Tema 4: Movimiento en 2D y 3D

FISICA I, 1º Grado en Ingeniería Civil

Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

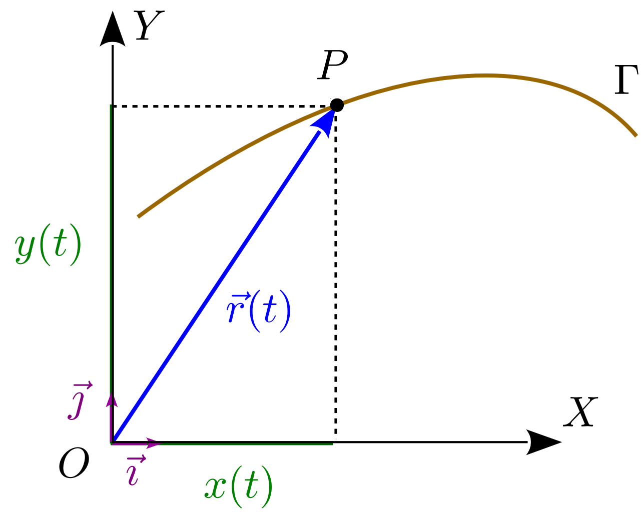
Universidad de Sevilla

Índice

- El vector de posición sigue el movimiento de la partícula P

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\,\vec{\jmath}$$

  - Las componentes x(t), y(t) son función del tiempo
  - El conjunto de puntos recorridos por el punto P es la trayectoria: es una curva



- Descripción matemática de una curva en 2D

$$\Gamma \equiv \vec{r}(t) = x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\,\vec{\jmath}$$

Vectorial

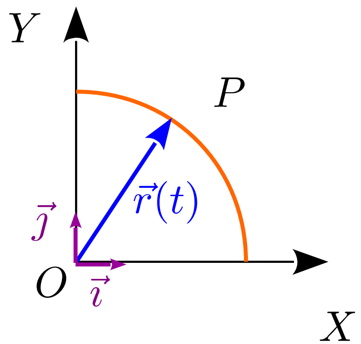
$$\Gamma \equiv \vec{r}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Paramétricas

$$\Gamma \equiv F(x,y) = 0$$

Implícita

  - Ejemplo



$$\Gamma \equiv \vec{r}(t) = R\cos(\omega\, t)\,\vec{\imath} + R\,\mathrm{sen}\,(\omega\, t)\,\vec{\jmath} \qquad t \in [0, \pi/2\omega]$$

$$\Gamma \equiv \vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = R\cos(\omega\, t) \\ y(t) = R\,\mathrm{sen}\,(\omega\, t) \end{cases} \qquad t \in [0, \pi/2\omega]$$

$$\Gamma \equiv F(x,y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0 \qquad \left| \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$

Índice

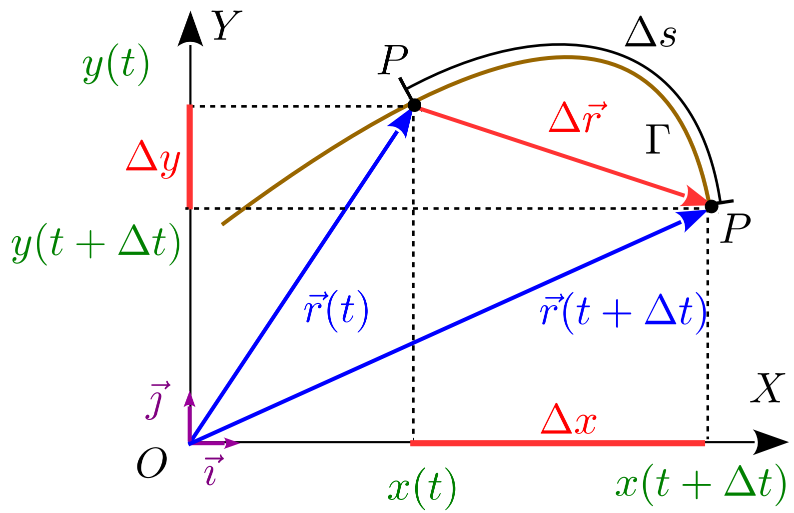
- Movimiento en 2D
  - Vector de posición
  - Vector velocidad
  - Vector aceleración
  - Componentes intrínsecas de la aceleración
- Movimiento en 3D
- Movimiento circular
- Geometría de curvas

Vector velocidad en 2D

- Vector desplazamiento

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta x\,\vec{\imath} + \Delta y\,\vec{\jmath}$$

  - Intervalo de muestreo grande
  - El módulo del desplazamiento no es la distancia recorrida



- Velocidad media

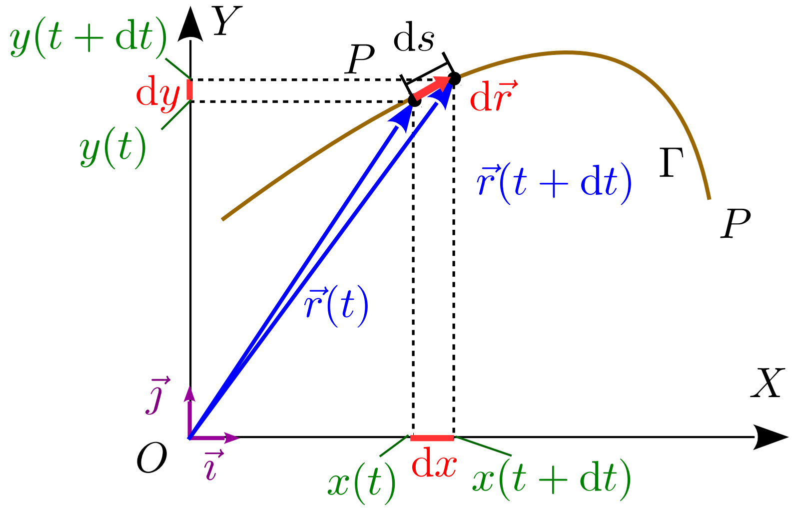
$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

  - Descripción imprecisa del movimiento

- Velocidad instantánea

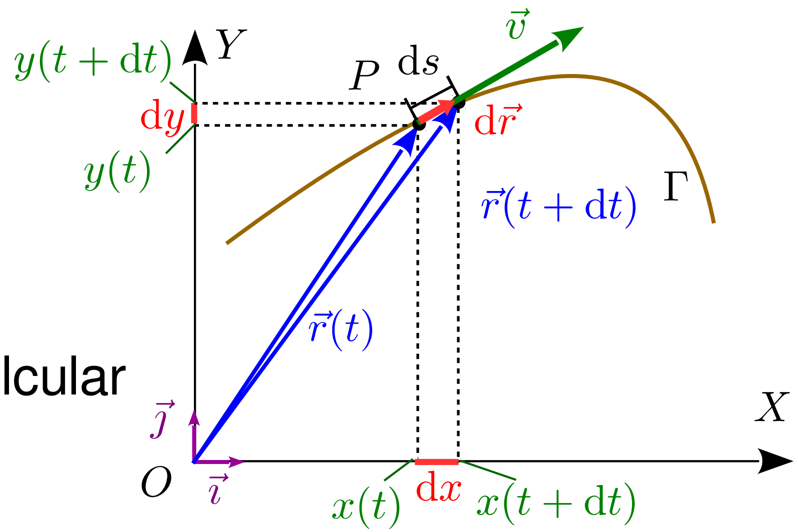
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}$$

