Tema 3: Vectores libres

FISICA I, 1º Grado en Ingeniería Civil

Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

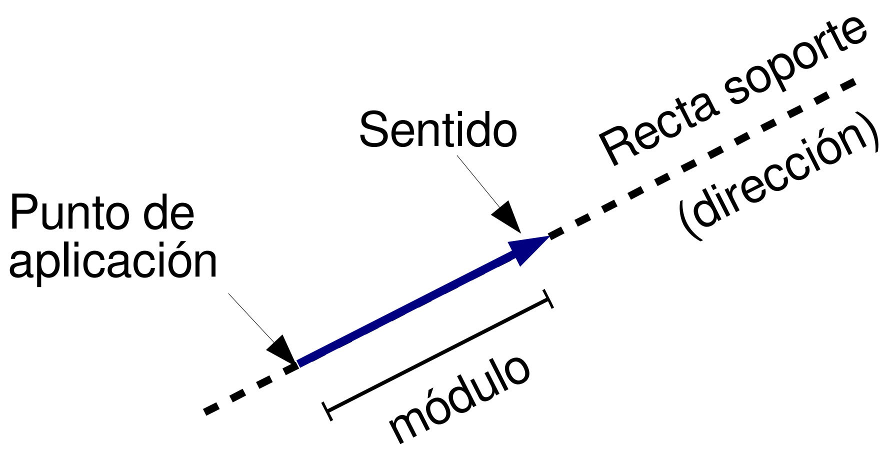
Universidad de Sevilla

Índice

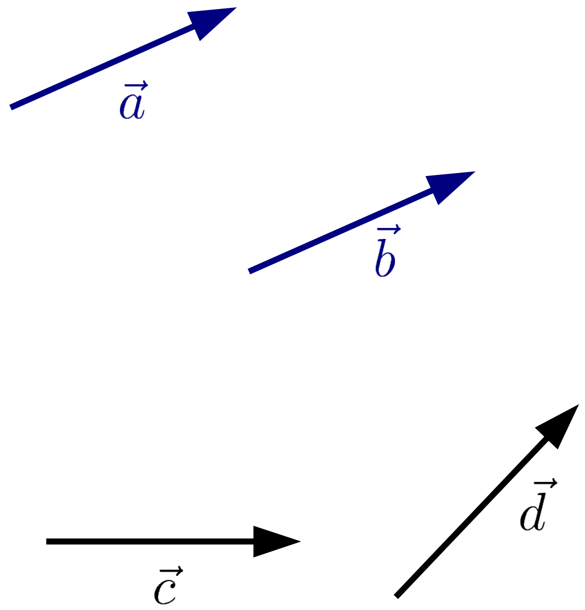
- Magnitud escalar : queda definida con un número y una unidad
  - Temperatura, longitud, carga eléctrica, tiempo, etc
- Magnitud vectorial: require magnitud, dirección y sentido
  - Velocidad, aceleración, fuerza, etc
- Magnitud tensorial

Índice

- En Matemáticas es un elemento de un espacio vectorial
- En Física es un segmento orientado: una flecha
  - Módulo
  - Recta soporte
  - Dirección
  - Sentido
  - Punto de aplicación
- Representación: **a** o $\vec{a}$



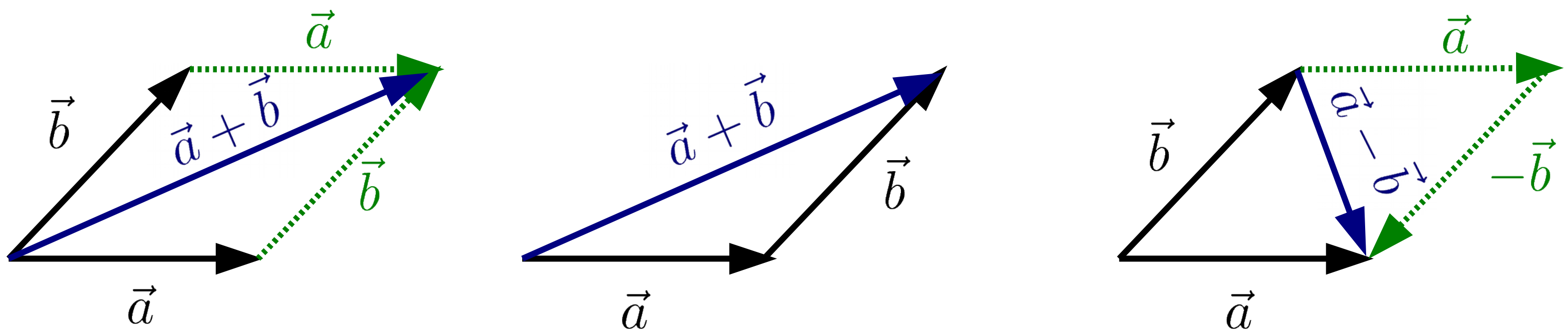
- Relación de equivalencia: **a** y **b** son vectores equivalentes si tienen el mismo módulo, dirección y sentido
  - Dos vectores libres equivalentes pueden hacerse coincidir si se desplazan en el espacio



