Tema 5: Tensor de Inercia

Mecánica Racional, 2º, Grado en Ingeniería Civil

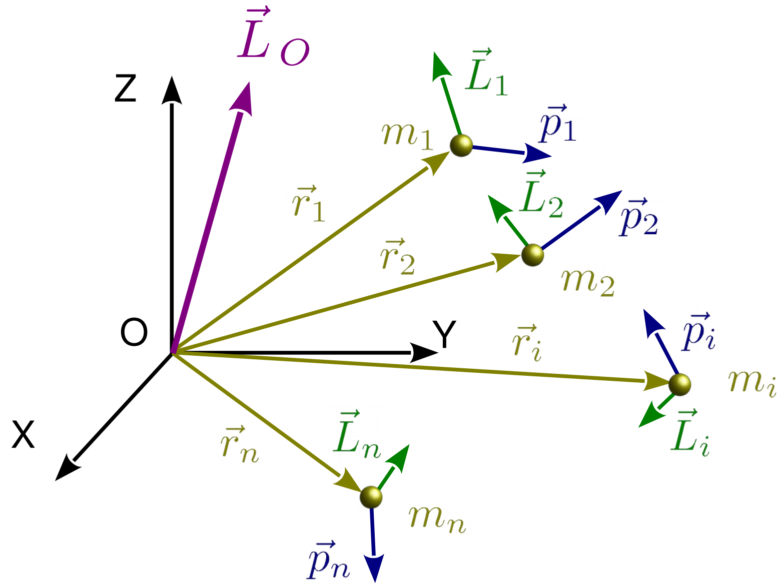
Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingenieros

Universidad de Sevilla

- El momento angular (o cinético) del sistema respecto a un punto es la suma de los momentos angulares de cada una de las partículas que lo componen respecto al mismo punto

$$\vec{L}_O^{sis} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times (m_i \, \vec{v}_i)$$



- Para un sistema continuo

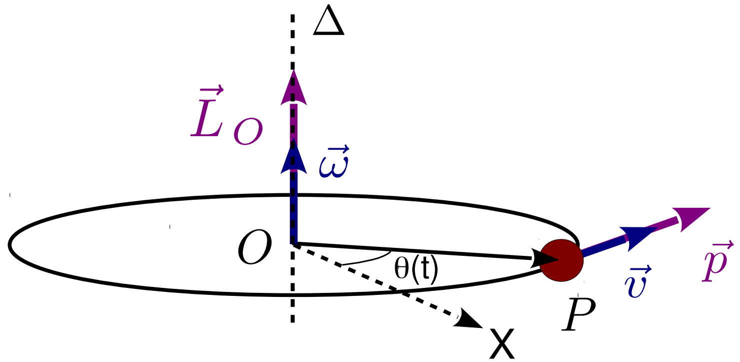
$$\vec{L}_O^{sis} = \int \mathrm{d}\vec{L}_O = \int \vec{r} \times \, \mathrm{d}\vec{p} = \int \vec{r} \times \vec{v} \, \mathrm{d}m$$

- Movimiento circular de una partícula

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = R\,\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = R\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = R\,\omega\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_T = R\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta = R\,\alpha\,\vec{u}_\theta$$



$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{k} \qquad \vec{\alpha} = \ddot{\theta}\,\vec{k}$$

- Momento angular de la partícula

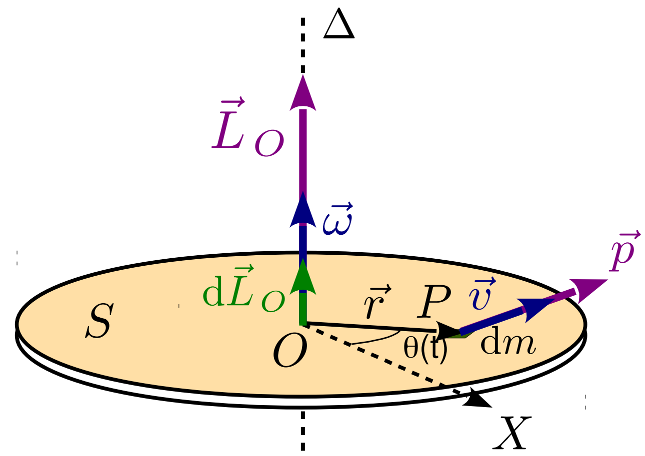
$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP} \times (m\vec{v}) = mR^2\,\dot{\theta}\,\vec{k} = mR^2\,\omega\,\vec{k}$$

- Momento de inercia de la partícula respecto a un eje

$$\vec{L}_O = I\,\vec{\omega} \qquad I = mR^2$$

El momento angular describe el movimiento de rotación alrededor de Δ

- Rotación de un disco



$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = r\,\vec{u}_r$$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP} = r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

- Momento angular del disco

$$\vec{L}_O = \int_S \mathrm{d}\vec{L}_O = \int_S \mathrm{d}m\,\overrightarrow{OP} \times \vec{v} = \int_S \mathrm{d}m\,r^2\,\dot{\theta}\,\vec{k} = \left(\int_S \mathrm{d}m\,r^2\right)\vec{\omega}$$

- Momento de inercia del disco respecto al eje Δ

$$\vec{L}_O = I_O\,\vec{\omega} \qquad\qquad I_O = \int_S \mathrm{d}m\,r^2$$

¿Son siempre paralelos?

