Tema 7: Estática del sólido rígido

FISICA I, 1º, Grado en Ingeniería Civil

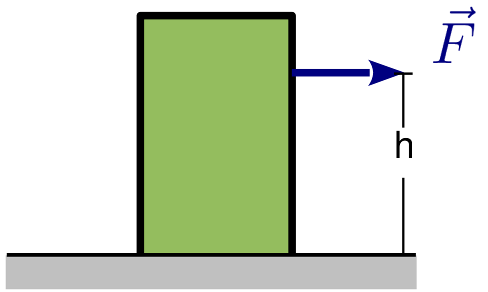
Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

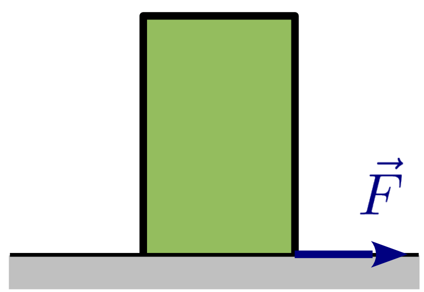
Universidad de Sevilla

Índice

- Un sólido tiene más grados de libertad que una partícula
  - Puede trasladarse
  - Puede rotar
  - Puede deformarse
- El movimiento de un sólido está determinado por la magnitud de las fuerzas que actúan sobre él y donde se aplican



Vuelca



Desliza

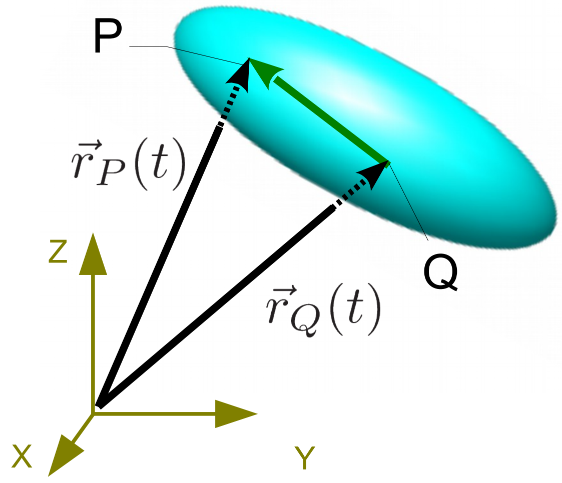
- Un sólido sometido a la acción de fuerzas está en equilibrio cuando no se traslada, ni rota, ni se deforma

Índice

Sólido rígido

- Un sólido rígido es un sólido no deformable
  - La distancia entre cualquier par de puntos no cambia cuando el sólido se mueve en el espacio

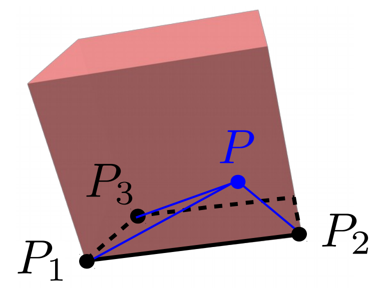
$$|QP(t)|^2 = |\,\vec{r}_P(t) - \vec{r}_Q(t)\,|^2 = (C_{PQ})^2 \quad \text{(cte)}$$



  - Las distancias relativas se mantienen bajo la acción de cualquier fuerza
  - Su posición y orientación queda definida dados 3 de sus puntos no alineados

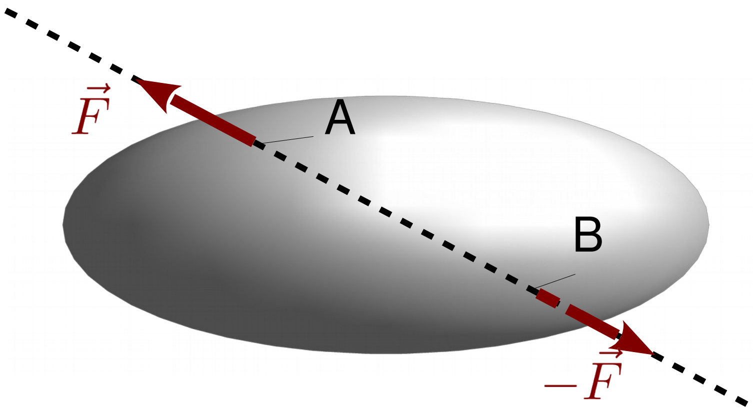
$$P_1(x_1, y_1, z_1), \quad P_2(x_2, y_2, z_2), \quad P_3(x_3, y_3, z_3)$$ → 9 parámetros

$$|\overrightarrow{P_2P_1}| = C_{P_1P_2}, \quad |\overrightarrow{P_3P_1}| = C_{P_1P_3}, \quad |\overrightarrow{P_3P_2}| = C_{P_2P_3}$$ → 3 condiciones de rigidez

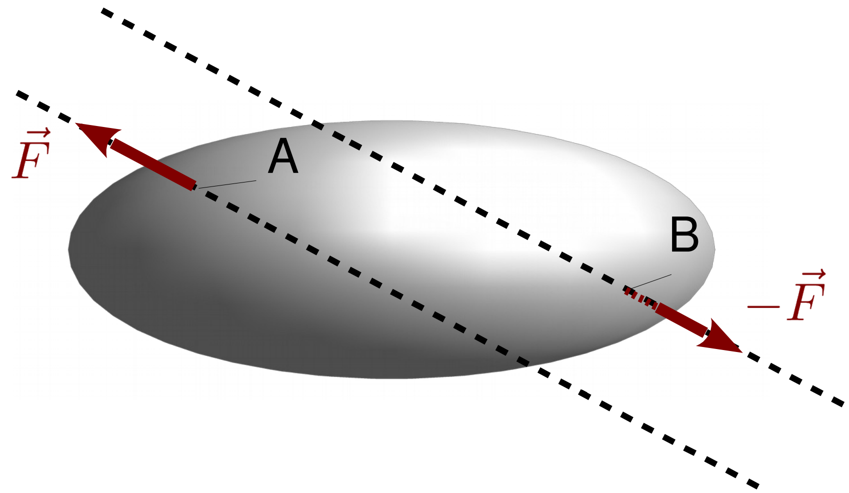


El sólido rígido tiene 6 grados de libertad

Si en dos puntos cualesquiera de un sólido rígido en equilibrio mecánico se aplican sendas fuerzas de módulos iguales e idéntica recta soporte, pero de sentidos opuestos, el equilibrio del sólido no se ve alterado

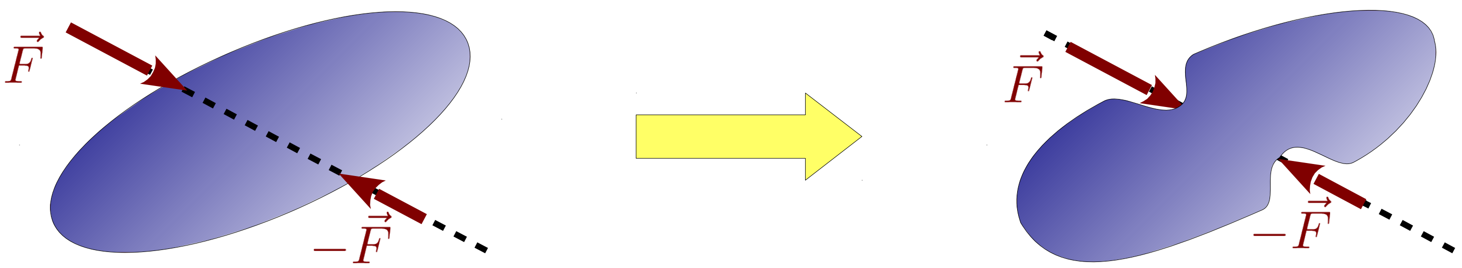


Equilibrio

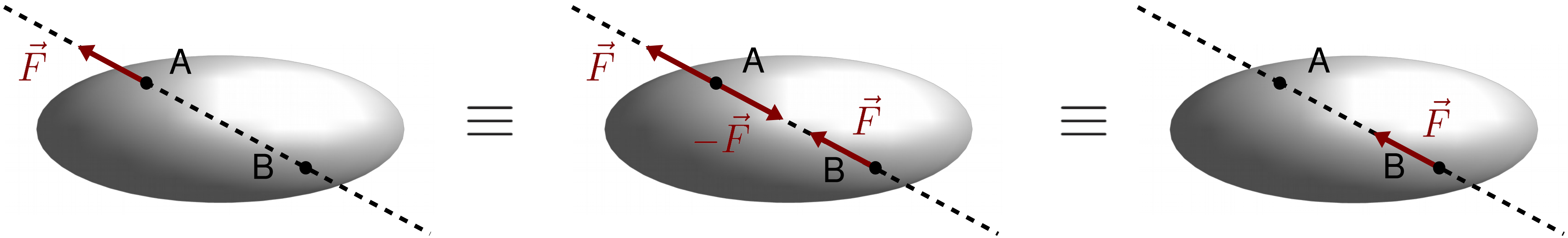


No equilibrio

- Si el sólido es deformable no hay equilibrio en ningún caso



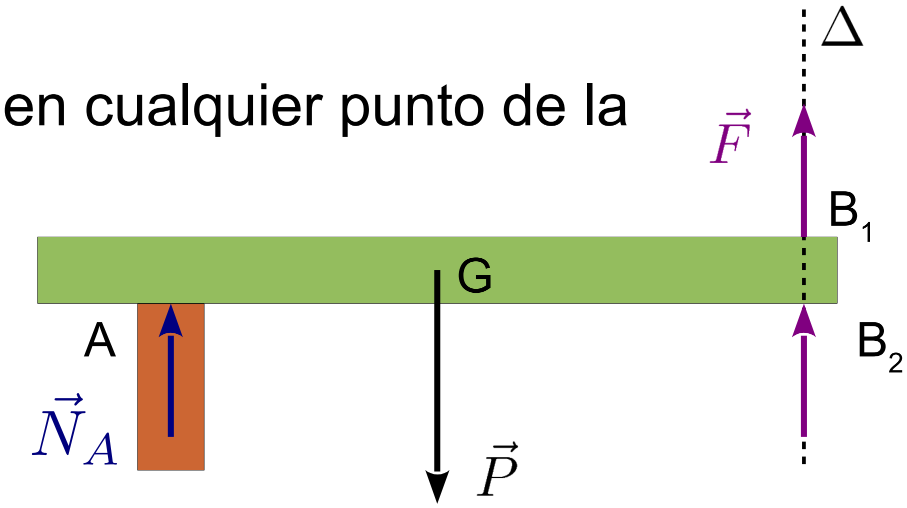
Las fuerzas aplicadas a un sólido rígido se comportan como vectores deslizantes