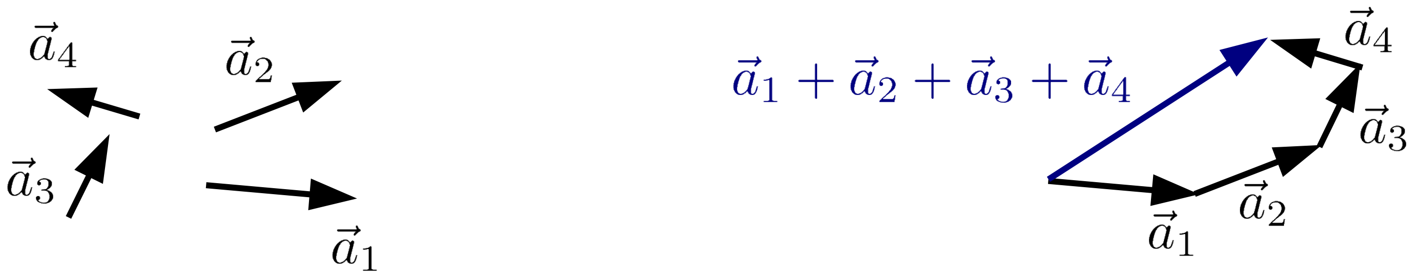
$$\vec{a} \equiv \vec{b}$$

$$\vec{c} \not\equiv \vec{d}$$

- Suma y resta de vectores libres
  - Dos vectores

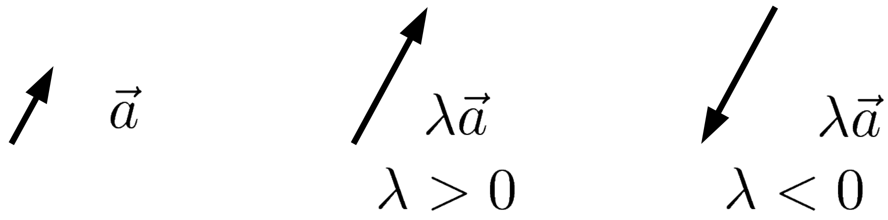


  - Varios vectores



- Propiedades de la suma
  - Conmutativa $$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$
  - Asociativa $$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$
  - Existencia de elemento neutro $$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$$
  - Existencia de elemento opuesto $$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$

- El producto por un escalar es otro vector

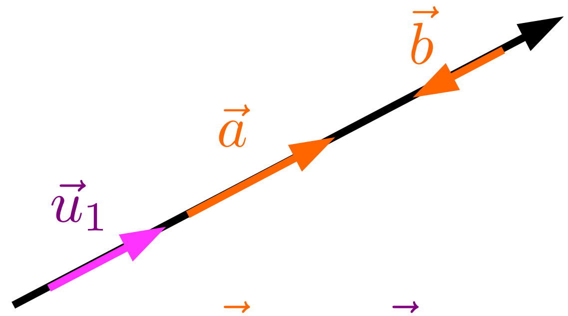


$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$$

- Propiedades
  - Asociativa respecto al producto por un escalar $\quad \lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
  - Distributiva respecto a la suma de vectores $\quad \lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$
  - Distributiva respecto a la suma de escalares $\quad (\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$
  - Existencia de escalar unidad $\quad 1\vec{a} = \vec{a}$

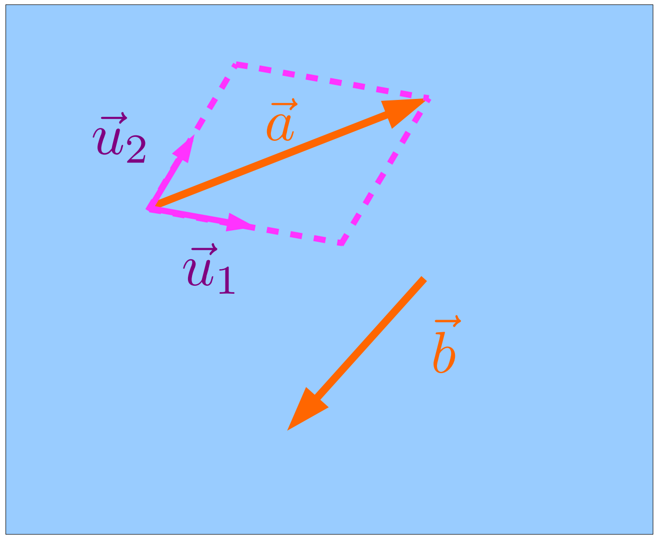
Bases vectoriales

- Los infinitos vectores que pueden definirse sobre una recta pueden caracterizarse con uno de los vectores y un número
  - La base del espacio vectorial formado por todos los vectores contenidos en una recta tiene dimensión 1