Rotación de un sólido alrededor de un eje fijo: eje no de simetría

- Vector rotación $\vec{\omega} = \omega(t)\,\vec{k}$

- Momento angular respecto a O

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = d\cos\alpha\,\omega$$

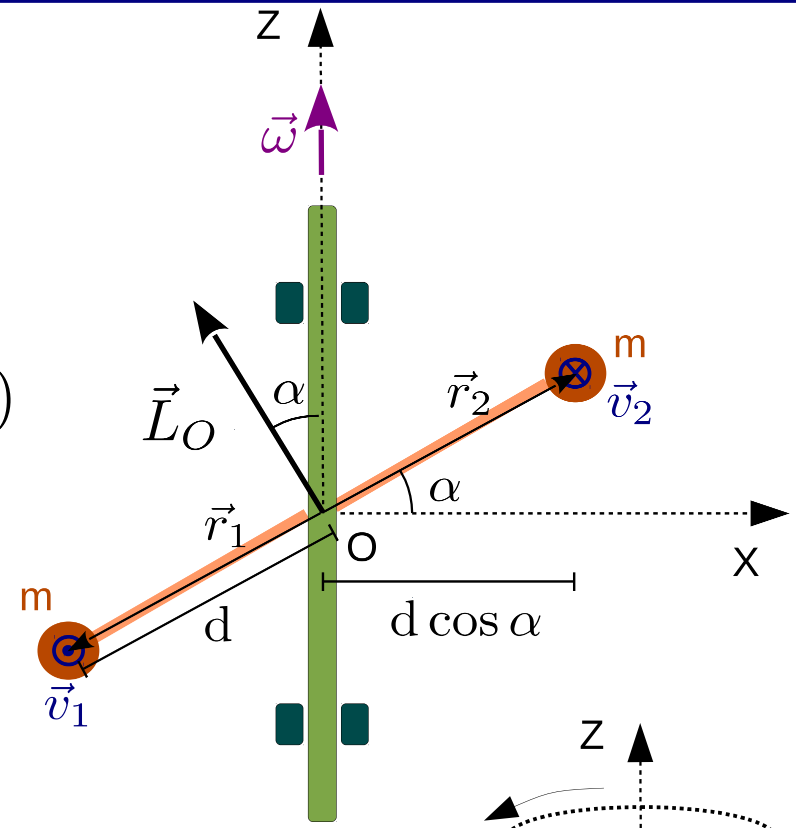
$$\vec{L}_O = 2m\omega d^2\cos\alpha(-\operatorname{sen}\alpha\,\vec{\imath} + \cos\alpha\,\vec{k})$$

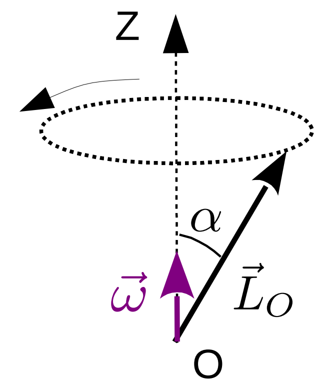
- **L**$_O$ y **ω** NO son paralelos

- Se puede construir una relación lineal

$$\vec{L}_O = \overset{\leftrightarrow}{I}_O \cdot \vec{\omega}$$

- $\overset{\leftrightarrow}{I}_O$ es el **Tensor de Inercia**, o Matriz de Inercia
  - Su papel es similar al de la masa en el movimiento lineal





Índice

- Momentos de inercia respecto a los planos cartesianos

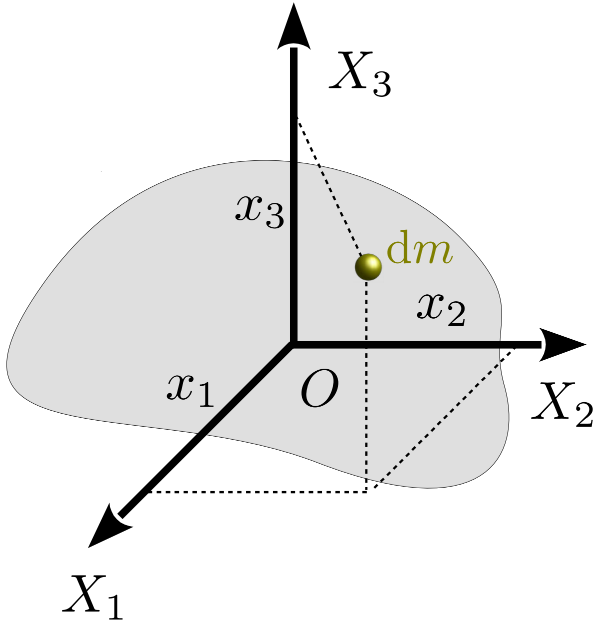
$$I_1 = \int \mathrm{d}m\, x_1^2 \qquad I_2 = \int \mathrm{d}m\, x_2^2 \qquad I_3 = \int \mathrm{d}m\, x_3^2$$

- Momentos de inercia respecto a los ejes cartesianos

$$I_{11} = \int \mathrm{d}m\, (x_2^2 + x_3^2)$$

$$I_{22} = \int \mathrm{d}m\, (x_1^2 + x_3^2)$$

$$I_{33} = \int \mathrm{d}m\, (x_1^2 + x_2^2)$$



- Momento de inercia respecto del origen

$$I_O = \int \mathrm{d}m\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \int \mathrm{d}m\, r^2$$