- Es válido en Estática y en Dinámica
- Es válido para fuerzas activas y de reacción vincular
- El conjunto de fuerzas aplicadas a un sólido rígido se pueden tratar como un **sistema de vectores deslizantes**

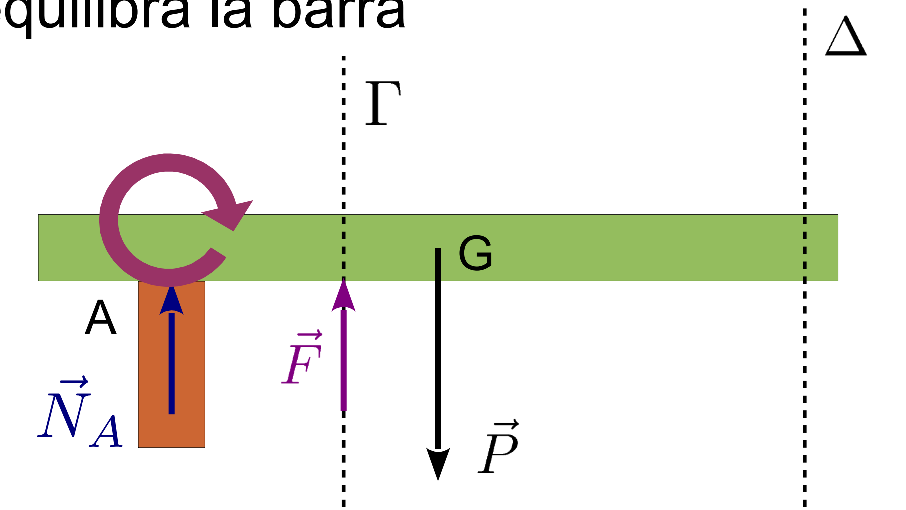
Índice

- La fuerza **F** equilibra la barra al ser aplicada en cualquier punto de la recta Δ



Vector deslizante

- La misma fuerza aplicada en otro punto no equilibra la barra



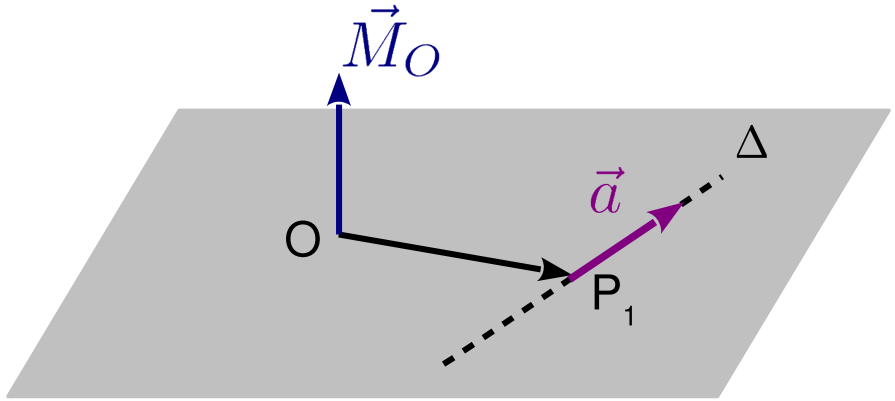
Son vectores deslizantes distintos

  - Producen efectos mecánicos diferentes

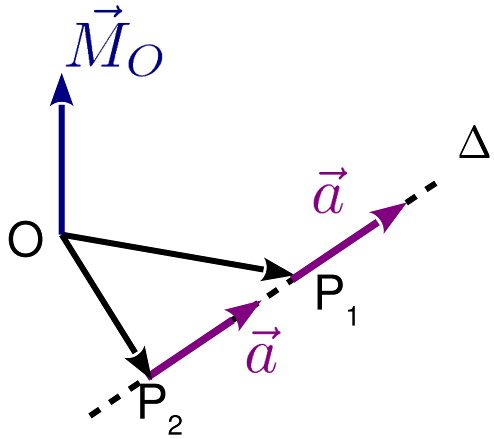
- En un vector deslizante hay que especificar la recta soporte $(\vec{a};\Delta)$
  - El vector **a** considerado como vector libre se llama cursor del vector deslizante

- La recta soporte puede especificarse usando el momento del vector respecto a un punto

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP}_1 \times \vec{a}$$



  - El momento es el mismo para todos los puntos P_1 de la recta

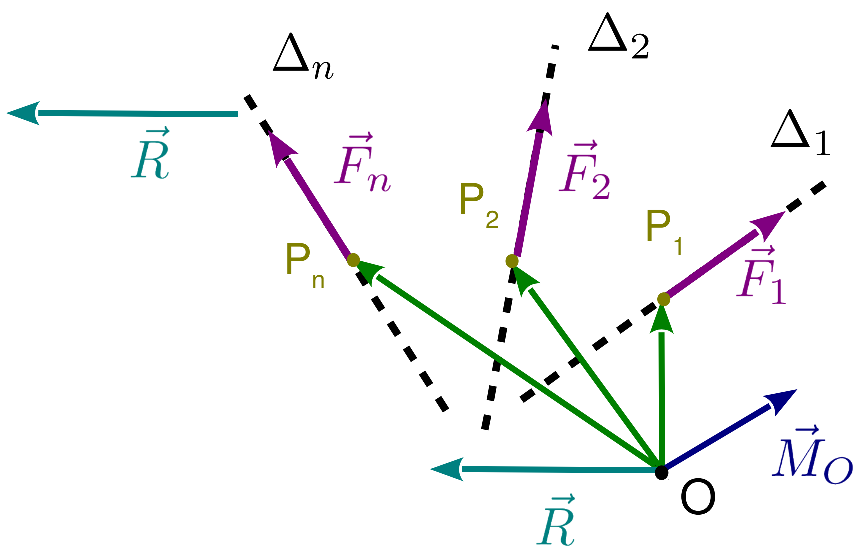


$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP}_2 \times \vec{a} &= (\overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{P_1P_2}) \times \vec{a} \\ &= \overrightarrow{OP}_1 \times \vec{a} + \overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{a} \\ &= \overrightarrow{OP}_1 \times \vec{a} \\ &= \vec{M}_O \end{aligned}$$

  - Es perpendicular al plano que contiene a la recta y pasa por el punto O
  - Permite identificar la recta soporte $(\vec{a};\Delta) \equiv (\vec{a};P_\Delta) \equiv (\vec{a};\vec{M}_O)$

- Es un conjunto de vectores deslizantes

$$S \equiv \{(\vec{F}_i; \Delta_i)\}_{i=1}^{n}$$



- Resultante

$$\vec{R}(S) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

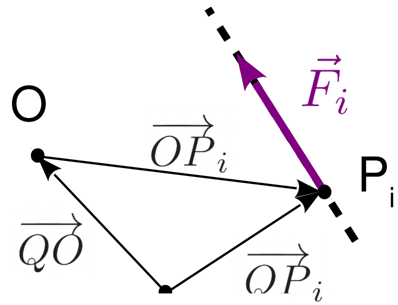
Es un vector libre

- Momento resultante en un punto

$$\vec{M}^O(S) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}^O(\vec{F}_i; \Delta_i) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i$$

Es un vector ligado al punto O

- Relación entre el momento resultante en dos puntos O, Q



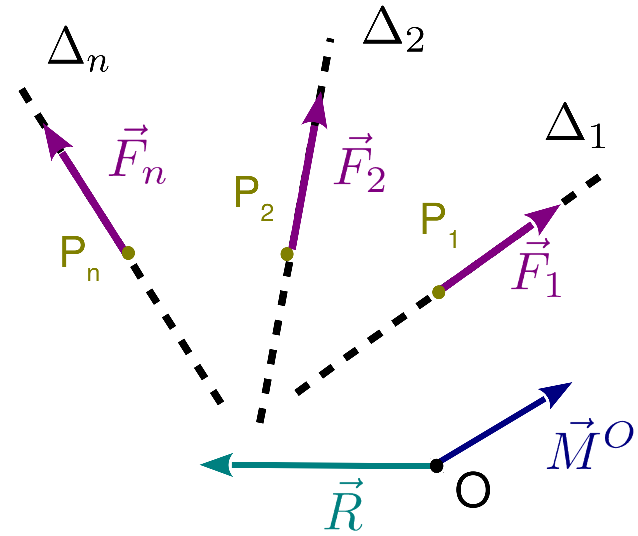
$$\vec{M}^Q(S) = \vec{M}^O(S) + \overrightarrow{QO} \times \vec{R} = \vec{M}^O(S) + \vec{R} \times \overrightarrow{OQ}$$

$$\begin{aligned}
\vec{M}^Q(S) &= \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{QP}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP}_i\right) \times \vec{F}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{QO} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i = \overrightarrow{QO} \times \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\right) + \vec{M}^O = \overrightarrow{QO} \times \vec{R} + \vec{M}^O
\end{aligned}$$