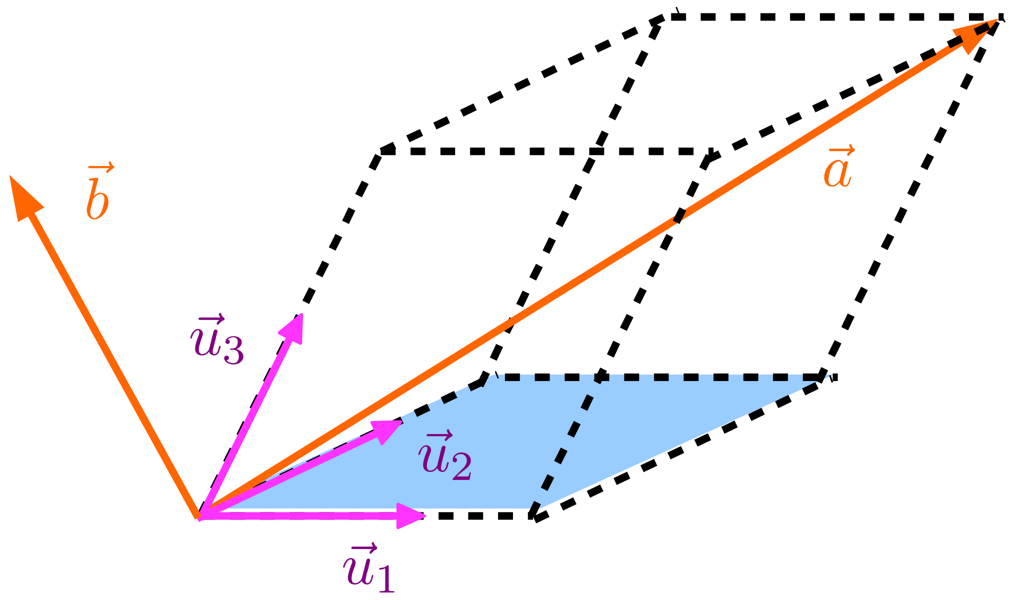
$$\vec{a} = a_1 \vec{u}_1$$
$$\vec{b} = b_1 \vec{u}_1$$

- Los infinitos vectores que pueden definirse sobre un plano pueden caracterizarse con dos de los vectores no colineales y dos números
  - La base del espacio vectorial formado por todos los vectores contenidos en un plano tiene dimensión 2



$$\vec{a} = a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2$$
$$\vec{b} = b_1 \vec{u}_1 + b_2 \vec{u}_2$$

- Los infinitos vectores que pueden definirse en un espacio tridimensional pueden caracterizarse con tres de los vectores no colineales y no coplanarios y tres números
  - La base del espacio vectorial formado por todos los vectores en el espacio tiene dimensión 3



$$\vec{a} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$$

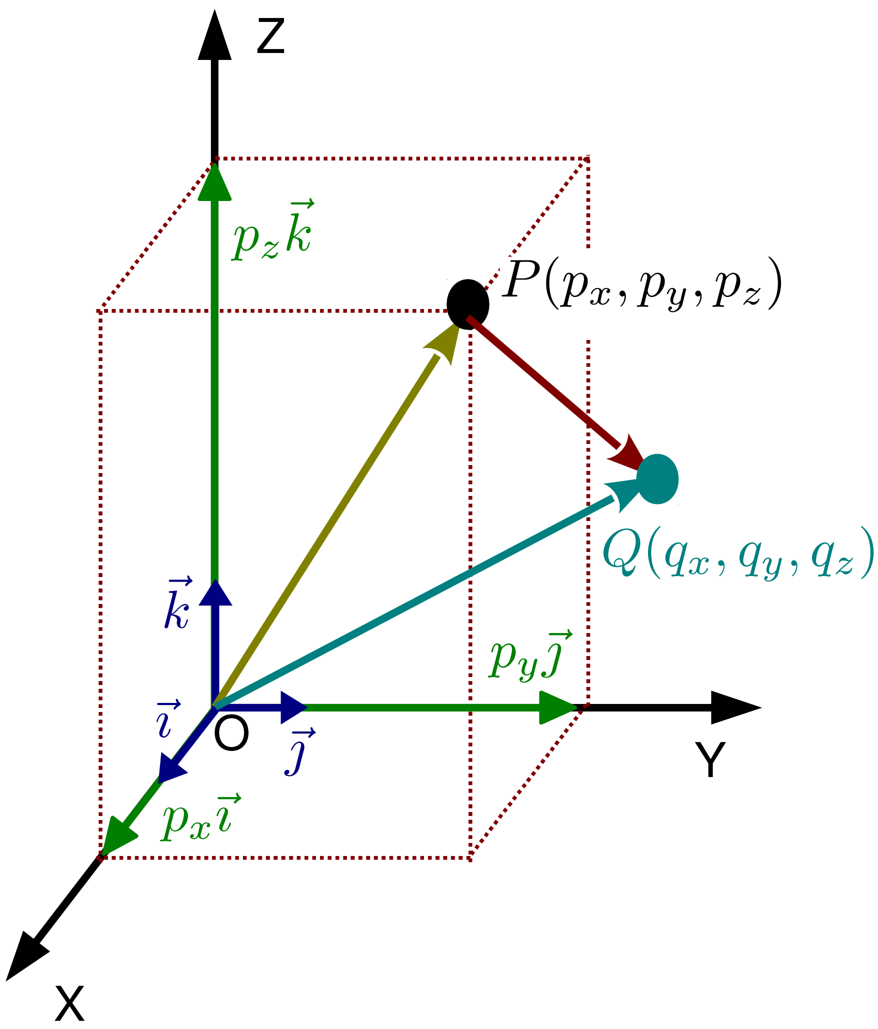
$$\vec{b} = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + b_3\vec{u}_3$$

