representar con el momento del par \vec{M}



Disco que rueda sin deslizar, con contacto puntual, con par aplicado en el eje

- Valores iniciales $v^C(0) = 0$ $\omega(0) = 0$

- La fuerza de rozamiento se opone al deslizamiento que crearía en A el par aplicado

Análisis dinámico

Fuerzas y par

$$\vec{\Phi} = N \vec{k}$$

$$M\vec{g} = -Mg \vec{k}$$

$$\vec{F}_R = f \vec{i}$$

$$\vec{\tau} = \tau_0 \vec{j}$$

T.C.M.

$$M\vec{a}^C = M\vec{g} + \vec{\Phi} + \vec{F}_R$$

$$\vec{\Phi} = Mg \vec{k}$$

$$\vec{a}^C = a_0 \vec{i} = \frac{2\tau_0}{3MR} \vec{i}$$

$$\vec{v}^C = a_0 t \vec{i}$$

Cinemática

$$\vec{v}^C = v \vec{i}$$

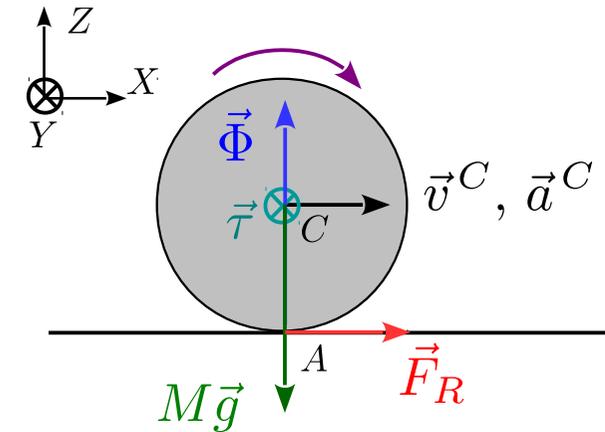
$$\vec{\omega} = \omega \vec{j}$$

T.M.C.

$$I\vec{\alpha} = \vec{CA} \times \vec{F}_R + \vec{\tau}$$

$$\vec{\alpha} = \alpha_0 \vec{j} = \frac{2\tau_0}{3MR^2} \vec{j}$$

$$\vec{\omega} = \alpha_0 t \vec{j}$$



$$I = MR^2/2$$

- El rozamiento es el responsable de que la rueda avance
- Al tener en cuenta los rozamientos (aire, de rodadura) se alcanza una velocidad constante
- Si el par es demasiado fuerte, la fuerza de rozamiento supera el valor máximo y el disco derrapa

$$|\vec{F}_R| = |M\vec{a}^C| = \frac{2\tau_0}{3R} \leq \mu_e Mg$$

- Introducción
- Densidades de masa
- Centro de masas
- Teoremas de conservación
 - Cantidad de movimiento
 - Momento cinético
 - Energía
- Colisiones

- Sólido rígido girando alrededor de un eje fijo de simetría

$$E_c^{rot} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\omega a_i)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i a_i^2 \right) \omega^2$$

$$E_c^{rot} = \frac{1}{2} I_{eje} \omega^2$$

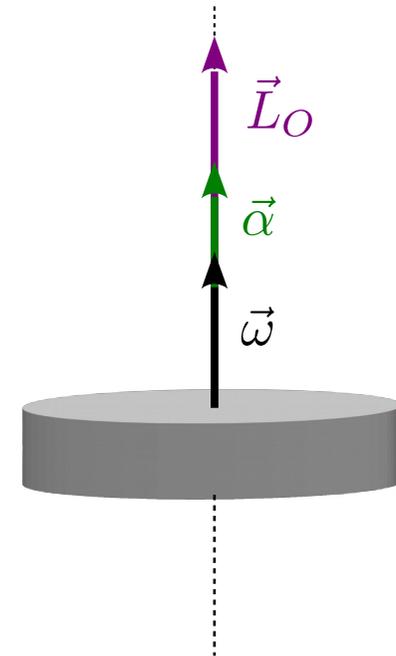
- Energía cinética total del sólido rígido