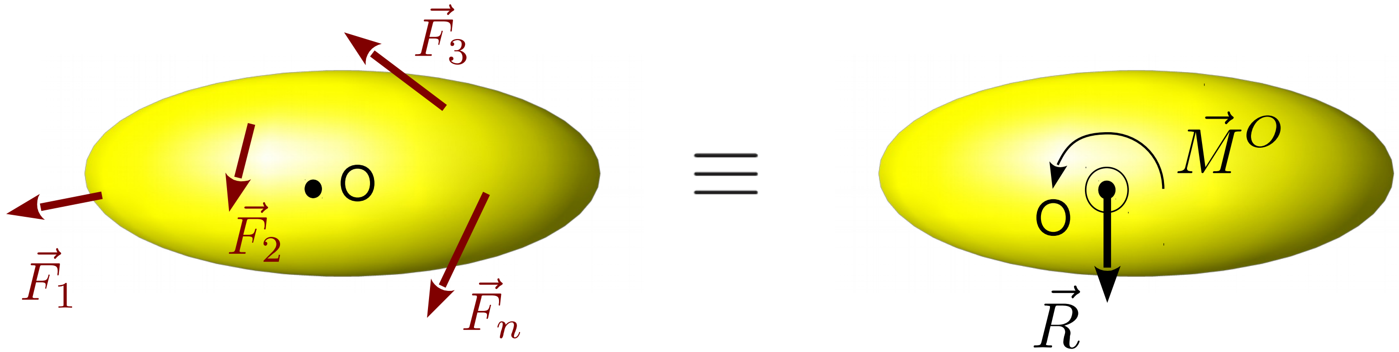
- La reducción en un punto O es el momento resultante en O y la resultante aplicada en O

$$S_O^{\text{red}} = \{\vec{R}(S), \vec{M}^O(S)\}$$

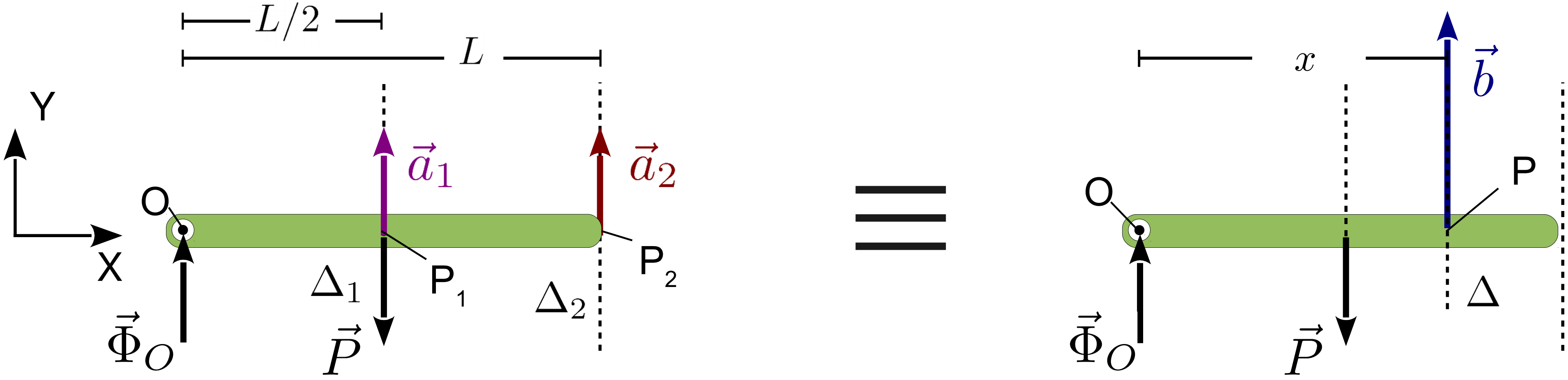
O es el centro de reducción



- Dos sistemas con la misma reducción en un punto son equivalentes
  - Si la reducción es la misma en un punto, es la misma en todos
- Cualquier s.v.d. puede sustituirse por un vector y un par



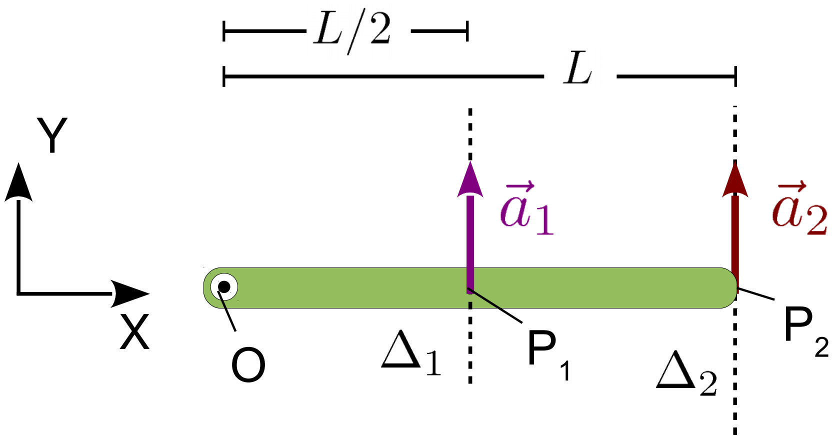
  - Aplic: Cualquier conjunto de fuerzas actuando sobre un sólido rígido puede reducirse a una fuerza y un par dinámicamente equivalentes



- El sistema de dos fuerzas de la izquierda equilibra la barra apoyada en O
- ¿Cuanto debe valer x y **b** para que la fuerza de la derecha tenga el mismo efecto mecánico que el sistema de la izquierda?

- Reducción en O del sistema de dos fuerzas

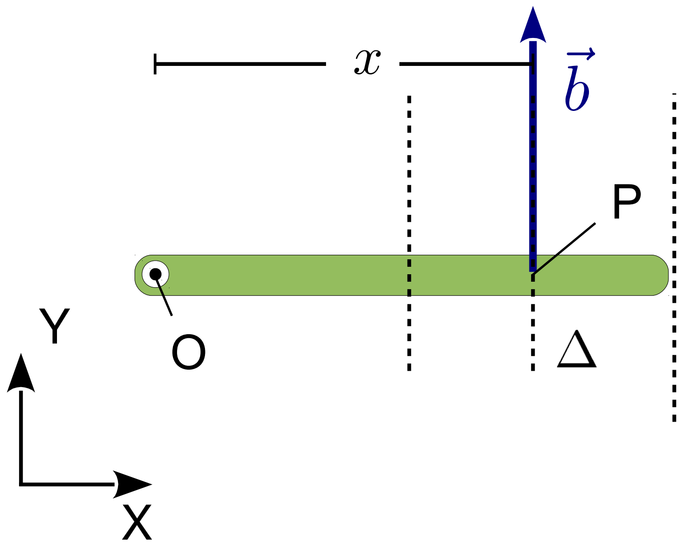
$$\vec{a}_1 = a\,\vec{\jmath} \qquad \vec{a}_2 = a\,\vec{\jmath}$$



$$\vec{R} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \qquad \vec{R} = 2a\,\vec{\jmath}$$

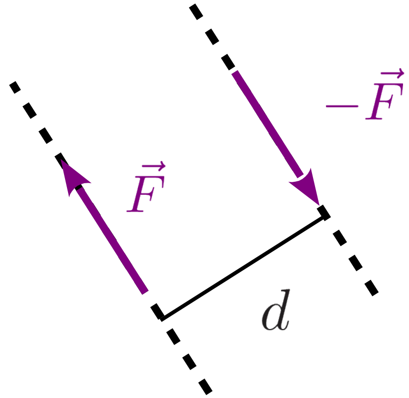
$$\left.\begin{array}{l} \vec{M}_{O1} = \overrightarrow{OP}_1 \times \vec{a}_1 = \dfrac{L\,a}{2}\,\vec{k} \\ \vec{M}_{O2} = \overrightarrow{OP}_2 \times \vec{a}_2 = L\,a\,\vec{k} \end{array}\right| \quad \vec{M}_O = \frac{3La}{2}\,\vec{k}$$