  - Descripción precisa del movimiento
  - El módulo se mide en m/s



$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{r}(t+\mathrm{d}t) - \vec{r}(t) = \mathrm{d}x\,\vec{\imath} + \mathrm{d}y\,\vec{\jmath}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath}}$$



- En cada instante es tangente a la trayectoria
- Si conocemos **r**(t), derivamos respecto al tiempo para calcular la velocidad
  - En la base cartesiana los vectores de la base son constantes

$$\vec{r}(t) \rightarrow \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath}$$

- Si conocemos **v**(t) y **r**(t_0), podemos plantear 2 ecuaciones diferenciales para calcular **r**(t), una por componente

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lll} \mathrm{d}x = v_x(t)\,\mathrm{d}t & \rightarrow & x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t \\ & & \\ \mathrm{d}y = v_y(t)\,\mathrm{d}t & \rightarrow & y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_y(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

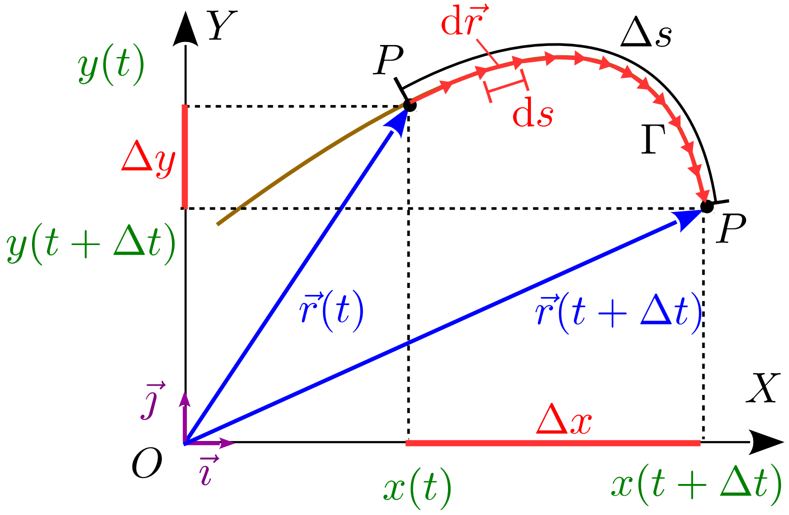
- La distancia recorrida en un instante dt y en un intervalo Δt son

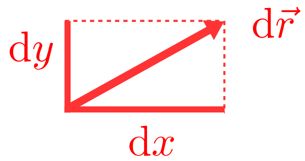
$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = |\mathrm{d}\vec{r}| = |\vec{v}(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\Delta s = \int_{t_0}^{t} |\mathrm{d}\vec{r}| = \int_{t_0}^{t} |\vec{v}(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\Delta x = \int_{t_0}^{t} |\mathrm{d}x| = \int_{t_0}^{t} |v_x|\,\mathrm{d}t$$

$$\Delta y = \int_{t_0}^{t} |\mathrm{d}y| = \int_{t_0}^{t} |v_y|\,\mathrm{d}t$$





$$\mathrm{d}s^2 = |\,\mathrm{d}\vec{r}|^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$$

$$\Delta s^2 \neq \Delta x^2 + \Delta y^2$$

- El módulo de la velocidad es la celeridad o rapidez

$$|\vec{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

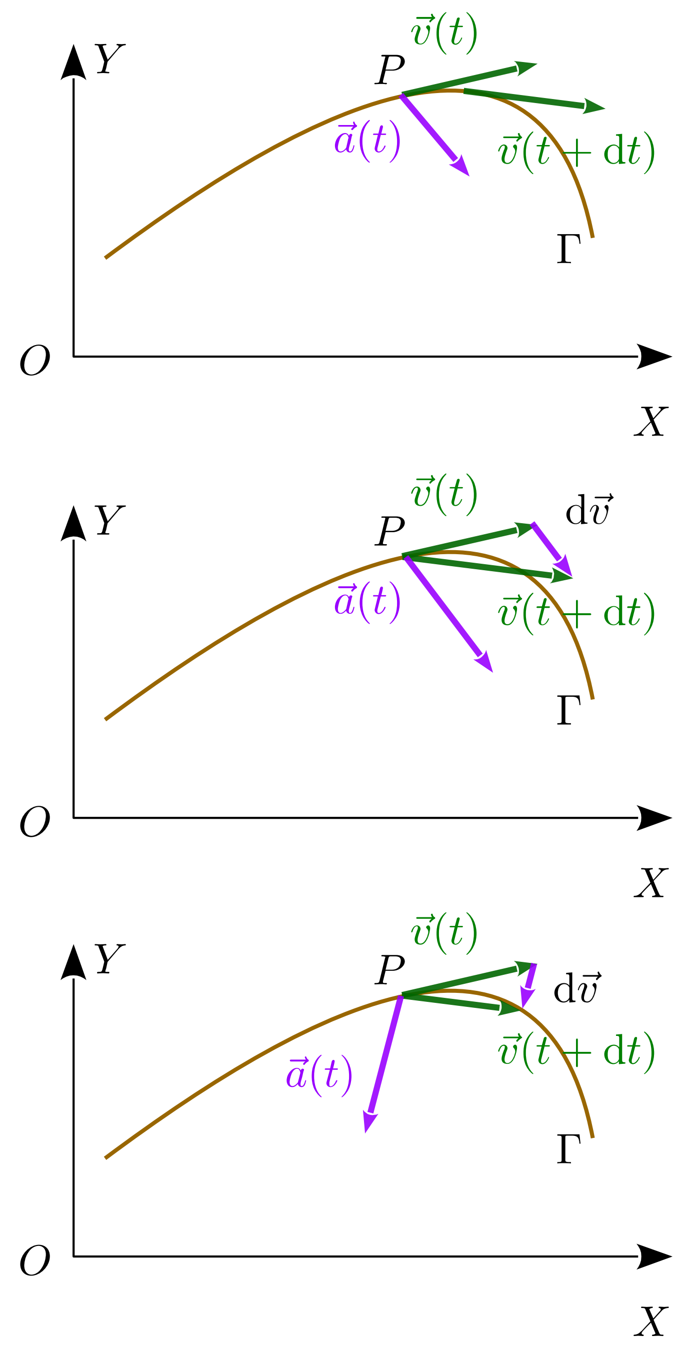
Índice

- Movimiento en 2D
  - Vector de posición
  - Vector velocidad
  - Vector aceleración
  - Componentes intrínsecas de la aceleración
- Movimiento en 3D
- Movimiento circular
- Geometría de curvas

- Un vector puede cambiar porque lo haga su módulo o su dirección
  - El cambio del módulo está relacionado con la celeridad
  - El cambio en la dirección está relacionado con como se curva la trayectoria
- La aceleración es la tasa de variación de la velocidad

$$\boxed{\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}_x\,\vec{\imath} + \dot{v}_y\,\vec{\jmath}}$$

  - Apunta siempre hacia la parte cóncava de la trayectoria
- El módulo se mide en m/s² (SI)



- Si conocemos **r**(t), derivamos respecto al tiempo para calcular la velocidad y la aceleración

$$\vec{r}(t) \to \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} \to \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