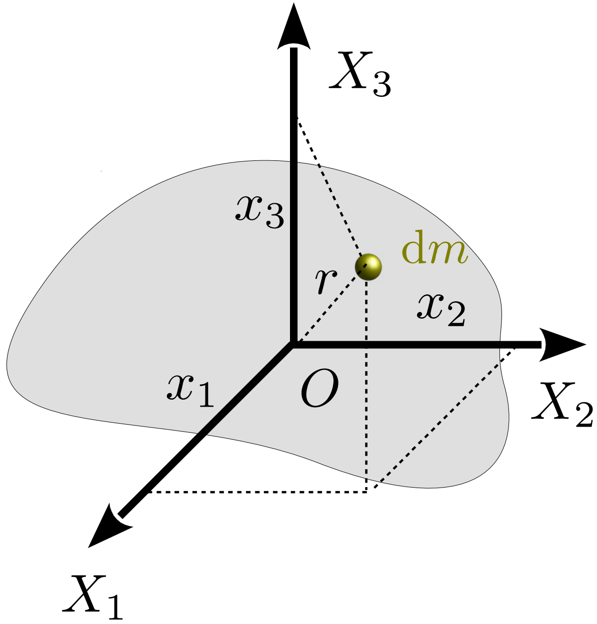
- Relaciones entre los momentos de inercia

$$I_{11} = I_2 + I_3$$

$$I_{22} = I_1 + I_3$$

$$I_{33} = I_1 + I_2$$

$$I_O = (I_{11} + I_{22} + I_{33})/2$$



- También se usa la notación con OXYZ

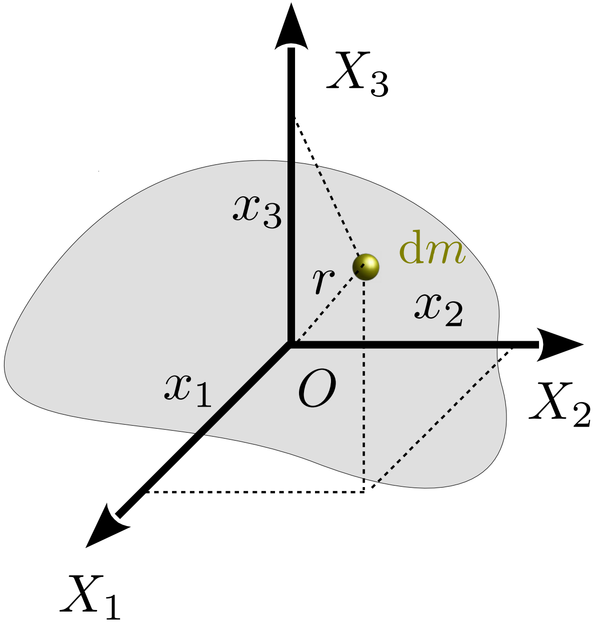
$1 \to x \qquad 2 \to y \qquad 3 \to z$

- Productos de inercia

$$P_{12} = \int \mathrm{d}m \, x_1 \, x_2$$

$$P_{13} = \int \mathrm{d}m \, x_1 \, x_3$$

$$P_{23} = \int \mathrm{d}m \, x_2 \, x_3$$



  - Pueden ser negativos
  - Los momentos son siempre positivos

Índice

$$\overset{\leftrightarrow}{I}_O \equiv \begin{bmatrix} I_{11} & -P_{12} & -P_{13} \\ -P_{21} & I_{22} & -P_{23} \\ -P_{31} & -P_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$$

- Es simétrico $P_{ij} = P_{ji}$
- Es diferente para cada punto del sólido (campo tensorial)
- Es independiente de la base que se use
  - Aunque los coeficientes dependen de la base que se use
- Expresión en forma de índices

$$I_{ij} = \int \mathrm{d}m \left(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j\right) \qquad i, j = 1, 2, 3$$

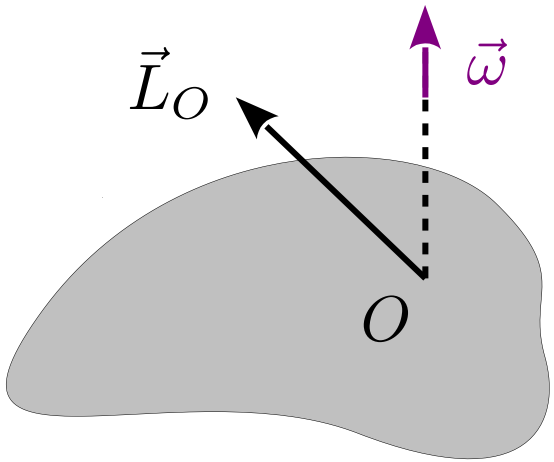
- Dado un sólido con un punto fijo ***O*** y vector rotación $\boldsymbol{\omega}$

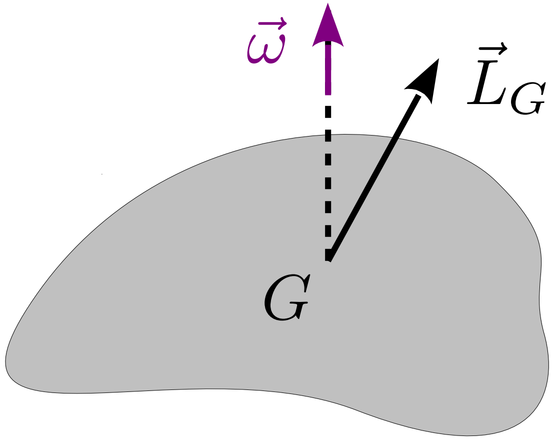
$$\vec{L}_O = \overleftrightarrow{I}_O \cdot \vec{\omega}$$

- También es cierto respecto al CM, aunque no sea fijo

$$\vec{L}_G = \overleftrightarrow{I}_G \cdot \vec{\omega}$$

- En general el momento angular y el vector rotación no son paralelos





Índice

Cálculo con diadas

- Vector y su traspuesto

$$\vec{a} = [a_1, a_2, a_3] \qquad \vec{a}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

  - Las dos formas son equivalentes (en coordenadas cartesianas)
  - Si es necesario, se indica la base con un subíndice $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]_1$