- La reducción en O de los dos sistemas ha de ser la misma



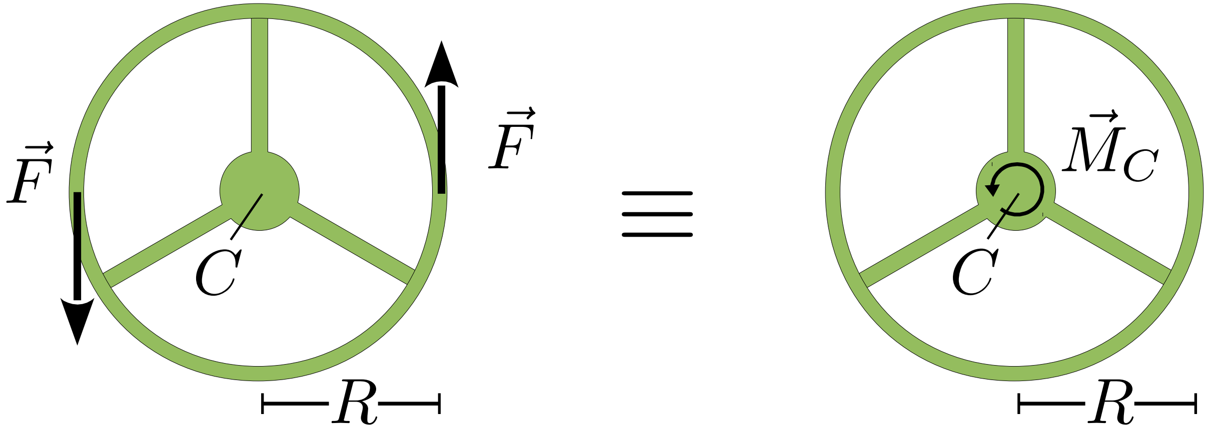
$$\vec{R} = \vec{b} \quad \Longrightarrow \vec{b} = 2a\,\vec{\jmath}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{M}_O(\vec{b}) = \vec{M}_O = \dfrac{3\,L\,a}{2}\,\vec{k} \\ \vec{M}_O(\vec{b}) = \overrightarrow{OP} \times \vec{b} = x2a\,\vec{k} \end{array}\right| \Longrightarrow x = \frac{3L}{4}$$



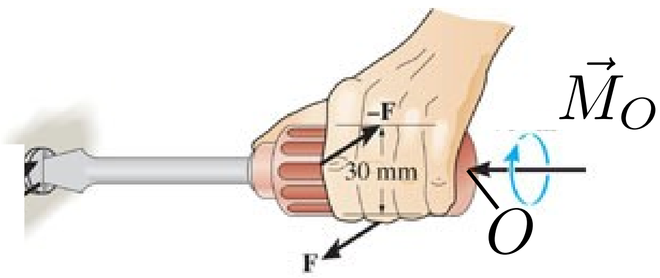
- Par de vectores
  - 2 vectores con rectas soportes paralelas, igual módulo y sentido contrario
  - Propiedades
    - Resultante nula $\vec{R} = \vec{0}$
    - El momento es el mismo respecto a cualquier punto $\overrightarrow{M}^P = \overrightarrow{M}^Q \qquad \forall P, Q$
    - Módulo del momento (d es el brazo) $|\overrightarrow{M}^O| = |\vec{F}|\, d$
    - Es perpendicular al plano que contiene a las dos rectas
  - Un par de fuerzas tiende a producir una rotación
    - Volante de un coche, tapón de rosca
  - Todos los pares con el mismo momento son equivalentes
    - Producen el mismo efecto mecánico
    - Se pueden representar con el momento del par $\overrightarrow{M}^O$

- Par de vectores: aplicaciones
  - Volante de un coche



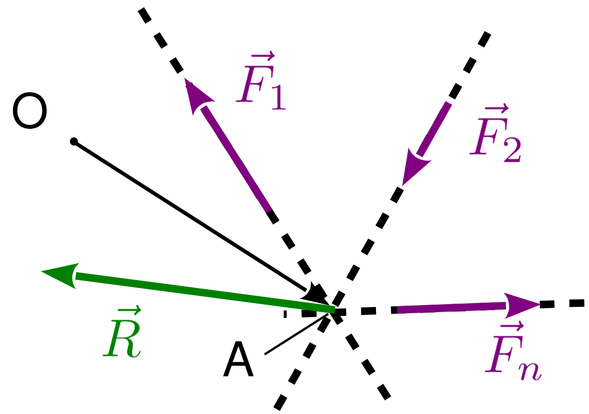
$$|\vec{M}_C| = 2FR$$

  - Destornillador



- Vectores concurrentes
  - Las rectas soportes se cortan en un punto
  - El momento resultante respecto a A es nulo

$$\overrightarrow{M}^A = \vec{0}$$

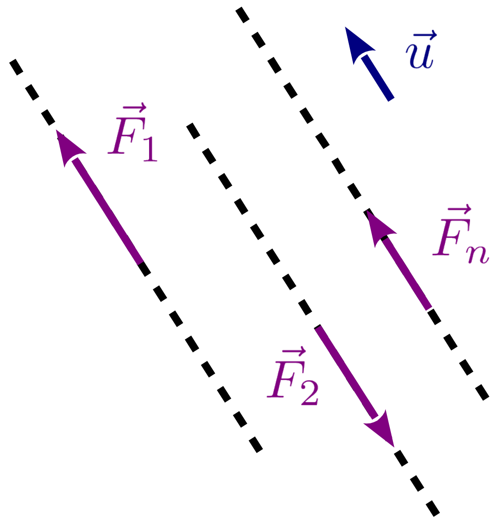


  - El momento resultante en un punto O es el momento de la resultante situada en A

$$\overrightarrow{M}^O = \overrightarrow{OA} \times \vec{R}$$ Teorema de Varignon

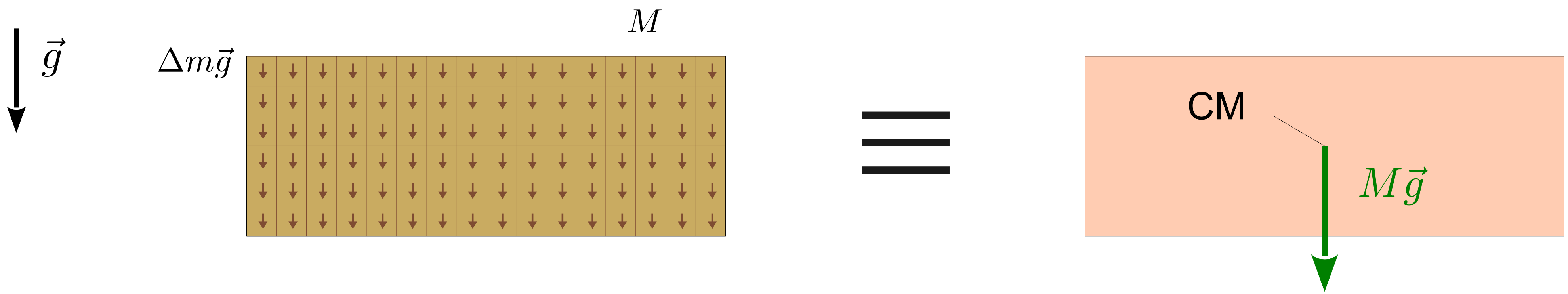
- Vectores paralelos
  - Todas las rectas soporte son paralelas $\overrightarrow{F}_i = F_i \vec{u}$
  - El momento en O es perpendicular a **u**
  - Centro del sistema

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \overrightarrow{OP}_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

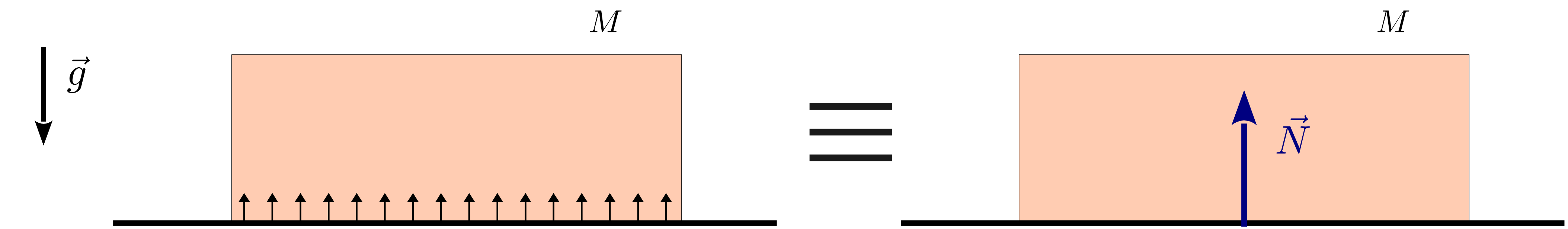


  - El momento resultante en O es el momento de la resultante situada en C

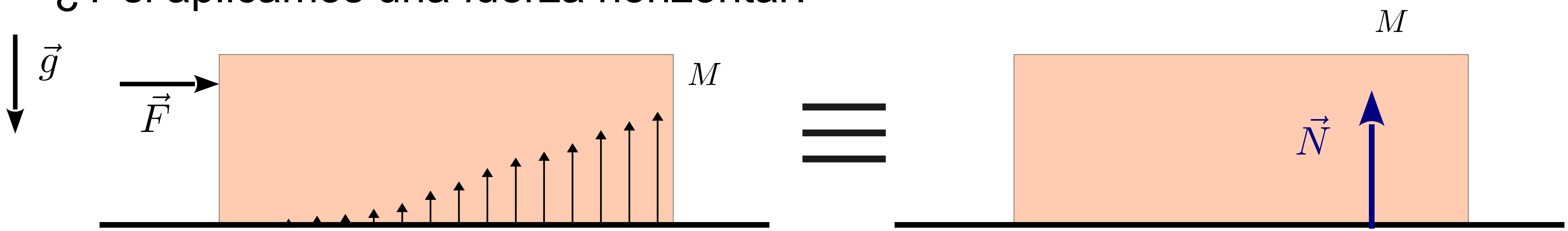
- ¿Por qué se aplica el peso de un cuerpo en su centro de masas?