- Una base en E_3 es una terna de vectores, $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, tal que cualquier vector **a** puede escribirse como combinación lineal de ellos

$$\vec{a} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 \qquad \vec{a} = [a_1, a_2, a_3]_{\text{"}B\text{"}}$$

  - a_1, a_2, a_3 son las componentes de **a** en la base B

- Para que tres vectores formen una base no deben ser ni colineales ni coplanarios (linealmente independientes)
  - La dimensión del espacio vectorial es el número mínimo de vectores linealmente independientes que pueden describir todos los vectores del espacio



Triedro OXYZ

Base ortonormal $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$

Componentes de un vector

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k} = [a_x, a_y, a_z]$$

Vector de posición

$$\overrightarrow{OP} = p_x\vec{\imath} + p_y\vec{\jmath} + p_z\vec{k} = [p_x, p_y, p_z]$$

Álgebra vectorial

Suma de vectores

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{\imath} + (a_y + b_y)\vec{\jmath} + (a_z + b_z)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [q_x - p_x, q_y - p_y, q_z - p_z]$$

Multiplicación de un vector por un escalar

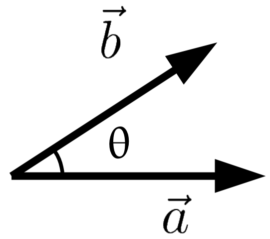
$$\lambda\vec{a} = (\lambda\, a_x)\,\vec{\imath} + (\lambda\, a_y)\,\vec{\jmath} + (\lambda\, a_z)\,\vec{k}$$

Índice

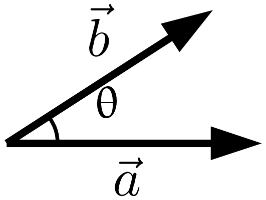
- Escalares y vectores
- Vectores libres
- Producto escalar
- Producto vectorial
- Producto mixto
- Doble producto vectorial

- Definición

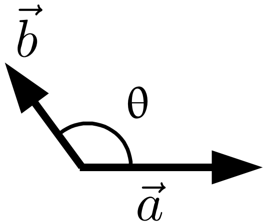
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$



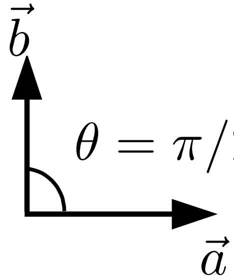
- El resultado de la operación es un escalar



$$\theta < \pi/2$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$$



$$\theta > \pi/2$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$$



$$\theta = \pi/2$$

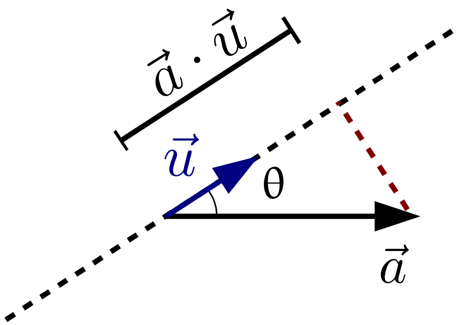
$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \\ \vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}\end{array}\right| \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

- Expresa de modo sencillo la condición de ortogonalidad, distancias y ángulos

- Permite calcular la proyección ortogonal de un vector sobre una dirección, representada por un vector unitario

$$|\vec{u}| = 1$$

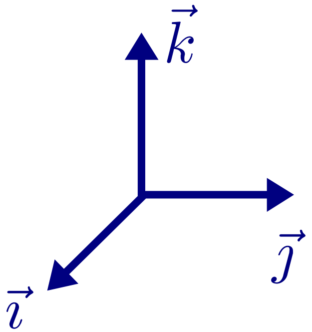
$$\vec{a}\cdot\vec{u} = 1\,|\vec{a}|\cos\theta = \mathrm{proy}_{\|\vec{u}}[\vec{a}]$$



Producto escalar: propiedades

- Asociativa resp. prod. por un escalar $$(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$$
- Conmutativa $$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$
- Distributiva resp. a suma $$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

- Los vectores de una base ortonormal son mutuamente perpendiculares y de módulo unidad
  - Ejemplo: base cartesiana



$$\begin{array}{lll} \vec{\imath}\cdot\vec{\imath}=1; & \vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}=0; & \vec{\imath}\cdot\vec{k}=0; \\ \vec{\jmath}\cdot\vec{\imath}=0; & \vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}=1; & \vec{\jmath}\cdot\vec{k}=0; \\ \vec{k}\cdot\vec{\imath}=0; & \vec{k}\cdot\vec{\jmath}=0; & \vec{k}\cdot\vec{k}=1 \end{array}$$

- Producto escalar de dos vectores expresados en una base ortonormal

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}=a_x\vec{\imath}+a_y\vec{\jmath}+a_z\vec{k} \\ \\ \vec{b}=b_x\vec{\imath}+b_y\vec{\jmath}+b_z\vec{k} \end{array}\right| \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