- Producto escalar de dos vectores

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}^T = [a_1, a_2, a_3] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

- Producto diádico de dos vectores

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a}^T\vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} [b_1, b_2, b_3] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$$

  - No hay puntos entre los vectores
  - Es un tensor
  - No es conmutativo

- Producto escalar de un producto diádico por un vector

$$(\vec{a}\vec{b}) \cdot \vec{c}^T = (\vec{a}\vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\,(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

$$\vec{c} \cdot (\vec{a}\vec{b}) = (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b}$$

- Tensor unidad

$$\overset{\leftrightarrow}{U} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\leftrightarrow}{U} \cdot \vec{a}^T = \overset{\leftrightarrow}{U} \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot \overset{\leftrightarrow}{U} = \vec{a}$$

- Integral de una matriz

$$\left(\int \mathrm{d}m \, \overset{\leftrightarrow}{A} \right)_{ij} = \int \mathrm{d}m \, \left(\overset{\leftrightarrow}{A}_{ij} \right)$$

- Tensor de inercia con diadas $\vec{r} = [x_1, x_2, x_3]$

$$\overset{\leftrightarrow}{I}_O = \overset{\leftrightarrow}{U} \int \mathrm{d}m \, r^2 - \int \mathrm{d}m \, \vec{r}\vec{r}$$

Índice

- Para momentos de inercia

$$I_{ii}(A) = I_{ii}(G) + M\, d_{ii}^2$$

- Para productos de inercia

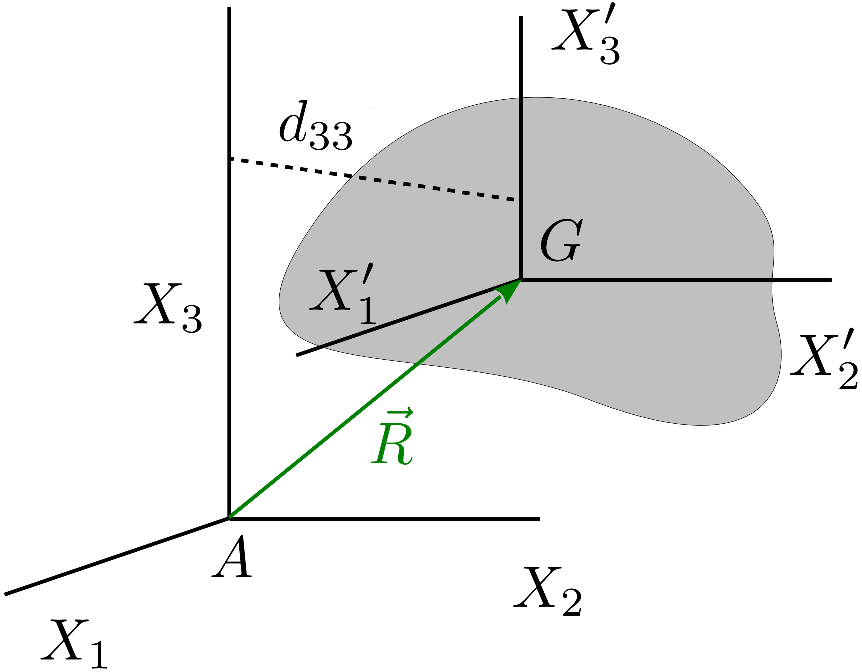
$$P_{ij}(A) = P_{ij}(G) + M R_i R_j$$

- Generalizado (para el tensor de inercia)

$$I_{ij}(A) = I_{ij}(G) + M[R^2\delta_{ij} - R_i R_j]$$

$$\overset{\leftrightarrow}{I}_A = \overset{\leftrightarrow}{I}_G + M[R^2\overset{\leftrightarrow}{U} - \vec{R}\vec{R}]$$

  - El sentido de **R** no afecta al resultado

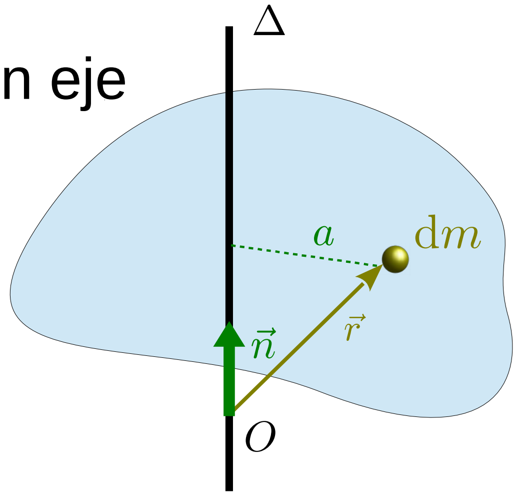


$$\vec{R} = \overrightarrow{AG} = [R_1, R_2, R_3]_{\{X_1X_2X_3\}}$$

Índice

- Momento de inercia respecto a un eje

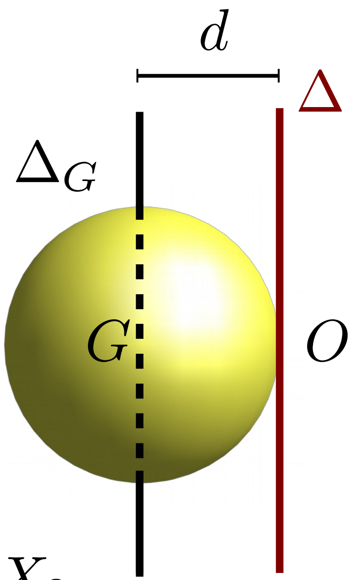
$$I_\Delta(O) = \int \mathrm{d}m\, a^2(\vec{r})$$