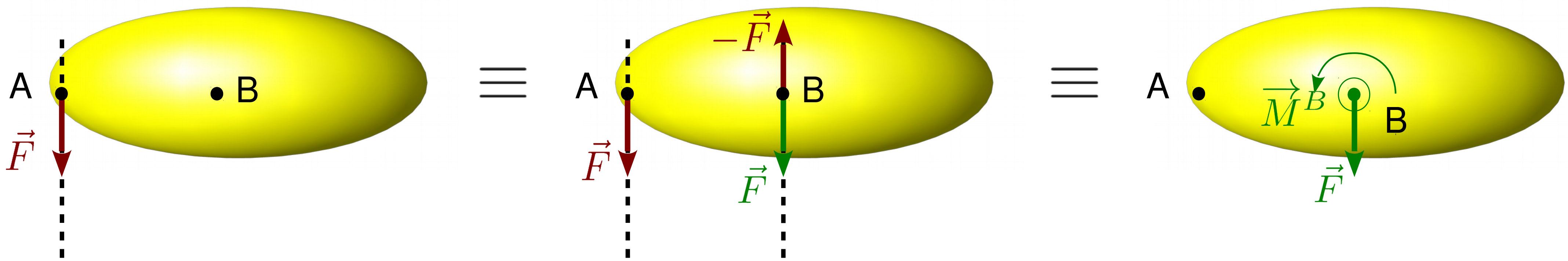
- Fuerza de reacción sobre un bloque en reposo sobre un plano



- ¿Y si aplicamos una fuerza horizontal?

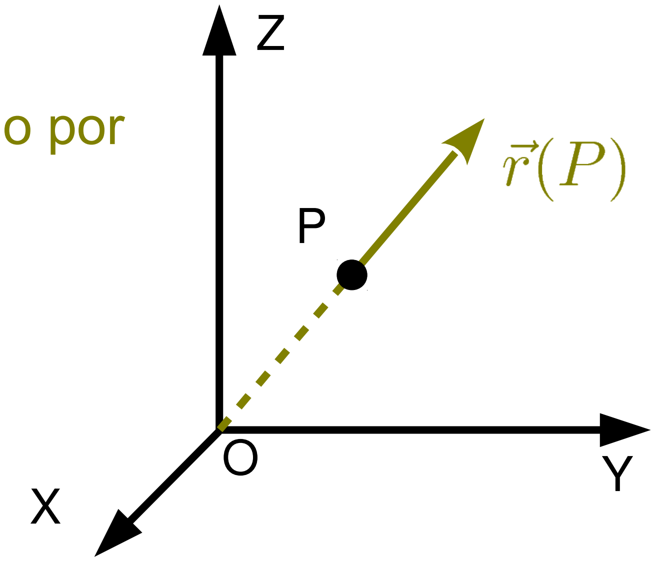


- Una fuerza aplicada en un punto se puede trasladar a otro punto añadiendo un par de fuerzas



- El momento del par es el de la fuerza original respecto a B: $\overrightarrow{M}^B = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}$
- Son equivalentes en el sentido de que producen el mismo efecto mecánico sobre un sólido rígido
- No son equivalentes en lo que respecta a las tensiones y deformaciones internas del sólido
  - Relevante para determinar si el sólido se rompe

- El vector está ligado a un punto
  - Ejemplo: a cada punto del espacio se le asigna un vector de posición
    - El resultado de realizar el desplazamiento indicado por el vector depende del punto de partida



  - Ejemplo: momento de un vector deslizante respecto a un punto
    - Si cambia el punto, cambia la recta soporte del vector deslizante
  - Ejemplo: momento cinético de una partícula respecto de un punto
  - Ejemplo: momento de una fuerza respecto de un punto

Índice

- Introducción
- Sólido rígido
- Sistemas de vectores deslizantes
- Condiciones de equilibrio estático
- Desvinculación de sólidos
- Teorema de las tres fuerzas
- Principio de fragmentación
- Sistemas hiperestáticos e impropiamente ligados
- Rozamiento seco
- Vuelco inminente
- Elasticidad

Un sólido rígido está en equilibrio mecánico si y sólo si el sistema de fuerzas externas (vectores deslizantes) tiene resultante nula y momento nulo respecto a un punto

- Cuando **R** es nula, si el momento respecto un punto es nulo, lo es para todos los puntos
- Se dice que el sistema de vectores deslizantes es nulo

- Distinguimos el sólido libre y el vinculado

Tipo de sólido	Número de grados de libertad	Fuerzas externas	Condiciones de equilibrio
libre	r=6	$\left\{(\vec{F}_i\,;P_i)\right\}_{i=1}^{n}$	$\begin{cases} \vec{R} = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0} \\ \vec{M}^O = \sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i = \vec{0} \end{cases}$
vinculado	r<6	$\left\{(\vec{F}_i\,;P_i)\right\}_{i=1}^{n}$ $\left\{(\vec{\Phi}_k\,;Q_k)\right\}_{k=1}^{m}$	$\begin{cases} \vec{R}+\vec{\Phi} = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum\limits_{k=1}^{m} \vec{\Phi}_k = \vec{0} \\ \vec{M}^O + \vec{\Gamma}^O = \sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i + \sum\limits_{k=1}^{m} \overrightarrow{OQ}_k \times \vec{\Phi}_k = \vec{0} \end{cases}$

- La reducción de las fuerzas internas del sólido rígido es nula en cualquier punto (3ª Ley de Newton)

- La reducción de las fuerzas externas activas es la reducción mecánica

$$S_{r.m.} \equiv \{\vec{R}\,;\vec{M}^O\} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \\ \vec{M}^O = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i \end{array} \right.$$

- La reducción de las fuerzas de reacción vincular es la reducción vincular

$$S_{r.v.} \equiv \{\vec{\Phi}\,;\vec{\Gamma}^O\} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \vec{\Phi} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\Phi}_i \\ \vec{\Gamma}^O = \sum_{j=1}^{s} \overrightarrow{OQ}_j \times \vec{\Phi}_j \end{array} \right.$$

Índice

- Introducción
- Sólido rígido
- Sistemas de vectores deslizantes
- Condiciones de equilibrio estático
- Desvinculación de sólidos
- Teorema de las tres fuerzas
- Principio de fragmentación
- Sistemas hiperestáticos e impropiamente ligados
- Rozamiento seco
- Vuelco inminente
- Elasticidad

- Consiste en sustituir los vínculos por fuerzas y momentos de reacción vincular que hacen que el vínculo se mantenga

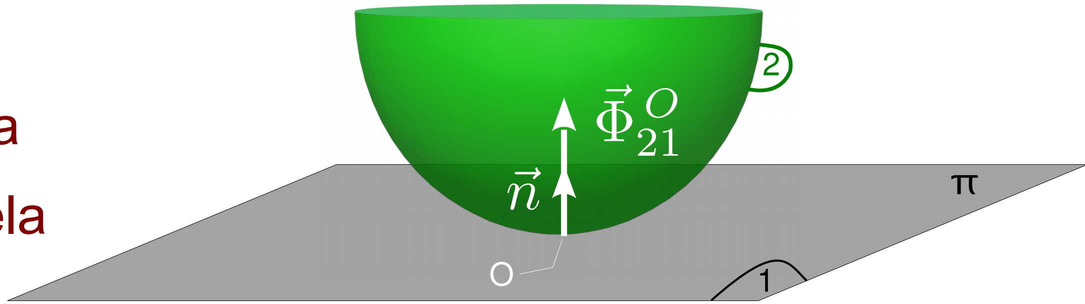
- Siempre se puede construir una reducción vincular en cualquier punto

$$S_{r.v.} \equiv \{\vec{\Phi}\,;\vec{\Gamma}^O\}$$

  - $\mathbf{\Phi}$ es la fuerza resultante de reacción vincular
  - $\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{O}}$ es el momento resultante de las fuerzas de reacción vincular en el punto O
  - En general la reducción vincular tiene 6 componentes independientes

- Procedimiento general para construir la reducción vincular
  - Para prohibir u ofrecer resistencia a la traslación de un sólido en una dirección se introduce una f.r.v. en dicha dirección
  - Para prohibir u ofrecer resistencia a la rotación de un sólido alrededor de un eje se introduce un momento de fuerza (de reacción vincular) en la dirección de dicho eje

- Dos sólidos en contacto en un punto y sin rozamiento
  - Se permite la rotación paralela a π (rodadura), la rotación perpendicular a π (pivotamiento) y la traslación paralela a π (deslizamiento)
  - Se prohíbe la traslación perpendicular a π



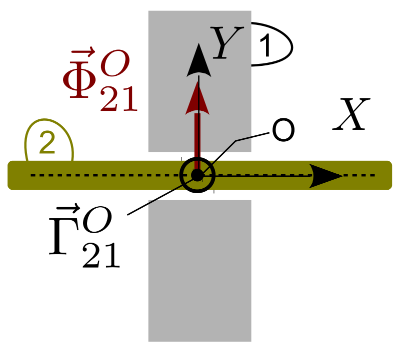
- Reducción vincular

$$S_{r.v.} \equiv \{\vec{\Phi}^{O}_{21} = N\vec{n}\,;\vec{\Gamma}^{O}_{21} = \vec{0}\}$$

- Es un par de sólidos vinculados
- Sólo algunos movimientos y rotaciones relativas están permitidas
- Reducciones vinculares de algunos pares de enlace bidimensionales
  - La reducción vincular tiene sólo 3 componentes independientes como máximo

$$S_{r.v.}(O) = \{\vec{\Phi}^O_{21} = \Phi_x \vec{\imath} + \Phi_y \vec{\jmath}; \quad \vec{\Gamma}^O_{21} = \Gamma\, \vec{k}\}$$