Producto escalar: aplicaciones

- Módulo de un vector

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- Distancia entre dos puntos

$$\mathrm{d}(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ}} =$$

$$= \sqrt{(q_x - p_x)^2 + (q_y - p_y)^2 + (q_z - p_z)^2}$$

- Ángulo entre dos vectores

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

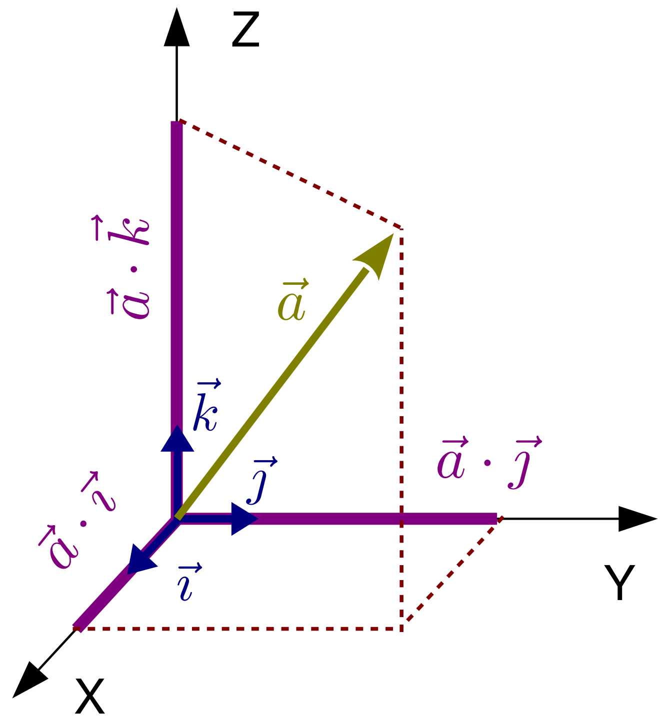
Define una métrica del espacio

- Vector unitario paralelo a uno dado

$$\vec{u}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

- Componentes cartesianas de un vector

$$\vec{a} = \underbrace{(\vec{a}\cdot\vec{\imath})}_{a_x}\,\vec{\imath} + \underbrace{(\vec{a}\cdot\vec{\jmath})}_{a_y}\,\vec{\jmath} + \underbrace{(\vec{a}\cdot\vec{k})}_{a_z}\,\vec{k}$$



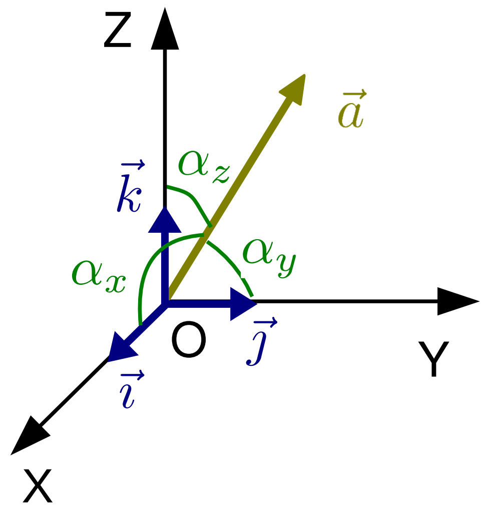
- Cosenos directores

$$\cos\alpha_x = \frac{\vec{a}\cdot\vec{\imath}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$$

$$\cos\alpha_y = \frac{\vec{a}\cdot\vec{\jmath}}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$$

$$\cos\alpha_z = \frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

$$\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z = 1$$



- Punto por el que pasa el plano

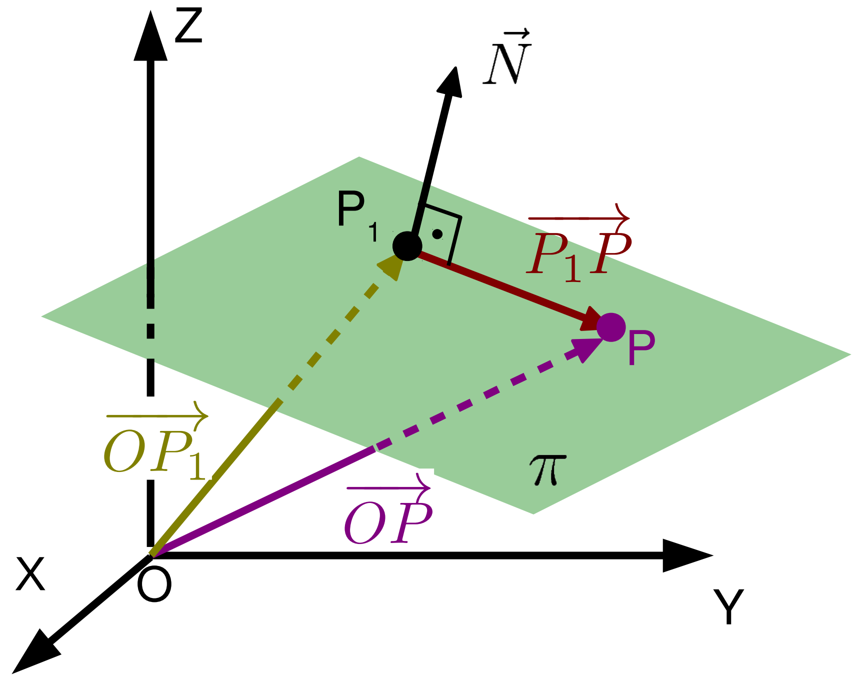
$$\overrightarrow{OP_1} = x_1\,\vec{\imath} + y_1\,\vec{\jmath} + z_1\,\vec{k}$$