- Teorema de los ejes paralelos

$$I_\Delta(O) = I_\Delta(G) + M\, d^2$$

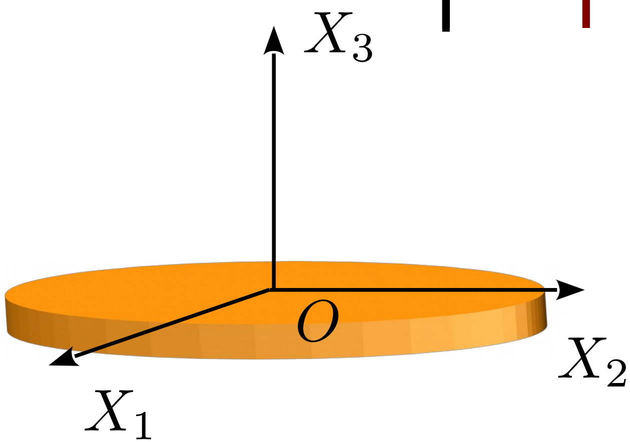
  - $I_\Delta(O)$ es un eje paralelo a $I_\Delta(G)$ y *d* es la distancia entre ellos



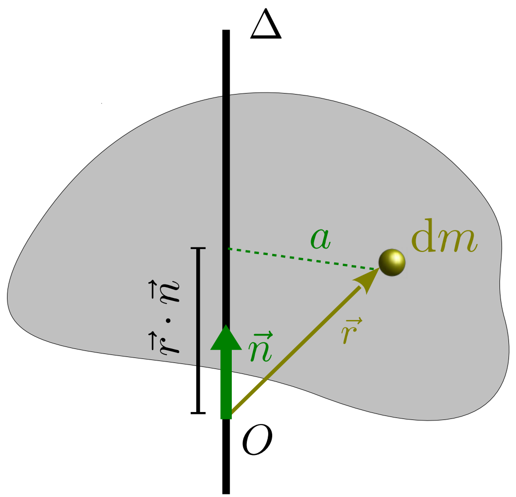
- Teorema de los ejes perpendiculares

$$I_{33}(O) = I_{11}(O) + I_{22}(O)$$

  - Sólo para figuras planas



- Momento respecto a un eje cualquiera en función del tensor de inercia



$$I_{\vec{n}}(O) = \vec{n}\cdot\overset{\leftrightarrow}{I}_O\cdot\vec{n}^T = \vec{n}\cdot\overset{\leftrightarrow}{I}_O\cdot\vec{n}$$

- Demostración

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\overset{\leftrightarrow}{I}_O\cdot\vec{n} &= \vec{n}\cdot\overset{\leftrightarrow}{U}\cdot\vec{n}\int \mathrm{d}m\, r^2 - \int \mathrm{d}m\,\vec{n}\cdot\vec{r}\vec{r}\cdot\vec{n}\\ &= \int \mathrm{d}m\left(r^2 - (\vec{r}\cdot\vec{n})^2\right)\\ &= \int \mathrm{d}m\, a^2\end{aligned}$$

$$\vec{n}\cdot\overset{\leftrightarrow}{U}\cdot\vec{n} = \vec{n}\cdot(\overset{\leftrightarrow}{U}\cdot\vec{n}) = \vec{n}\cdot\vec{n} = 1$$

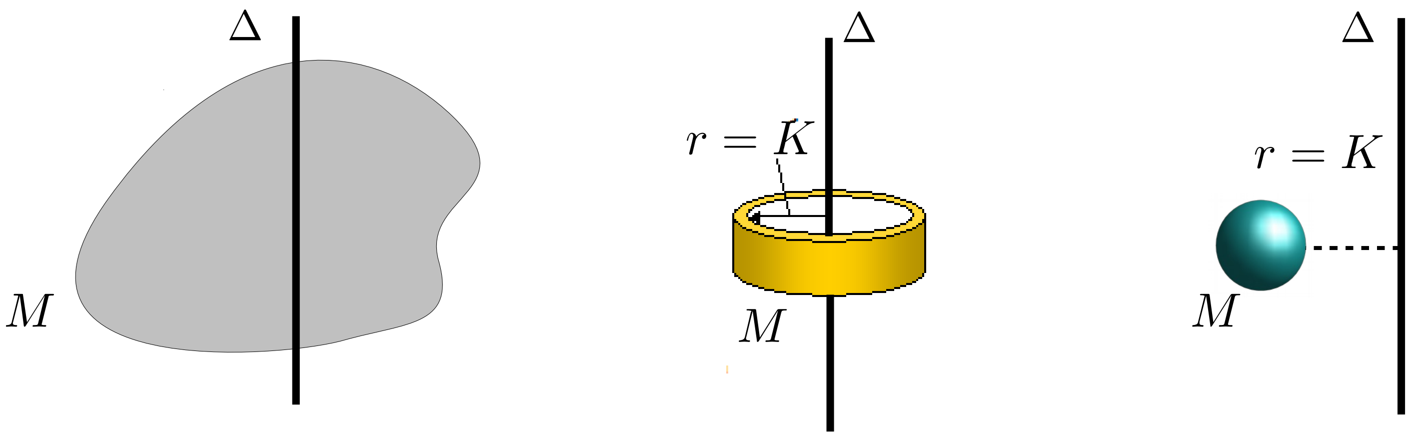
$$\vec{n}\cdot(\vec{r}\vec{r})\cdot\vec{n} = (\vec{n}\cdot\vec{r})(\vec{r}\cdot\vec{n}) = (\vec{r}\cdot\vec{n})^2$$