- Si conocemos **a**(t) y **v**(t_0), podemos plantear 2 ecuaciones diferenciales para **v**(t), una por componente

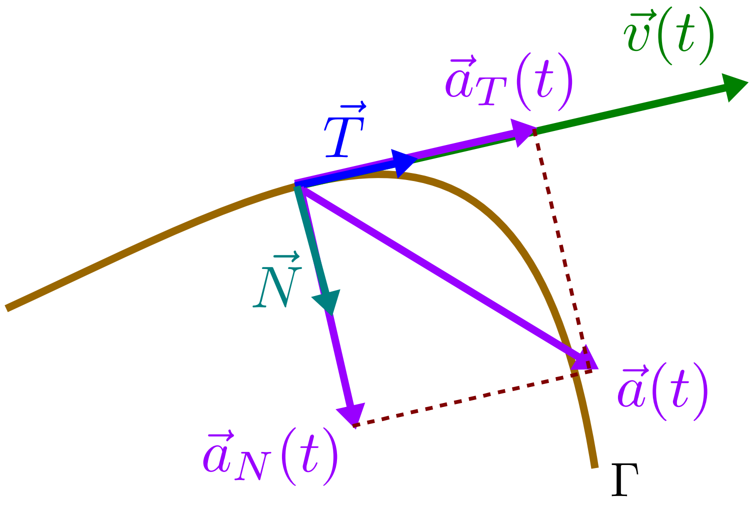
$$\mathrm{d}\vec{v} = \vec{a}(t)\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{d}v_x = a_x(t)\,\mathrm{d}t \quad \to \quad v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_x(t)\;\mathrm{d}t \\ \\ \mathrm{d}v_y = a_y(t)\,\mathrm{d}t \quad \to \quad v_y(t) = v_y(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_y(t)\;\mathrm{d}t \end{cases}$$

- A partir de **v**(t) y conociendo **r**(t_0), podemos plantear 2 ecuaciones diferenciales para calcular **r**(t), una por componente

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{d}x = v_x(t)\,\mathrm{d}t \quad \to \quad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(t)\;\mathrm{d}t \\ \\ \mathrm{d}y = v_y(t)\,\mathrm{d}t \quad \to \quad y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_y(t)\;\mathrm{d}t \end{cases}$$

Índice

- Movimiento en 2D
  - Vector de posición
  - Vector velocidad
  - Vector aceleración
  - Componentes intrínsecas de la aceleración
- Movimiento en 3D
- Movimiento circular
- Geometría de curvas



- La aceleración tangencial es la proyección de la aceleración sobre la dirección de la velocidad

$$a_T = \vec{a}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

- La aceleración normal es la parte perpendicular de la proyección

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \left|\vec{a}\times\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right| = \frac{|\vec{a}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_T(t) + \vec{a}_N(t)$$

- Vectores tangente y normal
  - El vector tangente es el vector unitario con la dirección de la velocidad

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \qquad a_T = \vec{a}\cdot\vec{T} \qquad \vec{a}_T = a_T\,\vec{T}$$

  - El vector normal es el perpendicular a **T** y contenido en el plano de **v** y **a**

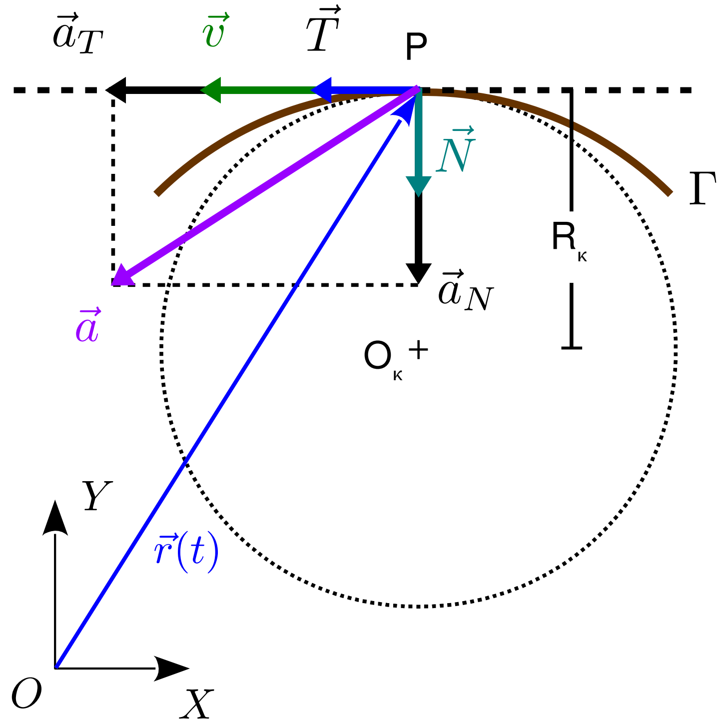
$$\vec{N} = \frac{1}{a_N}\left(\vec{a} - \vec{a}_T\right) \qquad a_N = \vec{a}\cdot\vec{N} = |\vec{a}\times\vec{T}| \qquad \vec{a}_N = a_N\,\vec{N}$$

- La aceleración tangencial da la tasa de cambio del módulo de la velocidad

$$a_T = \vec{a}\cdot\vec{T} = \vec{a}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{|\vec{v}|}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}\right) = \frac{1}{|\vec{v}|}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{|\vec{v}|^2}{2}\right) = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}|}\frac{\mathrm{d}|\vec{v}|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}|\vec{v}|}{\mathrm{d}t}$$

- La aceleración normal indica como cambia la dirección de la velocidad, es decir, está relacionado con la curvatura de la trayectoria

  - Radio de curvatura $$R_\kappa = \frac{v^2}{a_N}$$
  - Curvatura $$\kappa = \frac{1}{R_\kappa} = \frac{a_N}{v^2}$$
  - Centro de curvatura $$\vec{r}_{O_\kappa} = \vec{r} + R_\kappa\vec{N}$$



Índice

- Vector de posición

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\,\vec{\jmath} + z(t)\,\vec{k}$$

- Vector velocidad

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\vec{\imath} + v_y(t)\,\vec{\jmath} + v_z(t)\,\vec{k}$$

$$= \dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k}$$

- Vector aceleración

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\,\vec{\imath} + a_y(t)\,\vec{\jmath} + a_z(t)\,\vec{k}$$