- Vector normal al plano

$$\vec{N} = a\,\vec{\imath} + b\,\vec{\jmath} + c\,\vec{k}$$

- Punto genérico del plano

$$\overrightarrow{OP} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$$



- Condición para que el punto P esté en el plano

$$\vec{N}\cdot\overrightarrow{P_1P} = 0 \Rightarrow \vec{N}\cdot(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1}) = 0 \Rightarrow \vec{N}\cdot\overrightarrow{OP} = \vec{N}\cdot\overrightarrow{OP_1}$$

- Ecuación general del plano

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 \Longrightarrow ax + by + cz + (-ax_1 + by_1 + cz_1) = 0$$

Índice

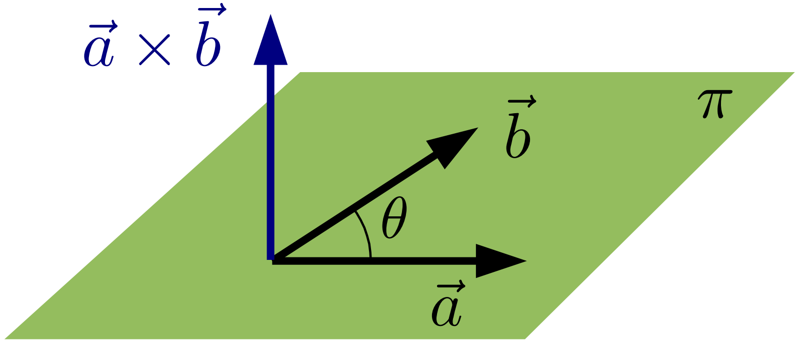
- Escalares y vectores
- Vectores libres
- Producto escalar
- Producto vectorial
- Producto mixto
- Doble producto vectorial

- Definición

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\vec{a}\times\vec{b}\perp \text{plano}\,\pi$$

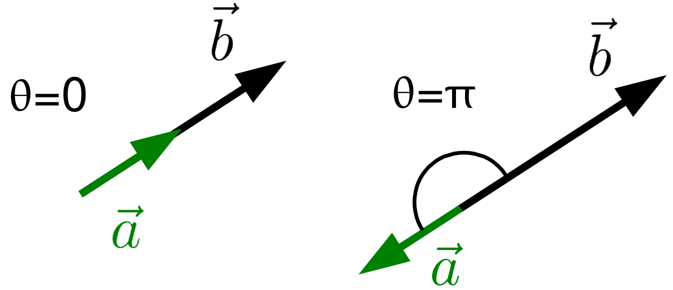
$$\text{sentido : regla de la mano derecha}\,(\vec{a}\rightarrow\vec{b})$$



- El resultado de la operación es un vector
- Escritura alternativa $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\wedge\vec{b}$
- Permite expresar de modo sencillo la condición de paralelismo
- Permite construir rápidamente vectores perpendiculares
- Extrae la componente perpendicular en una proyección ortogonal

- Condición de paralelismo

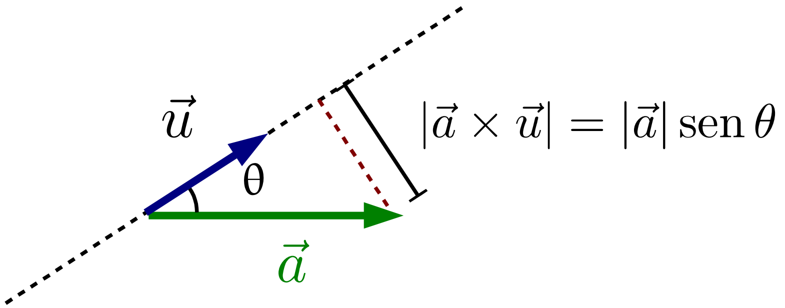
$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 0 \\ \\ \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}\end{array}\right| \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$$



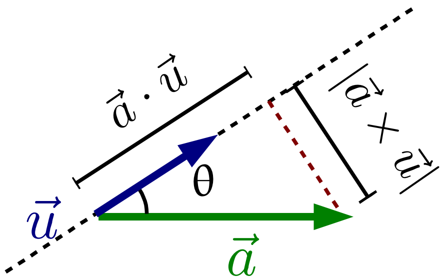
- Permite calcular la componente perpendicular de la proyección ortogonal del vector sobre una dirección

$$|\vec{u}| = 1$$

$$|\vec{a} \times \vec{u}| = |\vec{a}|\,|\vec{u}| \operatorname{sen}\theta = |\vec{a}| \operatorname{sen}\theta$$



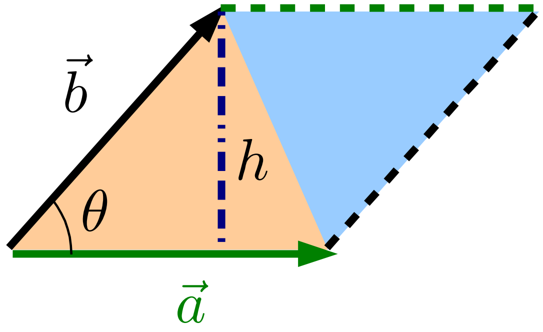
  - La otra componente la da el producto escalar