Momento de inercia respecto a un eje

- Radio de giro de un sólido respecto a un eje Δ

$$K = \sqrt{\frac{I_\Delta}{M}}$$

  - Una masa puntual M situada a una distancia K del eje, o una cáscara cilíndrica de masa M y radio K, tienen el mismo momento de inercia respecto al eje que el sólido



  - Se usa para dar el momento de inercia respecto a un eje de sólidos con forma complicada

$$K \Longrightarrow I_\Delta = MK^2$$

Índice

- Los coeficientes de la matriz de inercia dependen de la base que se use
- La matriz de inercia es simétrica con coeficientes reales
  - Es diagonalizable y los autovalores son reales
- Siempre se puede encontrar un sistema de ejes perpendiculares en el cual la matriz de inercia es diagonal

$$\overset{\leftrightarrow}{I}_O \equiv \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}_{\vec{u}_i} \equiv \begin{bmatrix} I_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & I_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & I_{33}^* \end{bmatrix}_{\vec{u}_i^*}$$

  - I^*_{ii} son los autovalores de la matriz: **momentos principales de inercia**
  - $\mathbf{u}^*_i$ son los autovectores de la matriz: **direcciones principales de inercia**

- Los autovectores son los ejes principales de inercia (o direcciones de inercia)
  - Si el cuerpo gira en torno a un eje principal de inercia, el momento angular y el vector rotación son paralelos

$$\overleftrightarrow{I}_O \cdot (\omega \vec{u}_1^*) = \begin{bmatrix} I_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & I_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & I_{33}^* \end{bmatrix}_{\vec{u}_i^*} \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\vec{u}_i^*} = I_{11}^* \left(\omega \vec{u}_1^*\right)$$

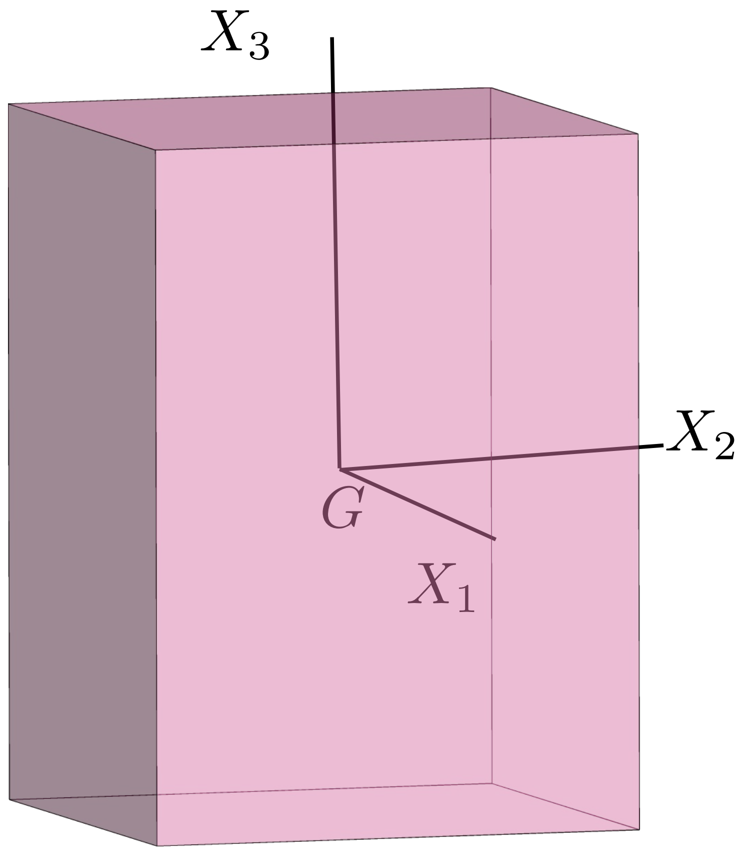
$$\overleftrightarrow{I}_O \cdot (\omega \vec{u}_2^*) = \begin{bmatrix} I_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & I_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & I_{33}^* \end{bmatrix}_{\vec{u}_i^*} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix}_{\vec{u}_i^*} = I_{22}^* \left(\omega \vec{u}_2^*\right)$$

$$\overleftrightarrow{I}_O \cdot (\omega \vec{u}_3^*) = \begin{bmatrix} I_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & I_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & I_{33}^* \end{bmatrix}_{\vec{u}_i^*} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}_{\vec{u}_i^*} = I_{33}^* \left(\omega \vec{u}_3^*\right)$$

- Si $\mathbf{u}_k$ es dirección principal de inercia en A entonces $P_{ik}(A) = 0 \quad \forall i$
- Todo eje baricentral que es E.P.I. en un punto lo es en todos
- Todo eje que es E.P.I. en dos o mas puntos es baricentral
  - Un eje baricentral es E.P.I. en un todos sus puntos o en ninguno
  - Un eje no baricentral es E.P.I. en ningún punto o sólo en uno
- Todo eje perpendicular a un plano de simetría es E.P.I. en el punto de corte
- Todo eje de simetría es E.P.I. en todos sus puntos
- Sólo para sólidos planos
  - Todo eje perpendicular al plano del sólido es E.P.I. en el punto de corte
  - Si *A* es un punto del sólido y AX_3 la dirección perpendicular se tiene

$$\overset{\leftrightarrow}{I}_A = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \qquad I_{33} = I_{11} + I_{22}$$