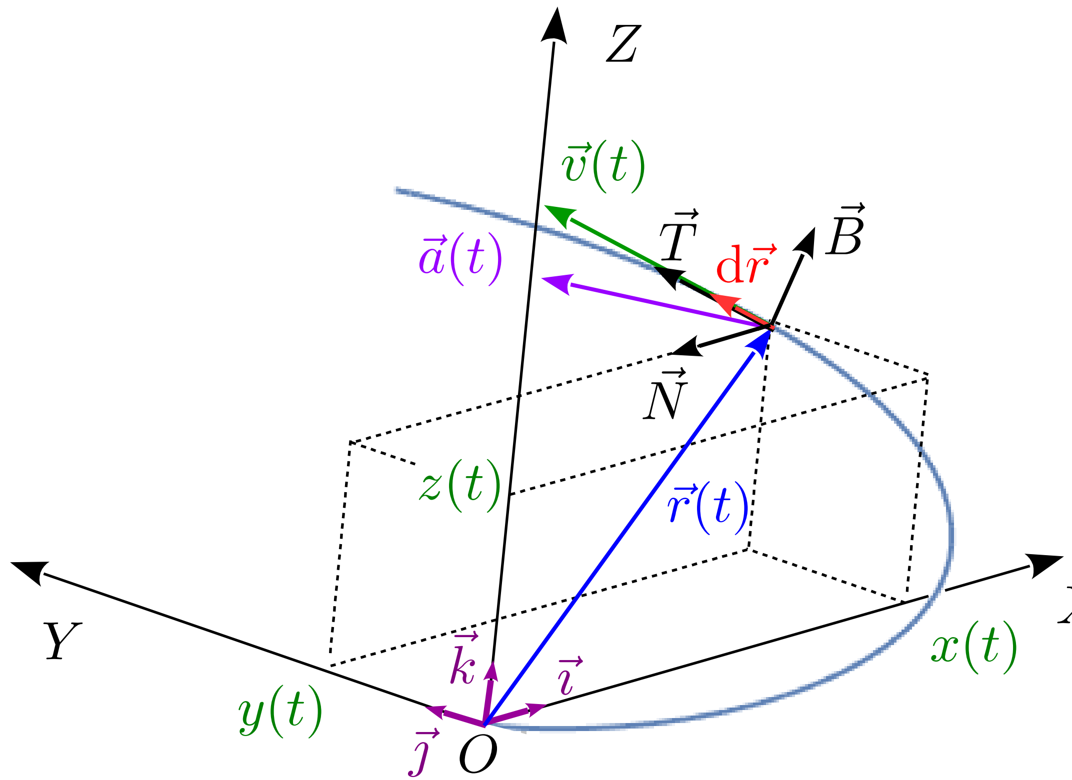
$$= \dot{\vec{v}} = \dot{v}_x\,\vec{\imath} + \dot{v}_y\,\vec{\jmath} + \dot{v}_z\,\vec{k}$$

$$= \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\,\vec{\imath} + \ddot{y}\,\vec{\jmath} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

- Desplazamiento diferencial

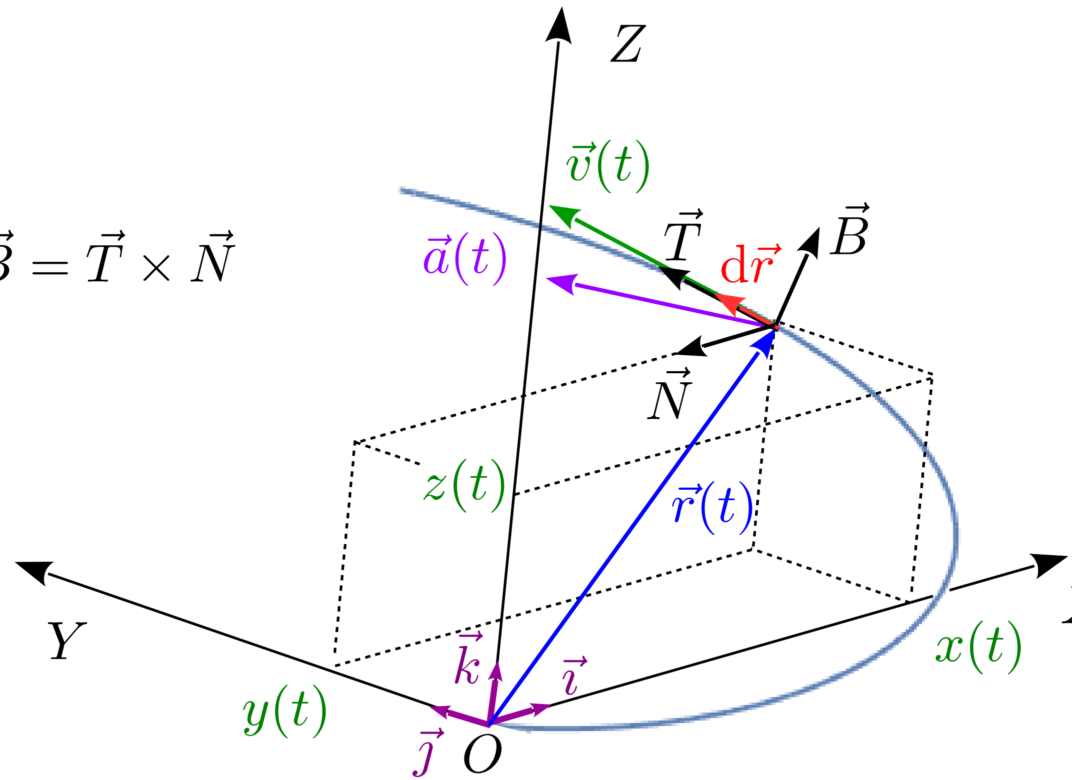
$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}(t)\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}s = |\,\mathrm{d}\vec{r}\,| = |\vec{v}(t)|\,\mathrm{d}t = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\;\mathrm{d}t$$



- Triedro intrínseco

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \qquad \vec{N} = \frac{1}{a_N}(\vec{a} - \vec{a}_T) \qquad \vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$



- Componentes intrínsecas

$$\vec{v} = v\,\vec{T} \qquad \vec{a} = a_T\,\vec{T} + a_N\vec{N}$$

$$a_T = \vec{a}\cdot\vec{T} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} \qquad a_N = \vec{a}\cdot\vec{N} = |\vec{a}\times\vec{T}| = \frac{|\vec{a}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_T^2}$$

$$a_T = \frac{\mathrm{d}|\vec{v}|}{\mathrm{d}t} \qquad R_\kappa = \frac{|\vec{v}|^2}{a_N} = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{a}\times\vec{v}|} \qquad \kappa = \frac{1}{R_\kappa} \qquad \vec{r}_{O_\kappa} = \vec{r} + R_\kappa\,\vec{N}$$

Índice

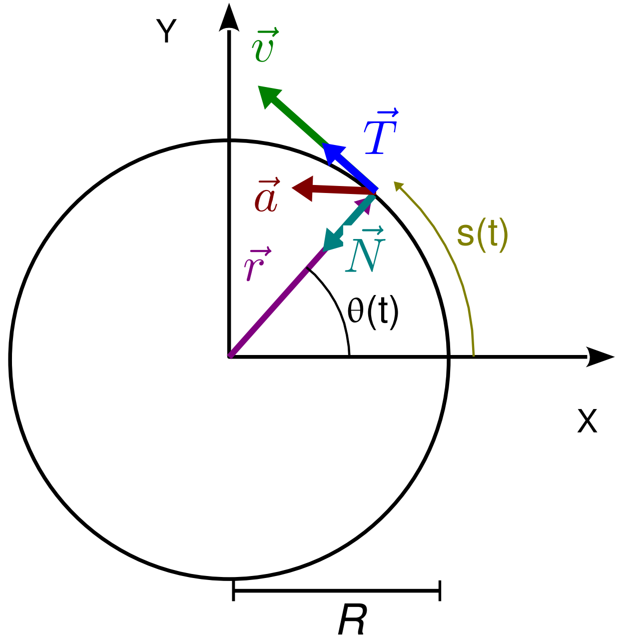
- Movimiento en 2D
  - Vector de posición
  - Vector velocidad
  - Vector aceleración
  - Componentes intrínsecas de la aceleración
- Movimiento en 3D
- Movimiento circular
- Geometría de curvas