- Área del paralelogramo que forman dos vectores

$$\text{Área}_{\square} = |\vec{a}|\, h = |\vec{a}\times\vec{b}|$$

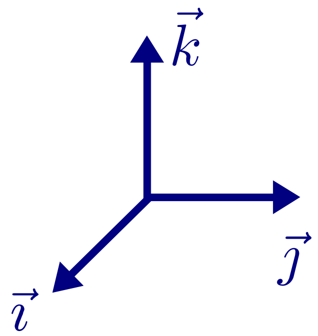
$$h = |\vec{b}|\,\mathrm{sen}\,\theta = |\vec{b}|\left(\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$



$$\text{Área}_{\triangle} = \frac{1}{2}\text{Área}_{\square} = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

- **No es asociativo** $$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$$
- Anticonmutativa $$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$$
- Asociativa resp. al prod. por un escalar $$(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\alpha\vec{b})=\alpha(\vec{a}\times\vec{b})$$
- Distributiva respecto a la suma $$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

- Productos vectoriales de los vectores de la base
  - Ejemplo: base cartesiana



$$\begin{array}{lll} \vec{\imath}\times\vec{\imath}=\vec{0}; & \vec{\imath}\times\vec{\jmath}=\vec{k}; & \vec{\imath}\times\vec{k}=-\vec{\jmath}; \\ \vec{\jmath}\times\vec{\imath}=-\vec{k}; & \vec{\jmath}\times\vec{\jmath}=\vec{0}; & \vec{\jmath}\times\vec{k}=\vec{\imath}; \\ \vec{k}\times\vec{\imath}=\vec{\jmath}; & \vec{k}\times\vec{\jmath}=-\vec{\imath}; & \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0} \end{array}$$

- Expresión del producto vectorial en una base ortonormal

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}=a_x\,\vec{\imath}+a_y\,\vec{\jmath}+a_z\,\vec{k} \\ \\ \vec{b}=b_x\,\vec{\imath}+b_y\,\vec{\jmath}+b_z\,\vec{k} \end{array}\right\}\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\left|\begin{array}{ccc} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{array}\right|$$

- Punto por el que pasa la recta

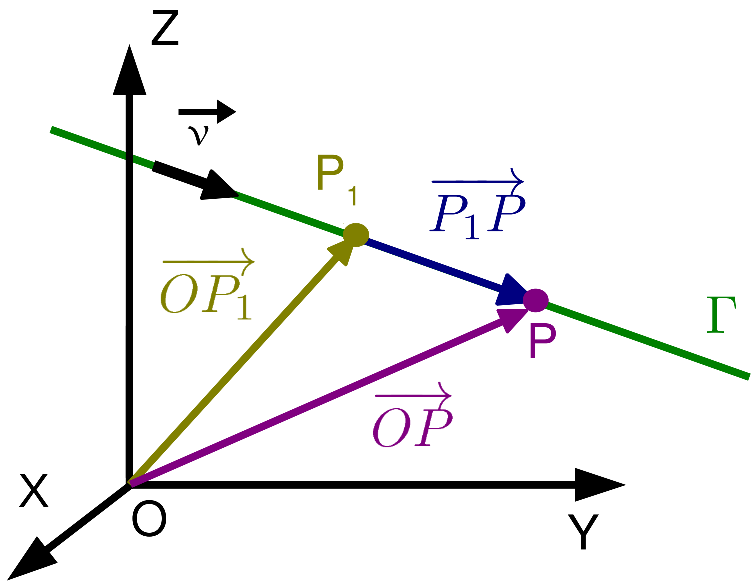
$$\overrightarrow{OP_1} = x_1\,\vec{\imath} + y_1\,\vec{\jmath} + z_1\,\vec{k}$$

- Vector director de la recta

$$\vec{\nu} = \alpha\,\vec{\imath} + \beta\,\vec{\jmath} + \gamma\,\vec{k}$$

- Punto genérico de la recta

$$\overrightarrow{OP} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$$



- Condición para que el vector $\overrightarrow{P_1P}$ sea paralelo al vector director

$$\vec{\nu} \times \overrightarrow{P_1P} = 0 \Rightarrow \vec{\nu} \times (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1}) = 0 \Rightarrow \vec{\nu} \times \overrightarrow{OP} = \vec{\nu} \times \overrightarrow{OP_1}$$

- Ecuaciones de la recta

$$\Gamma \equiv \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda\vec{\nu}$$

Vectorial

$$\Gamma \equiv \begin{cases} x = x_1 + \lambda\alpha \\ y = y_1 + \lambda\beta \\ z = z_1 + \lambda\gamma \end{cases}$$

Paramétricas

$$\Gamma \equiv \frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y - y_1}{\beta} = \frac{z - z_1}{\gamma}$$