- Paralelepípedo con tres caras diferentes

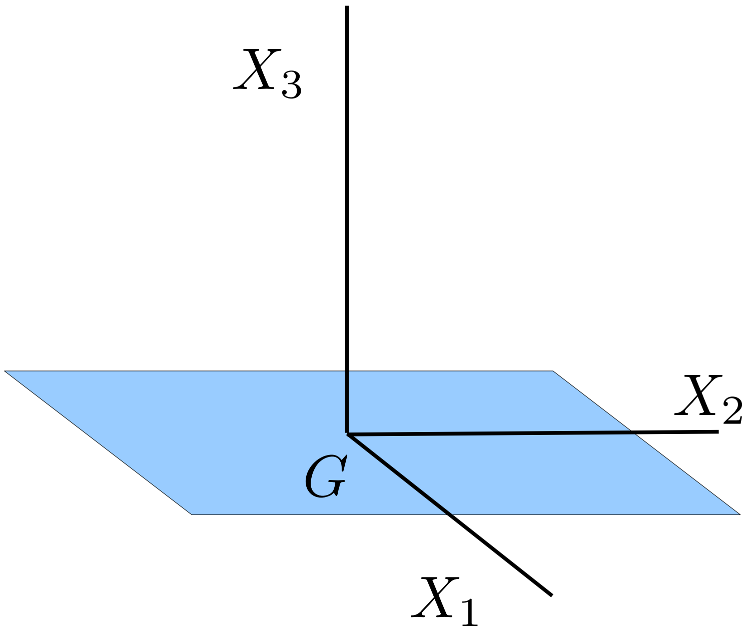


$$\overset{\leftrightarrow}{I}_G = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

- Para un cubo $I_{11} = I_{22} = I_{33}$

$$\overset{\leftrightarrow}{I}_G = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{11} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} \end{bmatrix}$$

- Placa rectangular

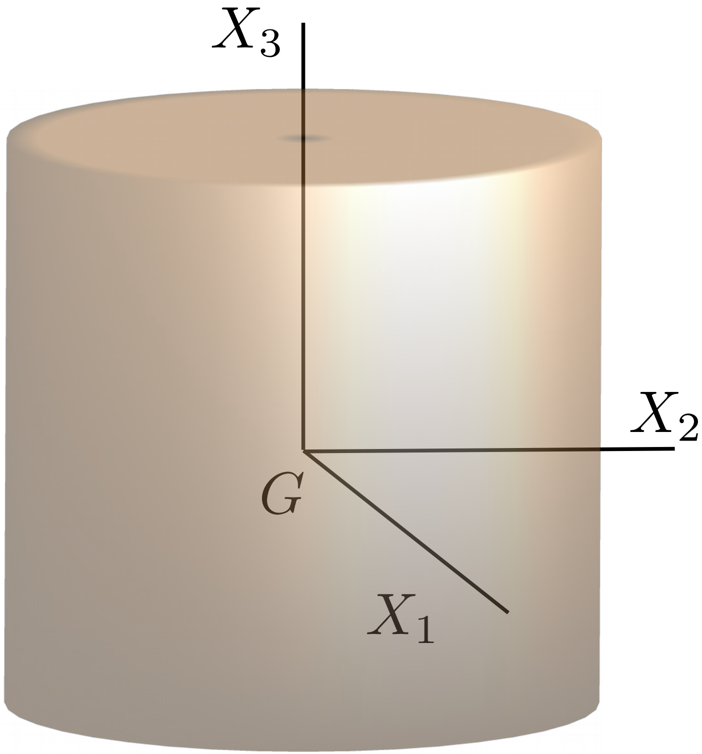


$$\overset{\leftrightarrow}{I}_G = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11}+I_{22} \end{bmatrix}$$

- Para una placa cuadrada

$$\overset{\leftrightarrow}{I}_G = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 2I_{11} \end{bmatrix}$$

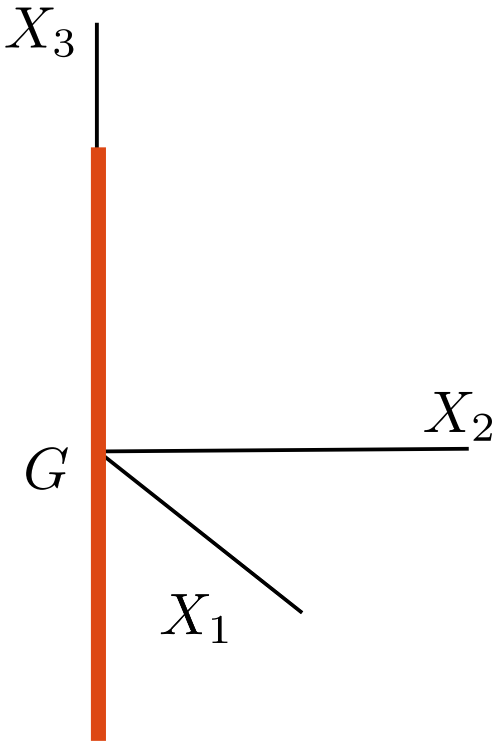
- Cilindro



$$\overleftrightarrow{I}_G = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{11} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

- Hay un autovalor doble
- Todas las direcciones perpendiculares a X_3 son E.P.I.