- La trayectoria es una circunferencia $R_\kappa = R(\text{cte})$ $\kappa = \frac{1}{R}(\text{cte})$
  - Velocidad angular $\dot{\theta} = \omega$
  - Aceleración angular $\ddot{\theta} = \dot{\omega} = \alpha$
- Posición

$$\vec{r} = R\cos\theta\,\vec{\imath} + R\,\text{sen}\,\theta\,\vec{\jmath}$$

- Velocidad

$$\vec{v}(t) = R\dot{\theta}\,(-\text{sen}\,\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath})$$



- Aceleración

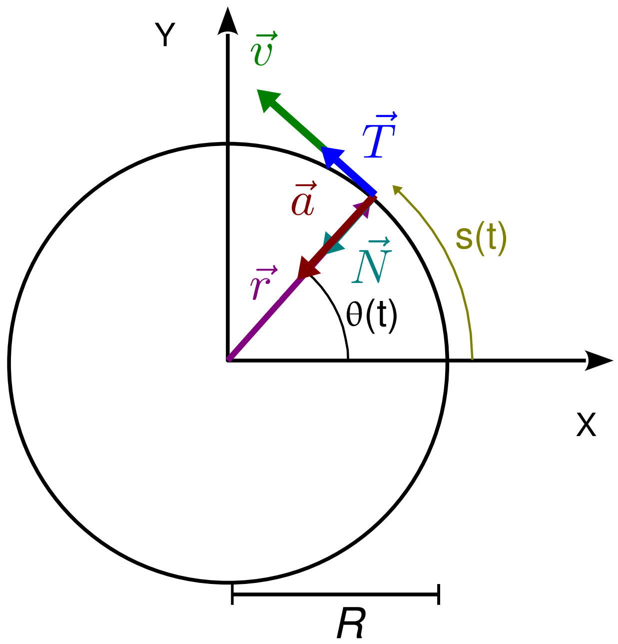
$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}} = R\ddot{\theta}\,\overbrace{(-\text{sen}\,\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath})}^{\vec{T}} + R\dot{\theta}^2\,\overbrace{(-\cos\theta\,\vec{\imath} - \text{sen}\,\theta\,\vec{\jmath})}^{\vec{N}}$$

  - Relación entre magnitudes cinemáticas lineales y circulares

$$s = R\theta \quad\Big|\quad v = R\dot{\theta} = R\omega \quad\Big|\quad a_T = \vec{a}\cdot\vec{T} = R\ddot{\theta} = R\alpha \quad\Big|\quad a_N = \vec{a}\cdot\vec{N} = R\dot{\theta}^2 = R\omega^2$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{T} &= [-\text{sen}\,\theta, \cos\theta, 0]\\ \vec{N} &= [-\cos\theta, -\text{sen}\,\theta, 0]\\ \vec{B} &= [0, 0, 1]\end{aligned}}$$

- La aceleración angular es cero $\alpha = \dot{\omega} = 0$
  - Velocidad angular $\dot{\theta} = \omega_0 = \text{cte}$
  - Ángulo barrido $\theta = \theta(0) + \omega_0\, t \qquad t \geq 0$



- Magnitudes cinemáticas lineales

$$s(t) = R\theta(t) \qquad t \geq t_0$$

$$v \quad = R\omega_0 = \text{cte}$$

$$|\vec{a}| \quad = a_N = R\omega_0^2 = \text{cte}$$

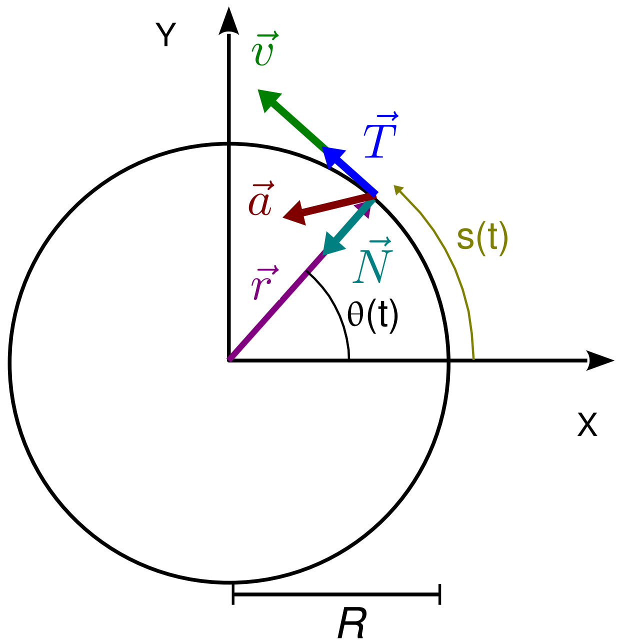
  - El movimiento es periódico

$$\left.\begin{array}{l} \theta(T) = \theta(0) + 2\pi \\ \theta(T) = \theta(0) + \omega_0\, T \end{array}\right| \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

La velocidad no es constante

La celeridad sí es constante

- La aceleración angular es constante $\alpha = \dot{\omega} = \alpha_0$
  - Velocidad angular $\dot{\theta} = \omega = \dot{\theta}(0) + \alpha_0 t \qquad t \geq 0$
  - Ángulo barrido $\theta = \theta(0) + \dot{\theta}(0)\,t + \frac{1}{2}\alpha_0 t^2$



- Magnitudes cinemáticas lineales

$$s(t) = R\theta(t) \qquad t \geq 0$$

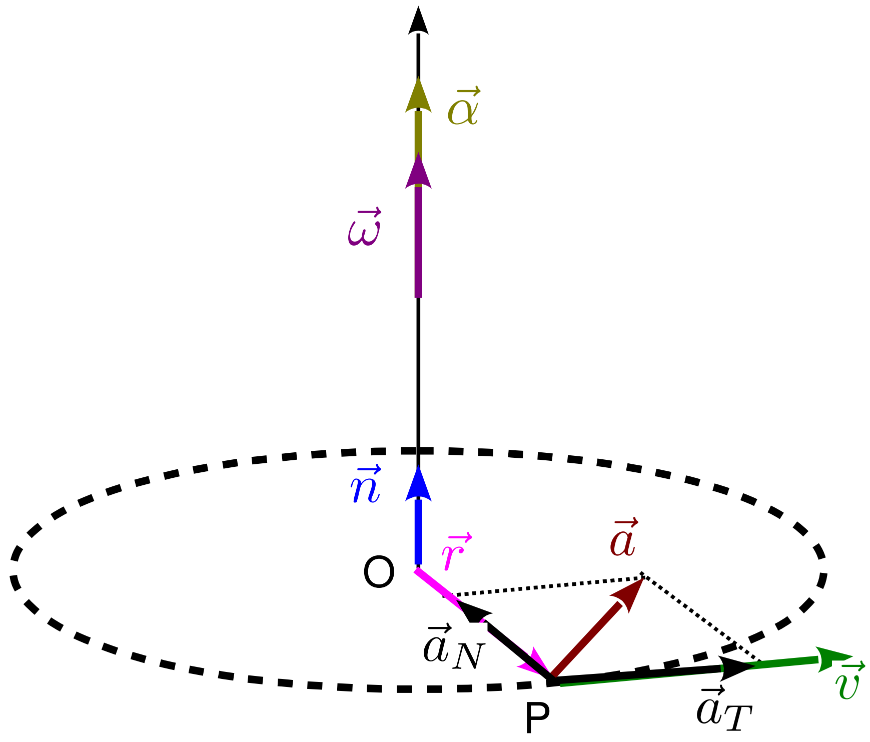
$$v(t) = R\omega(t) = v(0) + R\alpha_0 t$$

$$a_N = R\omega(t)^2 = R(\dot{\theta}(0) + \alpha_0 t)^2$$

$$a_T = R\alpha_0$$

  - El movimiento no es periódico

- Se define el vector velocidad angular $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{n}$
  - Rapidez de giro: $\dot{\theta}$
  - Recta soporte: eje de giro, perpendicular a la circ.
  - Sentido: regla del tornillo