Pasador fijo

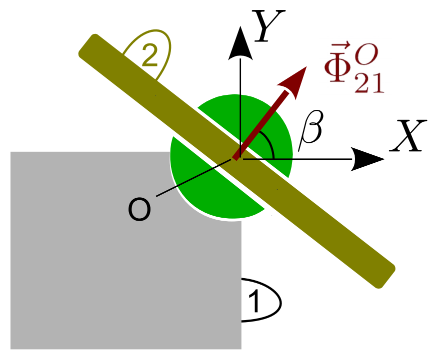


$$\vec{\Phi}^O_{21} = 0\, \vec{\imath} + \Phi\, \vec{\jmath}$$

$$\vec{\Gamma}^O_{21} = \Gamma\, \vec{k}$$

2 componentes

Pasador giratorio

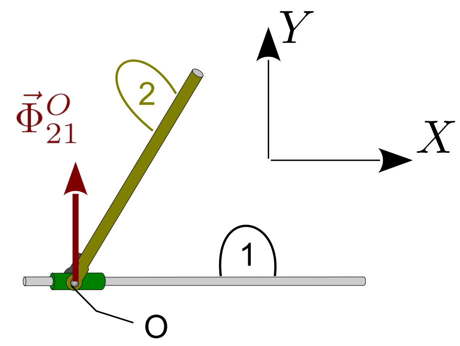


$$\vec{\Phi}^O_{21} = \Phi\, (\cos\beta\, \vec{\imath} + \operatorname{sen}\beta\, \vec{\jmath})$$

$$\vec{\Gamma}^O_{21} = 0\, \vec{k}$$

1 componente

Deslizadera



$$\vec{\Phi}^O_{21} = 0\, \vec{\imath} + \Phi\, \vec{\jmath}$$

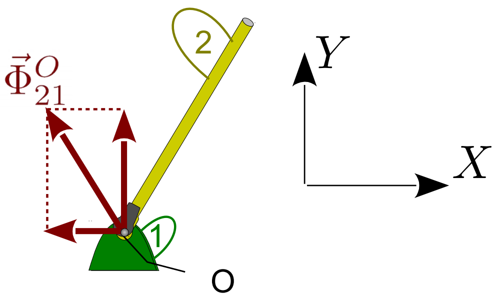
$$\vec{\Gamma}^O_{21} = 0\, \vec{k}$$

1 componente

- Es un par de sólidos vinculados
- Sólo algunos movimientos y rotaciones relativas están permitidas
- Reducciones vinculares de algunos pares de enlace bidimensionales
  - La reducción vincular tiene sólo 3 componentes independientes como máximo

$$S_{r.v.}(O) = \{\vec{\Phi}^O_{21} = \Phi_x \vec{\imath} + \Phi_y \vec{\jmath};\quad \vec{\Gamma}^O_{21} = \Gamma\,\vec{k}\}$$

Articulación

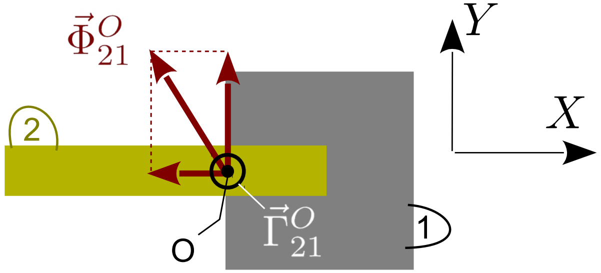


$$\vec{\Phi}^O_{21} = \Phi_x\,\vec{\imath} + \Phi_y\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{\Gamma}^O_{21} = 0\,\vec{k}$$

2 componentes

Empotramiento

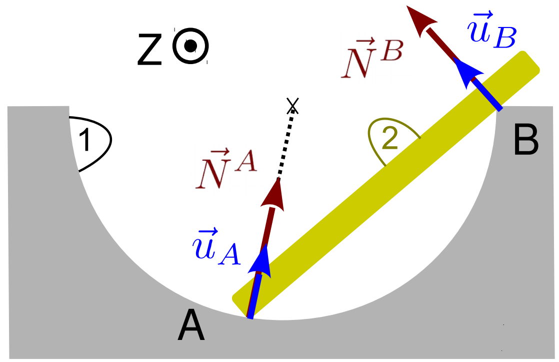


$$\vec{\Phi}^O_{21} = \Phi_x\,\vec{\imath} + \Phi_y\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{\Gamma}^O_{21} = \Gamma\,\vec{k}$$

3 componentes

Apoyos puntuales



$$\vec{N}^A = N^A\,\vec{u}_A$$

$$\vec{N}^B = N^B\,\vec{u}_B$$

2 componentes

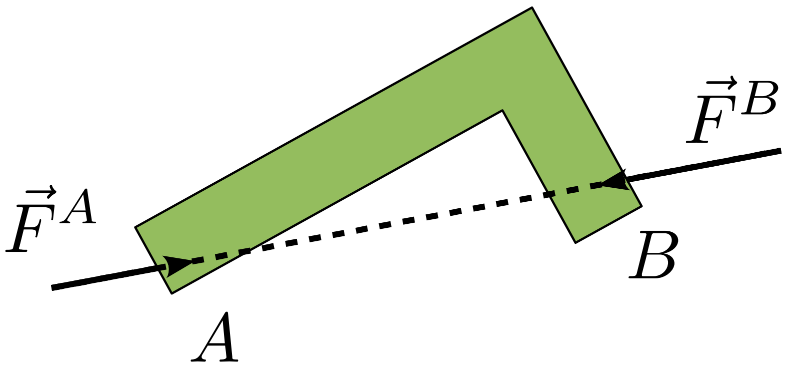
Índice

- Introducción
- Sólido rígido
- Sistemas de vectores deslizantes
- Condiciones de equilibrio estático
- Desvinculación de sólidos
- Teorema de las tres fuerzas
- Principio de fragmentación
- Sistemas hiperestáticos e impropiamente ligados
- Rozamiento seco
- Vuelco inminente
- Elasticidad

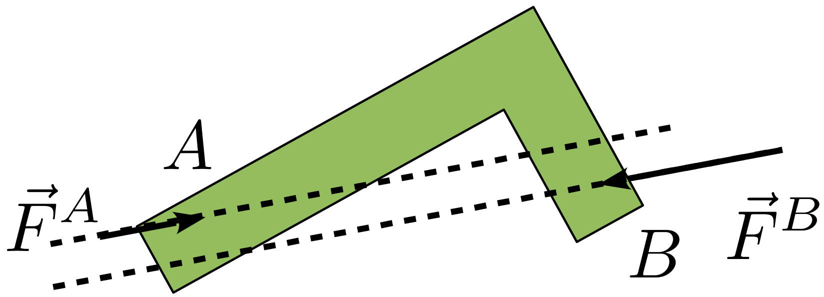
Sólido sometido a dos fuerzas

Dado un sólido rígido sometido a un sistema de dos fuerzas externas $\{(\mathbf{F}^A;\ \Delta_A),(\mathbf{F}^B;\ \Delta_B)\}$, es condición necesaria de equilibrio mecánico (aunque no suficiente) que las dos fuerzas tengan la misma magnitud y recta soporte, y sentido opuesto

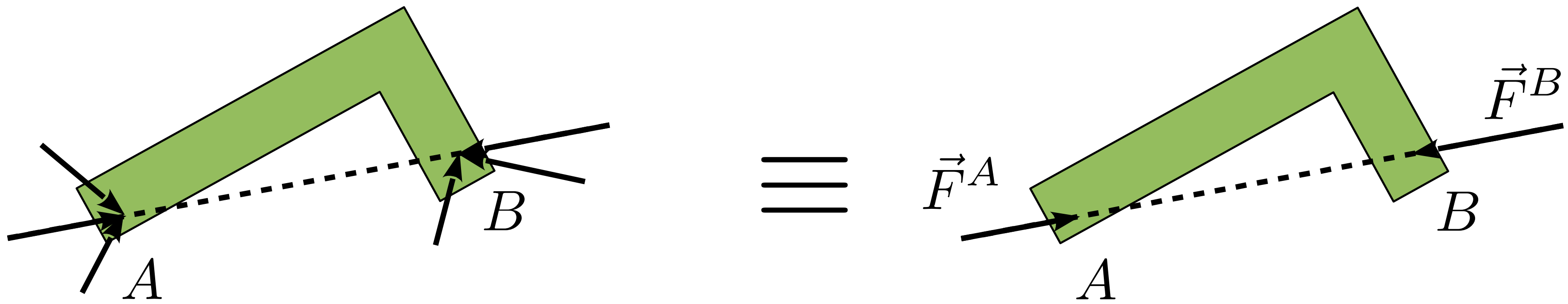
Equilibrio posible $\vec{M}^{\text{ext}} = \vec{0}$