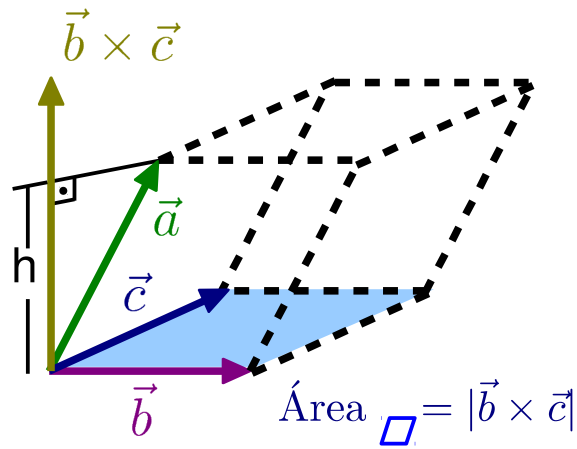
Continua

Índice

- Escalares y vectores
- Vectores libres
- Producto escalar
- Producto vectorial
- Producto mixto
- Doble producto vectorial

- Definición: involucra tres vectores $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$
  - El resultado de la operación es un escalar
  - El valor absoluto es el volumen del paralelepípedo

$$\left.\begin{array}{l}\text{Volumen} = \text{Área}\; h \\ h = \left|\vec{a}\cdot\dfrac{(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{b}\times\vec{c}|}\right|\end{array}\right| \Rightarrow \text{Volumen} = h\,|\vec{b}\times\vec{c}| = |\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$$



  - Condición de coplanariedad

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0 \\ \vec{a},\vec{b},\vec{c} \neq \vec{0}\end{array}\right| \Rightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c} \quad \text{son coplanarios}$$

Tres vectores forman una base si y solo si su producto mixto es no nulo

- Propiedades
  - Permutabilidad cíclica $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$
  - Permutabilidad acíclica $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = -\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$
- Expresión en una base cartesiana

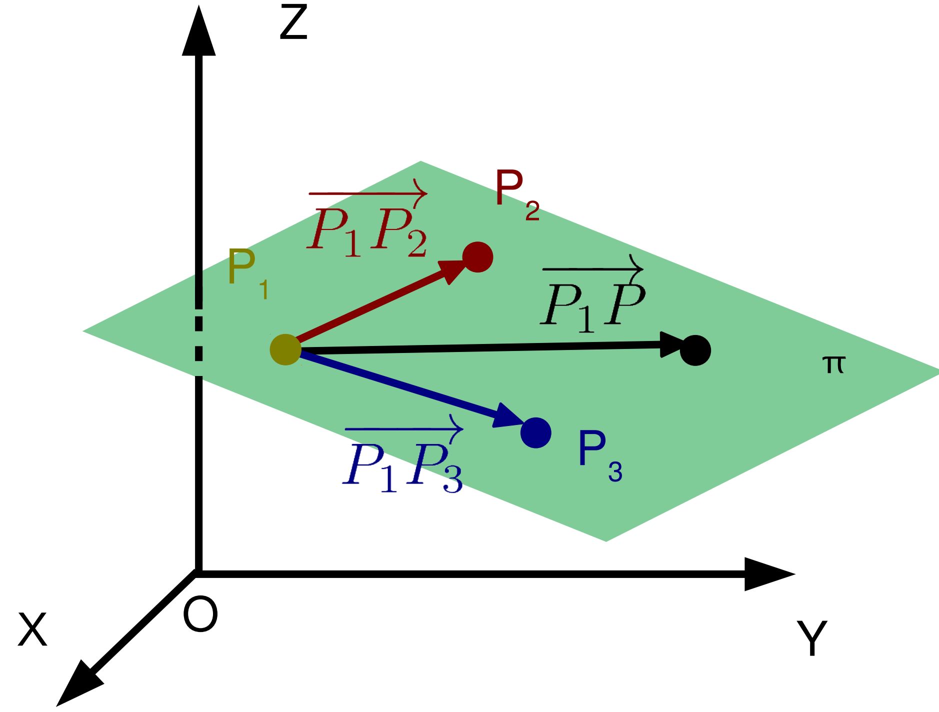
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

- Puntos por los que pasa el plano

$$P_1(x_1, y_1, z_1) \qquad P_2(x_2, y_2, z_2) \qquad P_3(x_3, y_3, z_3)$$

- Punto genérico del plano

$$P(x, y, z)$$



- Condición de coplanariedad

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) = 0$$

- Ecuación del plano

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Índice

- Escalares y vectores
- Vectores libres
- Producto escalar
- Producto vectorial
- Producto mixto
- Doble producto vectorial

- Definición: involucra tres vectores

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ (\vec{a}\cdot\vec{b}) & (\vec{a}\cdot\vec{c}) \end{vmatrix} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$$

  - El resultado de la operación es un vector

- Aplicación al desarrollo del producto escalar de dos productos vectoriales

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{c}\times\vec{d})\cdot(\vec{a}\times b) = \vec{c}\cdot[\vec{d}\times(\vec{a}\times b)] = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

- Resolución de un sistema de ecuaciones vectoriales

$$\begin{cases} \vec{x}\times\vec{a} = \vec{b} \\ \vec{x}\cdot\vec{a} = \alpha \end{cases}$$

$$\vec{a}\times(\vec{x}\times\vec{a}) = \vec{a}\times\vec{b} \Rightarrow |\vec{a}|^2\vec{x} - (\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a} = \vec{a}\times\vec{b}$$

$$\vec{x} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}|^2} + \frac{\alpha\vec{a}}{|\vec{a}|^2}$$