$$E_c^{tot} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{eje} \omega^2$$

- Teorema de las Fuerzas Vivas para un sólido rígido

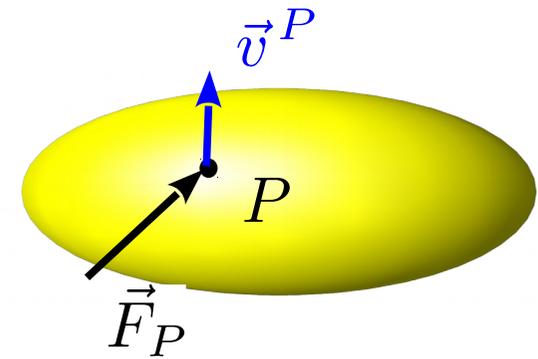
$$dE_c^{tot} = \delta W_{neto}$$

$$\Delta E_c^{tot} = W_{neto}$$



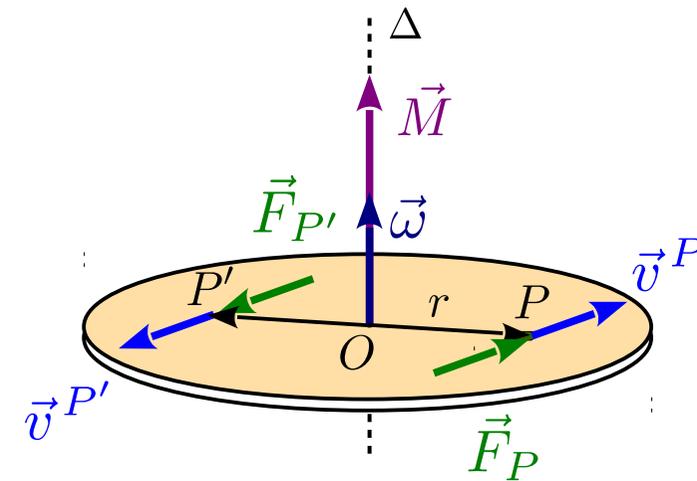
- Sólido rígido sometido a una fuerza

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F}_P \cdot d\vec{r}^P}{dt} = \vec{F}_P \cdot \frac{d\vec{r}^P}{dt} = \vec{F}_P \cdot \vec{v}^P$$



- Sólido rígido sometido a un par de fuerzas

$$\begin{aligned} P &= \vec{F}_P \cdot \vec{v}^P + \vec{F}_{P'} \cdot \vec{v}^{P'} \\ &= \vec{F}_P \cdot (\vec{v}^O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}) + \vec{F}_{P'} \cdot (\vec{v}^O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP'}) \\ &= (\vec{F}_P + \vec{F}_{P'}) \cdot \vec{v}^O + \vec{\omega} \cdot (\overrightarrow{OP} \times \vec{F}_P + \overrightarrow{OP'} \times \vec{F}_{P'}) \\ &= \vec{M}_O \cdot \vec{\omega} = \vec{M} \cdot \vec{\omega} \end{aligned}$$



- Teorema de las Fuerzas Vivas para un sólido rígido

$$dE_c^{tot} = P_{neta} dt \quad \Delta E_c^{tot} = \int P_{neta} dt = W_{neta}$$

$$\vec{F}_P = -\vec{F}_{P'}$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}$$

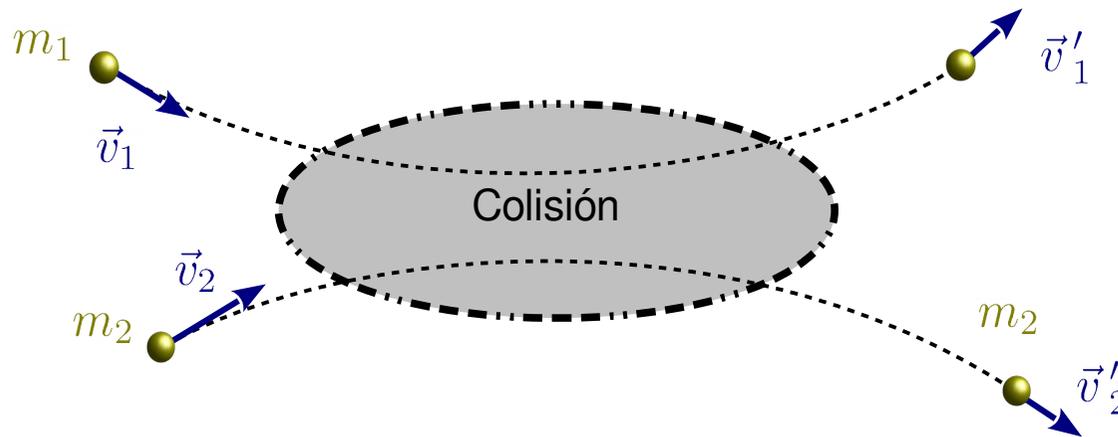
- Si el sólido está sometido a fuerzas conservativas se puede definir una energía potencial por cada interacción conservativa
 - Para la energía potencial gravitatoria se toma como referencia la altura del CM
- Energía mecánica del sólido rígido

$$E_m = E_c^{tot} + U = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{eje} \omega^2 + U$$