- Se define el vector aceleración angular $\vec{\alpha}$

$$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{dt}}$$

- Velocidad y aceleración

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

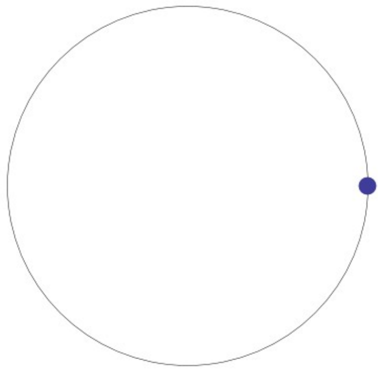
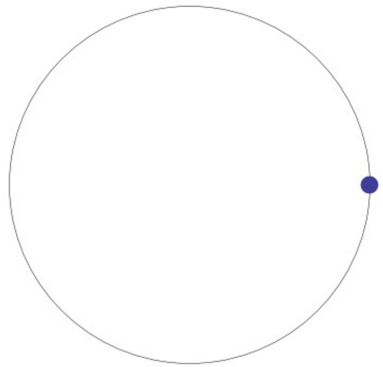
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r} \qquad \vec{a}_N = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

- Los vectores $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ son vectores deslizantes

- Movimiento en 2D
  - Vector de posición
  - Vector velocidad
  - Vector aceleración
  - Componentes intrínsecas de la aceleración
- Movimiento en 3D
- Movimiento circular
- Geometría de curvas

- Una misma trayectoria puede ser recorrida con diferentes velocidades

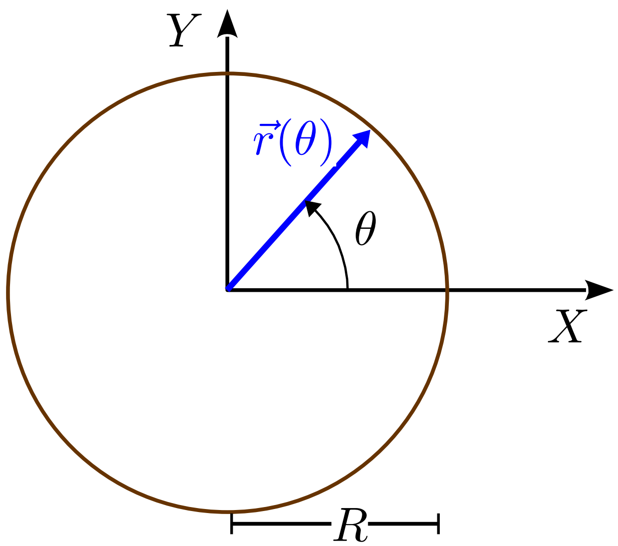
- La geometría de la trayectoria es independiente de como se recorra
  - Una curva se puede parametrizar de muchas maneras
  - El triedro intrínseco en cada punto es independiente del parámetro que se utilice

- Descripción matemática de una curva en 3D
  - Vectorial $$\Gamma \equiv \vec{r}(\lambda) = x(\lambda)\,\vec{\imath} + y(\lambda)\,\vec{\jmath} + z(\lambda)\,\vec{k} \qquad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$$
  - Paramétricas $$\Gamma \equiv \vec{r}(\lambda) = \begin{cases} x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda) \\ z = z(\lambda) \end{cases} \qquad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$$
  - Implícitas $$\Gamma \equiv \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \qquad x \in [x_1.x_2] \quad y \in [y_1.y_2] \quad z \in [z_1.z_2]$$
- Ejemplo: circunferencia de radio R, centro en el eje OZ y en el plano z=0

$$\Gamma \equiv \vec{r}(\theta) = R\cos\theta\,\vec{\imath} + R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{\jmath} \qquad \theta \in [0, 2\pi)$$

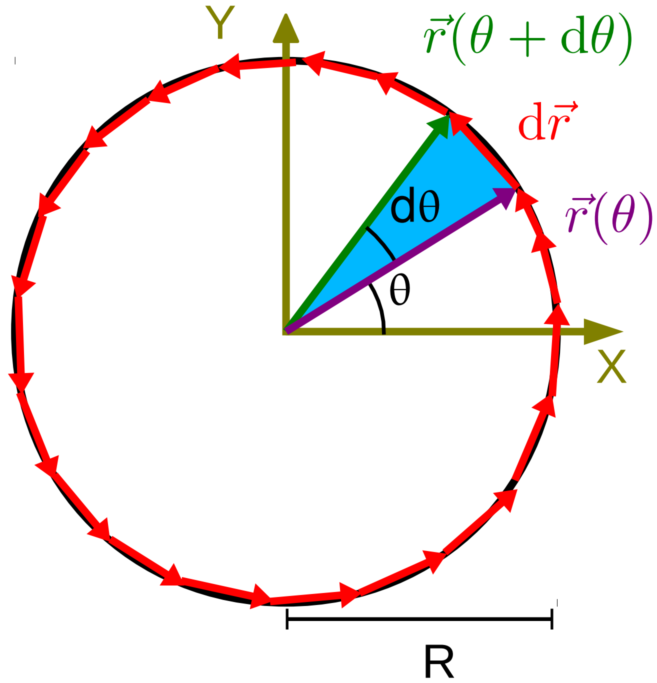
$$\Gamma \equiv \vec{r}(\theta) = \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = 0 \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi)$$

$$\Gamma \equiv \begin{cases} F_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - R^2 = 0 \\ F_2(x,y,z) = z = 0 \end{cases} \qquad x, y \in [-R, R]$$



- Se calcula derivando respecto al parámetro $\mathrm{d}\vec{r} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\lambda}\right)\mathrm{d}\lambda$

  - Aplicación: longitud de una circunferencia



$$\vec{r}(\theta) = R\cos\theta\,\vec{\imath} + R\ \mathrm{sen}\ \theta\,\vec{\jmath} \qquad \theta\in[0,2\pi)$$

$$\mathrm{d}\vec{r}(\theta) = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\theta}\right)\mathrm{d}\theta = R\,\mathrm{d}\theta\,\left(-\,\mathrm{sen}\theta\ \vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}\right)$$

    - La longitud es la suma de los módulos de todos los dr

$$L = \int |\mathrm{d}\vec{r}|(\theta) = \int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}\theta = R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi R$$

  - Aplicación: área de un círculo

$$\mathrm{d}A(\theta) = \frac{1}{2}|\vec{r}(\theta)\times\mathrm{d}\vec{r}(\theta)| = \frac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ R\cos\theta & R\ \mathrm{sen}\theta & 0\\ -R\ \mathrm{sen}\theta\ \mathrm{d}\theta & R\ \cos\theta\,\mathrm{d}\theta & 0\end{array}\right\| = \frac{1}{2}R^2\mathrm{d}\theta$$