Equilibrio imposible $\vec{M}_A^{\text{ext}} \neq \vec{0}$

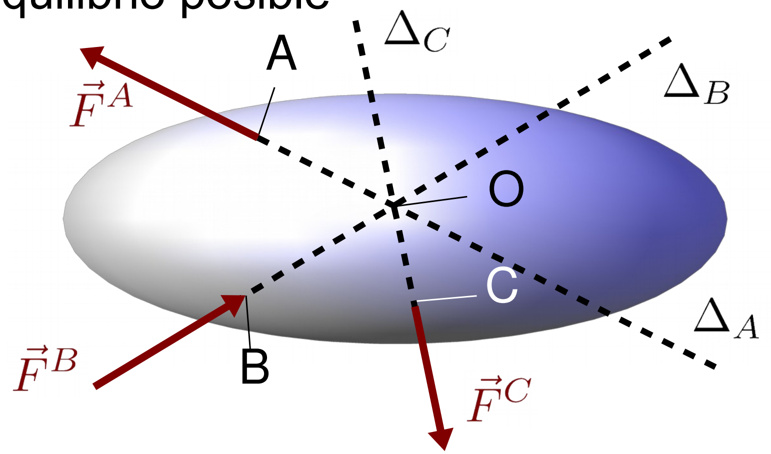


- Para que haya equilibrio además la resultante debe ser cero
- Si un conjunto de fuerzas se aplican en el mismo punto, pueden sustituirse por su resultante en ese mismo punto (Teorema de Varignon)



Dado un sólido rígido sometido a un sistema de tres fuerzas externas $\{(\mathbf{F}^A;\ \Delta_A),(\mathbf{F}^B;\ \Delta_B),(\mathbf{F}^C;\ \Delta_C)\}$ coplanarias y no paralelas, es condición necesaria (aunque no suficiente) de equilibrio mecánico que las tres fuerzas sean concurrentes

Equilibrio posible

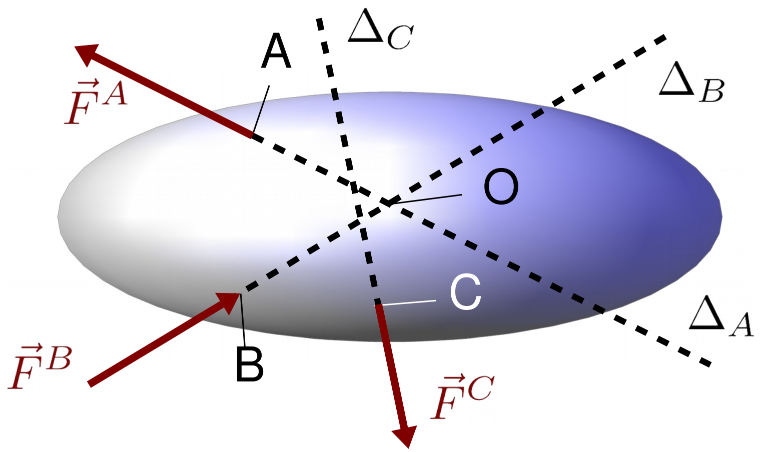


Demostración

$$O \equiv \Delta_A \cap \Delta_B$$

$$\text{Equilibrio} \Rightarrow \vec{M}^O = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}^O = \overrightarrow{OC} \times \vec{F}^C = \vec{0}$$

Equilibrio imposible



Para que haya equilibrio debe cumplirse también

$$\vec{F}^A + \vec{F}^B + \vec{F}^C = \vec{0}$$

Válido para fuerzas activas y f.r.v.

Índice

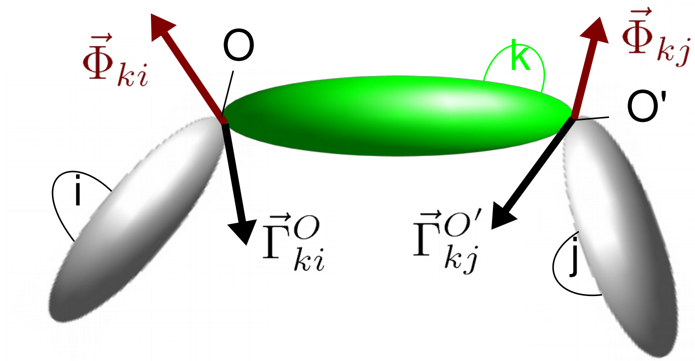
- Introducción
- Sólido rígido
- Sistemas de vectores deslizantes
- Condiciones de equilibrio estático
- Desvinculación de sólidos
- Teorema de las tres fuerzas
- Principio de fragmentación
- Sistemas hiperestáticos e impropiamente ligados
- Rozamiento seco
- Vuelco inminente
- Elasticidad

Cuando se realiza una partición de un sistema de puntos materiales, cada fragmento continúa en idéntico estado de equilibrio o movimiento si se sustituye el resto del sistema por las reacciones vinculares de contacto que ejerce sobre dicho fragmento

Cadena de sólidos

$\{\vec{\Phi}^{O}_{ki}\,;\,\vec{\Gamma}^{O}_{ki}\}$ par {ik}

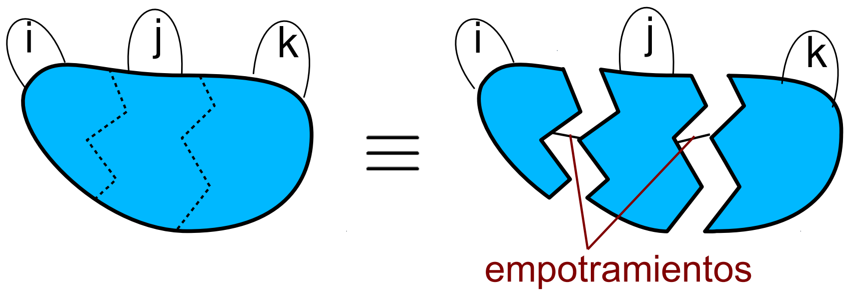
$\{\vec{\Phi}^{O'}_{kj}\,;\,\vec{\Gamma}^{O'}_{kj}\}$ par {kj}



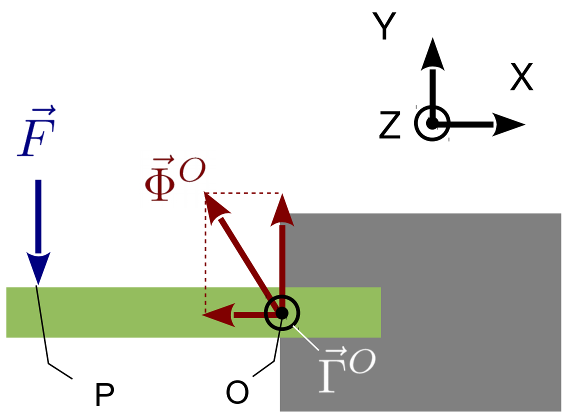
Principio de acción y reacción

$$\left|\begin{array}{l}\vec{\Phi}^{O}_{ik} = -\vec{\Phi}^{O}_{ki} \\ \vec{\Gamma}^{O}_{ik} = -\vec{\Gamma}^{O}_{ki}\end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l}\vec{\Phi}^{O'}_{jk} = -\vec{\Phi}^{O'}_{kj} \\ \vec{\Gamma}^{O'}_{jk} = -\vec{\Gamma}^{O'}_{kj}\end{array}\right.$$

Un sólido rígido puede considerarse como una cadena de fragmentos sólidos empotrados



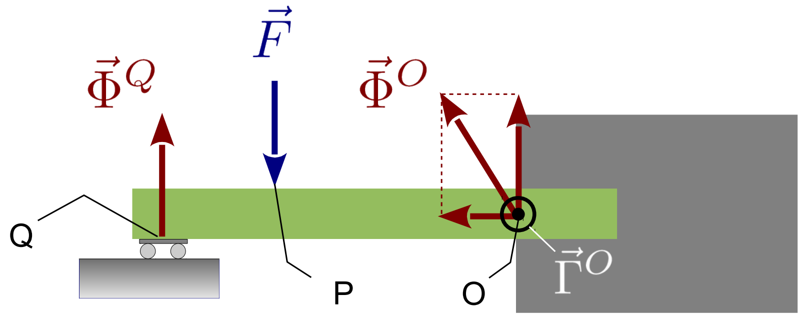
Índice



- En un problema bidimensional sólo obtenemos 3 ecuaciones
  - Incógnitas: $\Phi_x^O,\ \Phi_y^O,\ \Gamma^O$ (3)
  - Ecuaciones: $\vec{\Phi}^O + \vec{F} = \vec{0}$ (2)
    $\overrightarrow{OP} \times \vec{F} + \vec{\Gamma}^O = \vec{0}$ (1)

Sistema isostático

- Si se añade otra ligadura hay más incógnitas que ecuaciones



  - Incógnitas: $\Phi_x^O,\ \Phi_y^O,\ \Phi^Q,\ \Gamma^O$ (4)
  - Ecuaciones: $\vec{\Phi}^O + \vec{\Phi}^Q + \vec{F} = \vec{0}$ (2)
    $\overrightarrow{OP} \times \vec{F} + \overrightarrow{QP} \times \vec{\Phi}^Q + \vec{\Gamma}^O = \vec{0}$ (1)

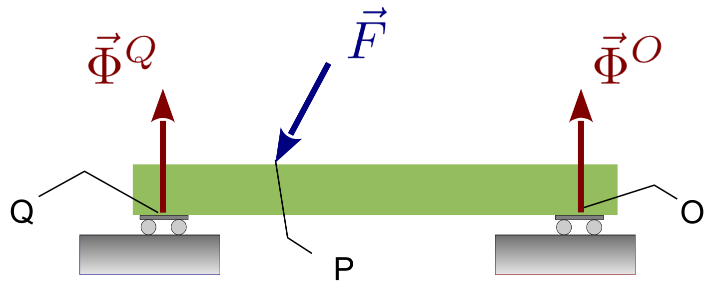
Sistema hiperestático

- Para resolver el problema hay que considerar la deformación del sólido
- Los vínculos hiperestáticos se usan para reforzar estructuras