- Si las únicas fuerzas que hacen trabajo son las conservativas la energía mecánica del sólido se conserva

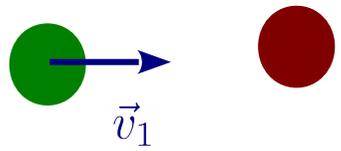
- Introducción
- Densidades de masa
- Centro de masas
- Teoremas de conservación
 - Cantidad de movimiento
 - Momento cinético
 - Energía
- Colisiones

- En una colisión dos objetos **se aproximan** el uno al otro e interaccionan de manera intensa durante un tiempo muy **corto**
- Durante la colisión puede **despreciarse** la influencia de las **fuerzas externas** y el **desplazamiento** de los objetos
 - Sólo se tiene en cuenta la interacción entre los cuerpos
 - Antes y después de la colisión la interacción entre los cuerpos es mucho menor que durante el choque
- Una colisión **no implica** necesariamente **contacto** entre los cuerpos que chocan

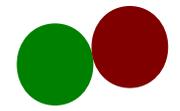


Ejemplos

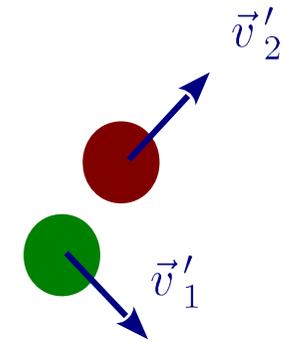
Colisión de dos bolas de billar



antes

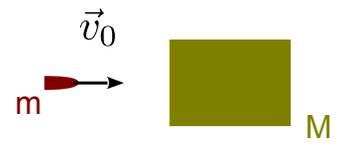


colisión



después

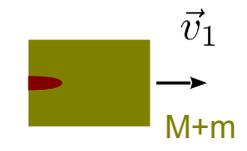
Impacto de una bala en un bloque



antes



colisión



después

- Se considera como sistema **todos los cuerpos** que intervengan en la colisión
- La **cantidad de movimiento** total del sistema **se conserva** durante la colisión, es decir, es la misma antes y después de la colisión
 - Las fuerzas externas al sistema no se tienen en cuenta durante la colisión
 - Sólo es cierto si las fuerzas internas cumplen la Tercera Ley de Newton
- Si las fuerzas internas son conservativas, la **energía mecánica se conserva** en la colisión
 - **Elástica**: la energía cinética total se conserva (billar)
 - **Inelástica**: la energía cinética total no se conserva (cometas, aceleración de sondas espaciales)
 - La variación de energía cinética se hace a costa de la energía potencial interna
 - **Completamente inelástica**: la energía cinética total no se conserva y los dos cuerpos quedan unidos después de la colisión (coche-pared, reacciones químicas, procesos de captura)
 - **Coefficiente de restitución**: $C_R = -(v_{2f} - v_{1f}) / (v_{2i} - v_{1i})$
 - $C_R=1$: choque elástico
 - $C_R=0$: choque completamente inelástico (plástico)

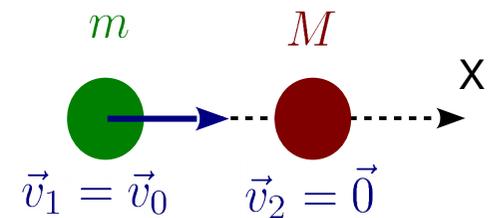
Choque unidimensional de dos partículas

Choque elástico

$$\vec{P} = \overrightarrow{cte}$$

$$T = cte$$

Antes



$$\vec{p}_1 = mv_0\vec{i}$$

$$\vec{p}_2 = \vec{0}$$

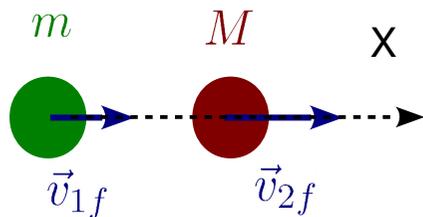
$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = mv_0\vec{i}$$

$$T_1 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$T_2 = 0$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Después