    - El área del círculo es la suma de las áreas de todos los triángulos

$$A = \int\mathrm{d}A = \int\frac{1}{2}|\vec{r}(\theta)\times\mathrm{d}\vec{r}(\theta)| = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}R^2\mathrm{d}\theta = \pi\,R^2$$

- Curva parametrizada en función de un parámetro λ

$$\vec{r} = \vec{r}(\lambda)$$

- Vector unitario tangente a la curva en cada punto

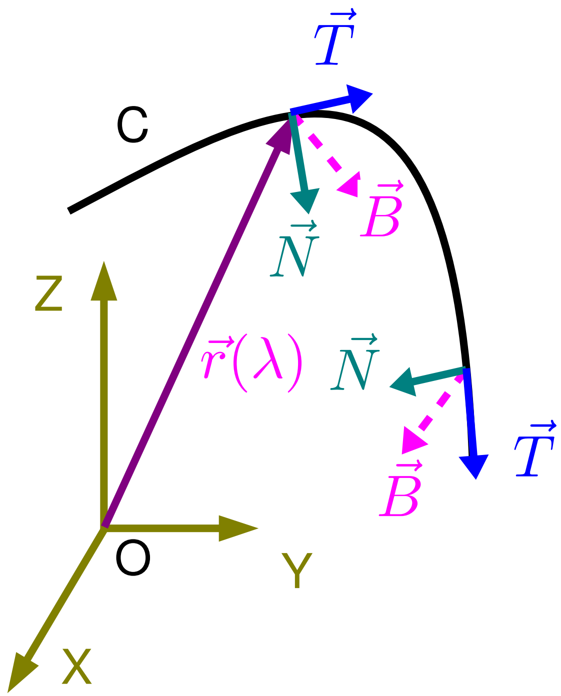
$$\vec{T} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}\lambda}{|\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}\lambda|}$$ Vector tangente

- El vector normal indica la variación de la dirección de $\vec{T}$

$$\vec{N} = \frac{\mathrm{d}\vec{T}/\mathrm{d}\lambda}{|\mathrm{d}\vec{T}/\mathrm{d}\lambda|}$$ Vector normal

- Completamos el triedro

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$ Vector binormal

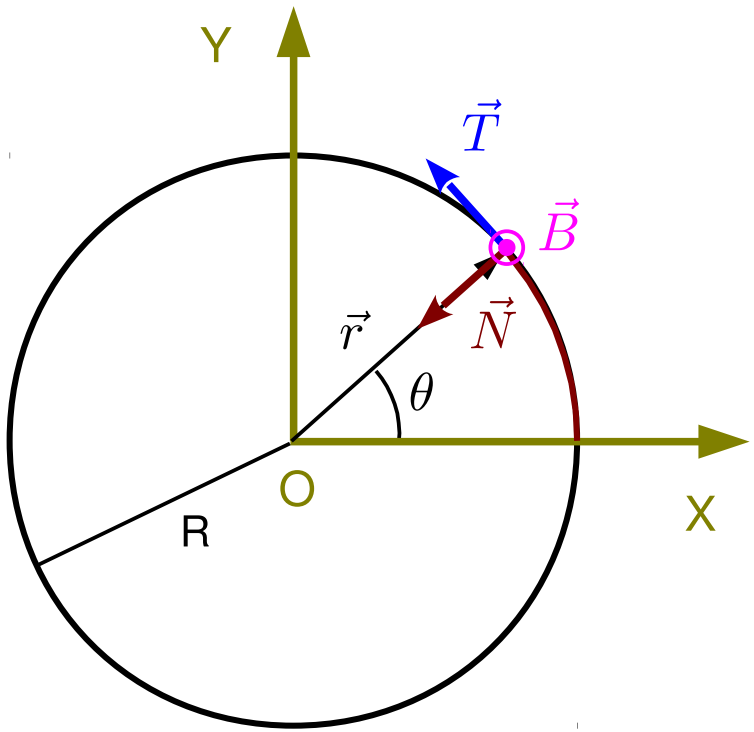


El triedro es intrínseco a la curva. No depende de cómo se recorra ni del sistema de ejes y coordenadas que se utilice

- Parametrización con el ángulo

$$\vec{r} = \vec{r}(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = R\cos\theta \\ y(\theta) = R\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z(\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$



- Triedro intrínseco
  - Vector tangente

$$\vec{T} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}/\,\mathrm{d}\theta}{|\,\mathrm{d}\vec{r}/\,\mathrm{d}\theta|} = -\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$$

  - Vector normal

$$\vec{N} = \frac{\mathrm{d}\vec{T}/\,\mathrm{d}\theta}{|\,\mathrm{d}\vec{T}/\,\mathrm{d}\theta|} = -\cos\theta\,\vec{\imath} - \mathrm{sen}\,\theta\,\vec{\jmath}$$

Indica la dirección en la que gira el vector tangente cuando varía θ

  - Vector binormal

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \vec{k}$$

- Parametrización con el tiempo

$$\theta = kt^2$$

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = R\cos(kt^2) \\ y(t) = R\,\mathrm{sen}\,(kt^2) \\ z(t) = 0 \end{cases} \qquad t \in [0, \sqrt{2\pi/k}]$$

- Triedro intrínseco
  - Vector tangente

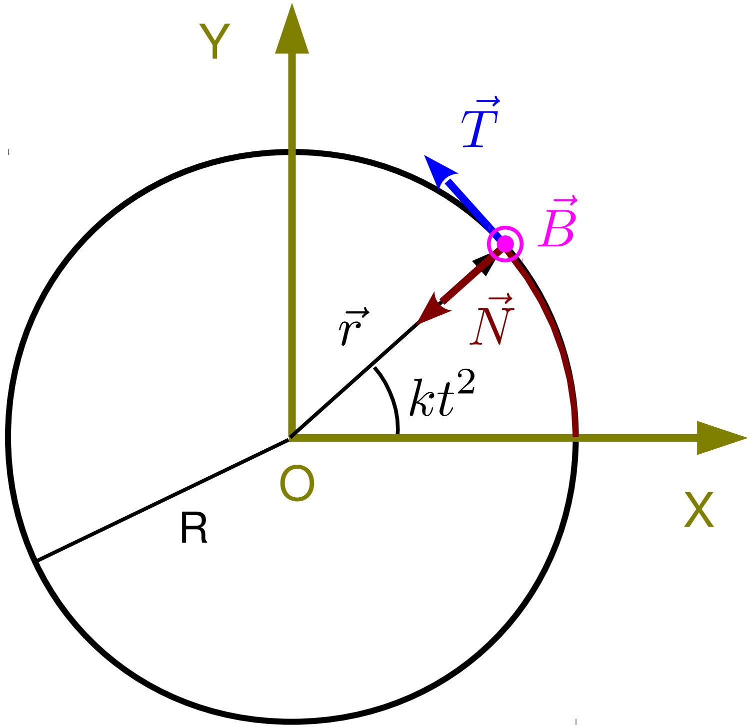
$$\vec{T} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}/\,\mathrm{d}t}{|\,\mathrm{d}\vec{r}/\,\mathrm{d}t|} = -\mathrm{sen}\,(kt^2)\,\vec{\imath} + \cos(kt^2)\,\vec{\jmath}$$