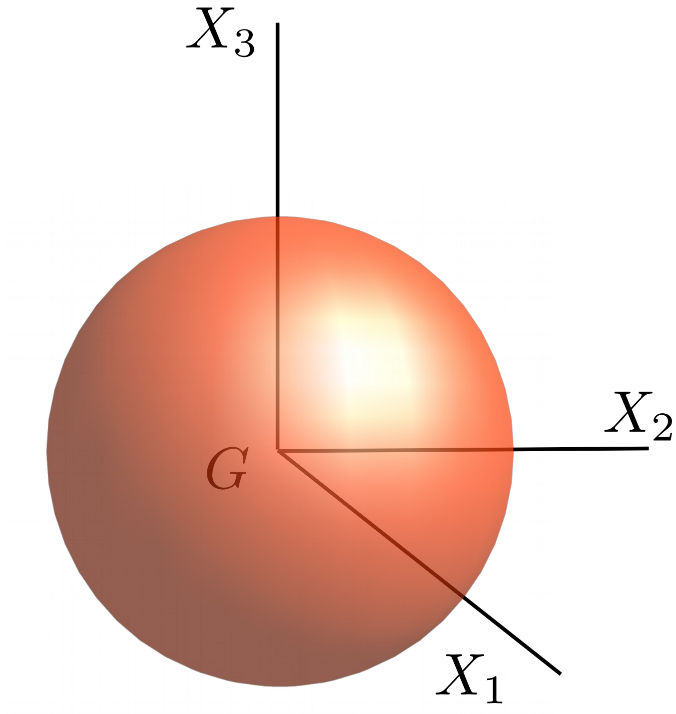
- Varilla de grosor despreciable



$$\overleftrightarrow{I}_G = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Es un caso degenerado: $I_{33}=0$
- Todas las direcciones perpendiculares a X_3 son E.P.I.
- Sólo tiene 5 grados de libertad

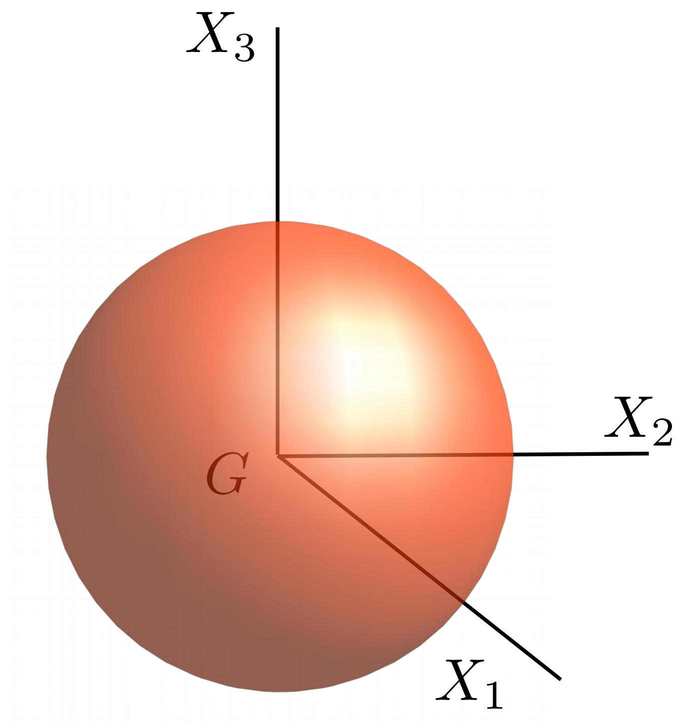
- Esfera



$$\overset{\leftrightarrow}{I}_G = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{11} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} \end{bmatrix}$$

- Los tres momentos principales son iguales
- Todas las direcciones son E.P.I. en G

- Utilizamos simetrías



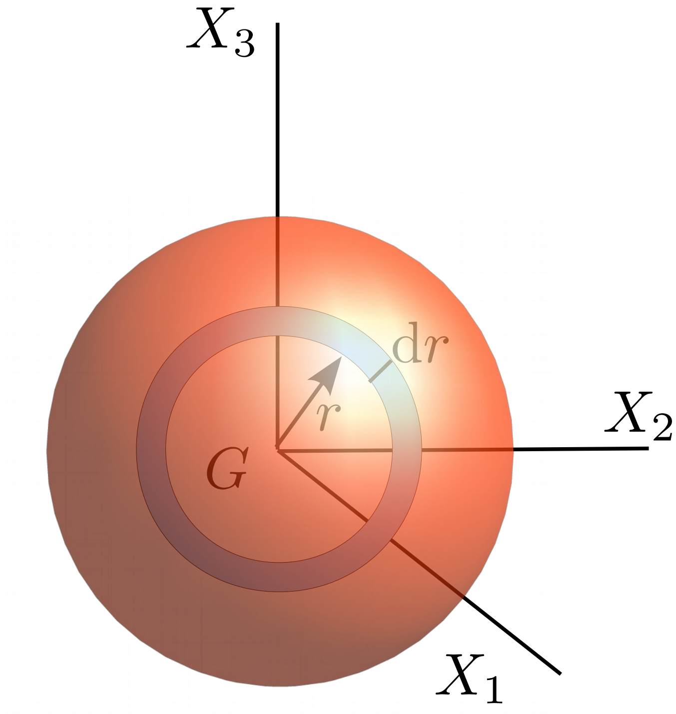
$$I_G = (I_{11} + I_{22} + I_{33})/2$$
$$I_{11} = I_{22} = I_{33}$$
$$\Longrightarrow I_{11} = 2I_G/3$$

$$I_G = \int_M \mathrm{d}m R^2 = R^2 \int \mathrm{d}m = MR^2$$

$$I_{11} = \frac{2}{3} MR^2$$

$$\overleftrightarrow{I}_G = \frac{2}{3} MR^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Utilizamos simetrías



$$\rho_M = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_G = (I_{11} + I_{22} + I_{33})/2 \\ I_{11} = I_{22} = I_{33} \end{array}\right| \Longrightarrow I_{11} = 2I_G/3$$

$$I_G = \int_M \mathrm{d}m r^2$$

$$\mathrm{d}m = \rho_M \mathrm{d}V = \rho_M 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

$$I_G = \int_0^R \mathrm{d}r \rho_M 4\pi r^4 = \frac{3}{5} M R^2$$

$$I_{11} = \frac{2}{5} M R^2$$

$$\overset{\leftrightarrow}{I}_G = \frac{2}{5} M R^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$