$$\vec{p}_{1f} = mv_{1f}\vec{i}$$

$$\vec{p}_{2f} = Mv_{2f}\vec{i}$$

$$\vec{P} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} = (mv_{1f} + Mv_{2f})\vec{i}$$

$$T_{1f} = \frac{1}{2}m(v_{1f})^2$$

$$T_{2f} = \frac{1}{2}M(v_{2f})^2$$

$$T = T_{1f} + T_{2f} = \frac{1}{2}m(v_{1f})^2 + \frac{1}{2}M(v_{2f})^2$$

Solución

$$m = M \longrightarrow$$

$$\vec{v}_{1f} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_{2f} = \vec{v}_0$$

$$\vec{v}_{1f} = v_0 \frac{m - M}{m + M} \vec{i}$$

$$m \ll M \longrightarrow \vec{v}_{1f} \simeq -\vec{v}_0 (1 - 2m/M)$$

$$\vec{v}_{2f} \simeq \frac{2m}{M} \vec{v}_0$$

$$\vec{v}_{2f} = v_0 \frac{2m}{m + M} \vec{i}$$

$$m \gg M \longrightarrow \vec{v}_{1f} \simeq \vec{v}_0 (1 - 2M/m)$$

$$\vec{v}_{2f} \simeq 2\vec{v}_0 (1 - M/m)$$

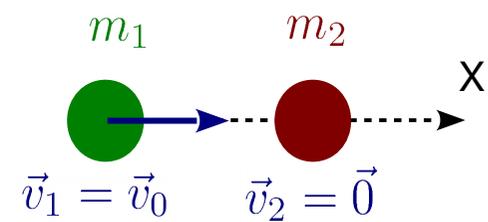
Choque unidimensional de dos partículas

Choque completamente inelástico

$$\vec{P} = \vec{cte}$$

$$T \neq cte$$

Antes



$$\vec{p}_1 = mv_0\vec{i}$$

$$\vec{p}_2 = \vec{0}$$

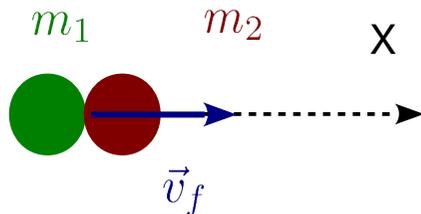
$$T_1 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$T_2 = 0$$

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = mv_0\vec{i}$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Después



$$\vec{P} = (m + M)v_f\vec{i}$$

$$T_f = \frac{1}{2}(m + M)(v_f)^2$$

Solución

$$\vec{v}_f = v_0 \frac{m}{m + M} \vec{i}$$

$$m = M \rightarrow$$

$$\vec{v}_f = \vec{v}_0/2$$

$$\Delta T = -T_1/2$$

$$m \ll M \rightarrow$$

$$\vec{v}_f \simeq \vec{v}_0(m/M)$$

$$\Delta T \simeq -T_1(1 - m/M)$$

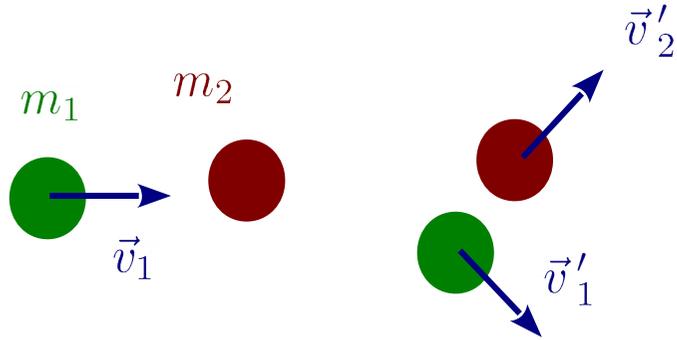
$$m \gg M \rightarrow$$

$$\vec{v}_f \simeq \vec{v}_0(1 - M/m)$$

$$\Delta T \simeq -T_1(M/m)$$

$$\Delta T = -\frac{M}{m + M} \frac{mv_0^2}{2}$$

- En este caso hay más incógnitas que ecuaciones



$$\vec{v}'_1, \vec{v}'_2$$



4 incógnitas

$$\vec{P} = \vec{cte}, \quad T = cte$$



3 ecuaciones

- Hay que tener en cuenta los detalles de la interacción durante la colisión
 - Bolas de billar: contacto entre las bolas
 - Cometa acercándose al Sol: interacción gravitatoria
 - Reacciones químicas: interacción eléctrica
 - Colisión de dos coches: deformaciones estructurales