  - Vector normal

$$\vec{N} = \frac{\mathrm{d}\vec{T}/\,\mathrm{d}t}{|\,\mathrm{d}\vec{T}/\,\mathrm{d}t|} = -\cos(kt^2)\,\vec{\imath} - \mathrm{sen}\,(kt^2)\,\vec{\jmath}$$

  - Vector binormal

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \vec{k}$$



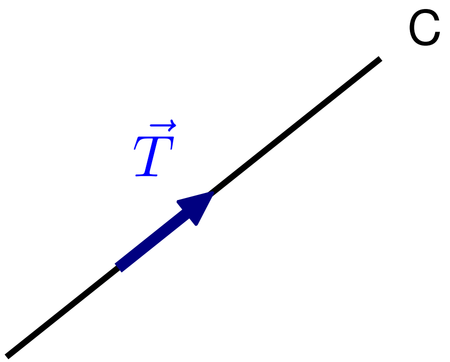
En cada punto de la curva los vectores del tridero son los mismos independientemente del parámetro que se utilice

Vector velocidad

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\theta}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\theta}\right)\dot{\theta}$$

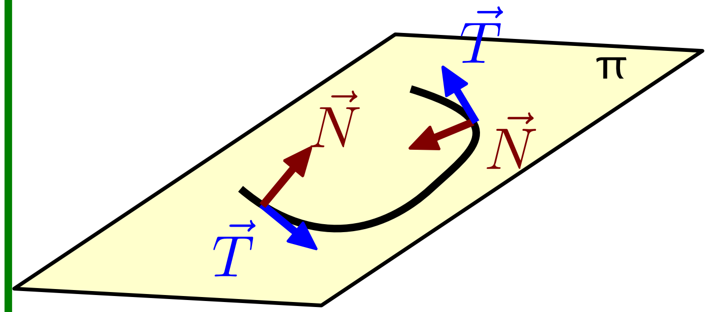
Triedro intrínseco o de Frenet: siginificado

Línea recta



Vector tangente uniforme

Línea plana

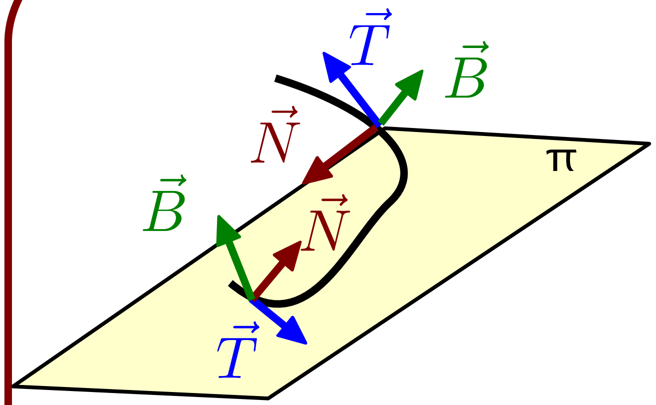


Contenida en un plano

Vector tangente variable

Vector normal **N** apunta en la dirección en que se tuerce la curva

Curva alabeada



No contenida en un plano

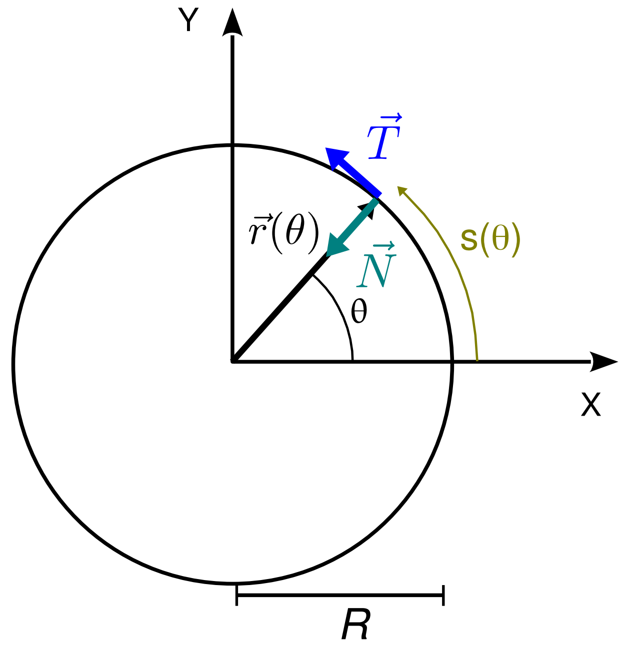
Vector binormal **B** = **T** x **N**

- El parámetro arco es la distancia recorrida sobre la curva

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = \begin{cases} x(s) = R\cos(s/R) \\ y(s) = R\,\mathrm{sen}(s/R) \\ z(s) = 0 \end{cases}$$

$$s = s(\theta) = R\,\theta$$

$$s \in [0, 2\pi R)$$



- La curvatura en cada punto es el módulo de la derivada del vector tangente cuando está expresado en el parámetro arco

$$\kappa(s) = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\right|$$

- Si se usa otro parámetro hay que utilizar la regla de la cadena

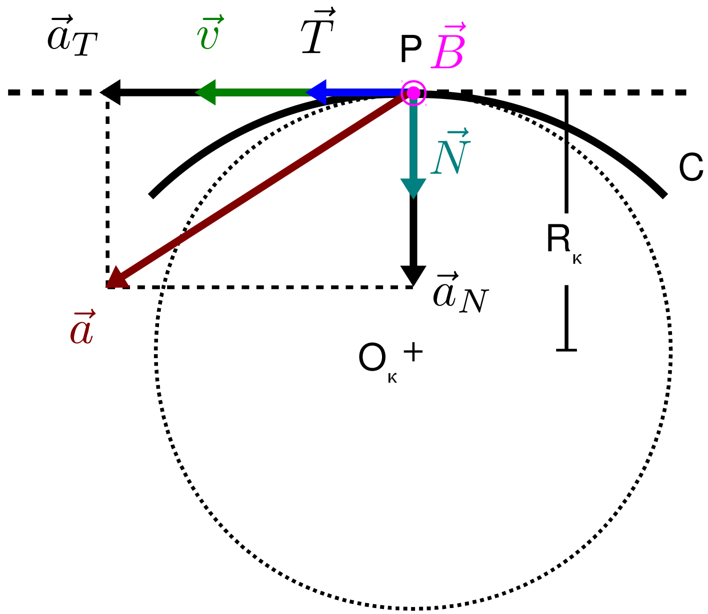
$$\lambda = \lambda(s) \Longrightarrow \kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}\lambda}\right| \left|\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s}\right|$$

- Expresiones

$$\vec{v} = \dot{s}\,\vec{T}$$

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}$$

$$= \frac{\mathrm{d}|\vec{v}|}{\mathrm{d}t}\,\vec{T} + \frac{|\vec{v}|^2}{R_\kappa}\,\vec{N}$$



- Significado de las componentes de la aceleración

	a_T	a_N
Información	Variación del módulo de **v**	Variación de la dirección de **v**
signo	Positivo (acelerado) o negativo (retardado)	Siempre positivo
Nulidad permanente	Movimiento uniforme (|**v**| constante)	Movimiento rectilíneo