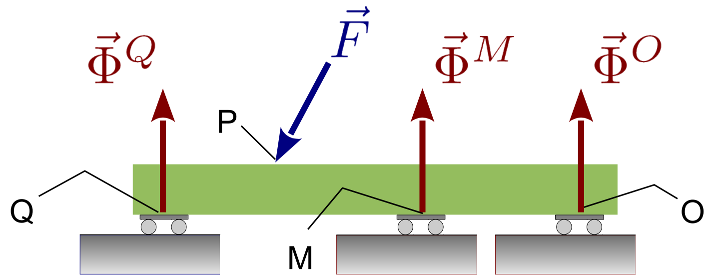
- Puede ocurrir que las ligaduras no garanticen el equilibrio
  - Los apoyos son lisos
  - Incógnitas $\quad \Phi^O,\ \Phi^O \qquad (2)$

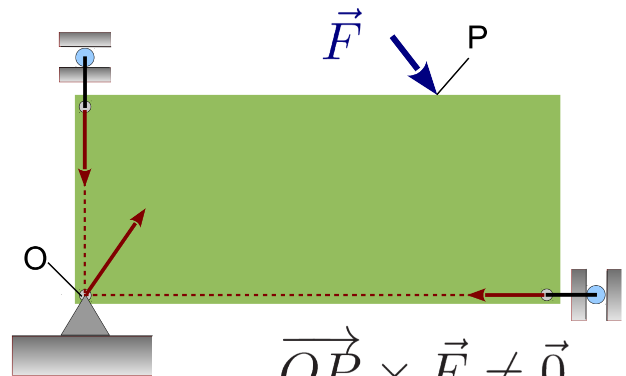
    .
  - Ecuaciones: $\vec{\Phi}^O + \vec{\Phi}^Q + \vec{F} = \vec{0} \qquad (2)$

    $\overrightarrow{OP} \times \vec{F} + \overrightarrow{OQ} \times \vec{\Phi}^Q = \vec{0} \qquad (1)$
  - Ocurre siempre que las reacciones en los apoyos sean paralelas o concurrentes, aunque haya tantas ligaduras como ecuaciones
  - Es necesario en estructuras móviles
    - Vagones de ferrocarril
    - Deformación térmica de puentes



Sistema impropiamente ligado





$\overrightarrow{OP} \times \vec{F} \neq \vec{0}$

$\vec{\Gamma}^O = \vec{0}$

- Introducción
- Sólido rígido
- Sistemas de vectores deslizantes
- Condiciones de equilibrio estático
- Desvinculación de sólidos
- Teorema de las tres fuerzas
- Principio de fragmentación
- Sistemas hiperestáticos e impropiamente ligados
- Rozamiento seco
- Vuelco inminente
- Elasticidad

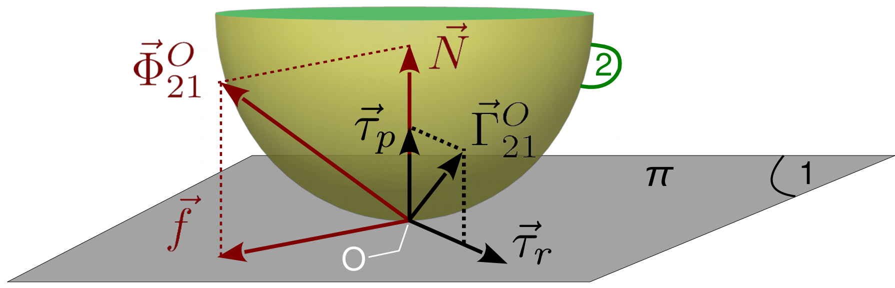
- Los contactos reales son siempre rugosos (con rozamiento) y superficiales (existe un área de contacto)
- Hay que añadir una fuerza y un par de rozamiento en la reducción vincular

$$\{\vec{\Phi}_{21}^{O} = \vec{N} + \vec{f}\,;\ \vec{\Gamma}_{21}^{O} = \vec{\tau}_p + \vec{\tau}_r\}$$

$\vec{N}$ Fuerza de reacción normal (1 comp)

$\vec{f}$ Fuerza de resistencia al deslizamiento (2 comp)

Paralela al plano tangente en el punto de contacto



$\vec{\tau}_p$ Par de resistencia al pivotamiento (1 comp)

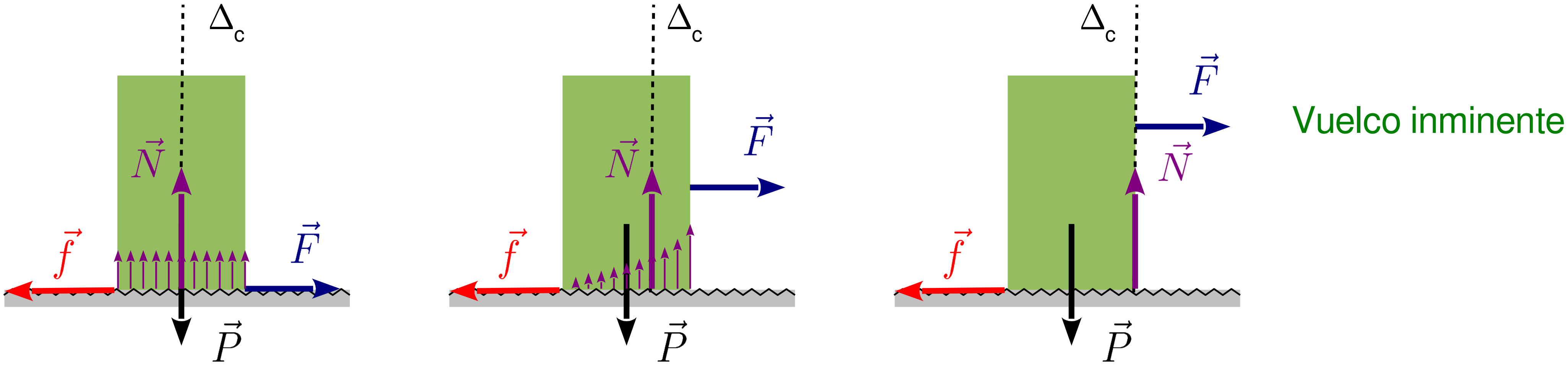
Perpendicular al plano tangente en el punto de contacto

$\vec{\tau}_r$ Par de resistencia a la rodadura (2 comp)

Paralelo al plano tangente en el punto de contacto

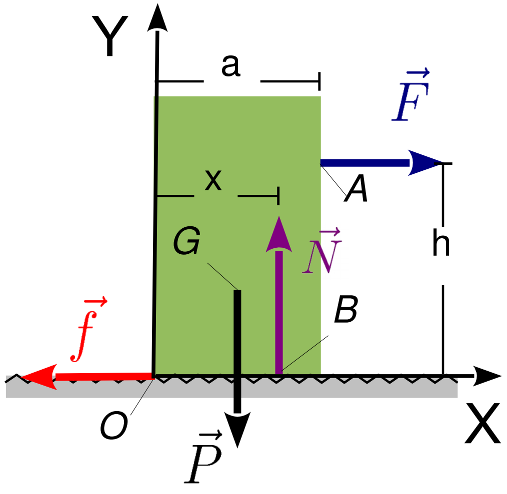
Índice

- Introducción
- Sólido rígido
- Sistemas de vectores deslizantes
- Condiciones de equilibrio estático
- Desvinculación de sólidos
- Teorema de las tres fuerzas
- Principio de fragmentación
- Sistemas hiperestáticos e impropiamente ligados
- Rozamiento seco
- Vuelco inminente
- Elasticidad



- Las fuerzas de reacción vincular se ajustan para impedir el vuelco
- El momento máximo de la reacción vincular ocurre cuando la resultante de las fuerzas normales está en los puntos extremos de contacto
- En situación de vuelco inminente la resultante de las f.r.v. está en los puntos de contacto
- Condición de equilibrio frente al vuelco

$$\vec{M}^O + \vec{\Gamma}^O = \vec{0} \qquad \forall O$$
$$|\vec{\Gamma}^O| \leq |\vec{\Gamma}^O_{max}|$$
$$\Longrightarrow |\vec{M}_O| \leq |\vec{\Gamma}^O_{max}|$$



Análisis de fuerzas y momentos

$$\vec{P} = -P\,\vec{\jmath} \qquad \overrightarrow{OG}\times\vec{P} = -\frac{aP}{2}\,\vec{k}$$

$$\vec{N} = N\,\vec{\jmath} \qquad \overrightarrow{OB}\times\vec{\Phi} = x\,\Phi\,\vec{k}$$

$$\vec{F} = F\,\vec{\imath} \qquad \overrightarrow{OA}\times\vec{F} = -h\,F\,\vec{k}$$

$$\vec{f} = -f\,\vec{\imath} \qquad \overrightarrow{OO}\times\vec{f} = 0\,\vec{k}$$

$$\vec{R} = F\,\vec{\imath} - P\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{\Phi} = -f\,\vec{\imath} + N\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{M}^O = -(Pa/2 + hF)\,\vec{k}$$

$$\vec{\Gamma}^O = xN\,\vec{k}$$

$$\vec{R} + \vec{\Phi} = \vec{0} \;\longrightarrow\; f = F,\quad N = P \;\longrightarrow\; |F| \leq \mu_e P$$

Condición de no deslizamiento

$$\vec{M}^O + \vec{\Gamma}^O = \vec{0} \;\longrightarrow\; x = \frac{a}{2} + \frac{F\,h}{P}$$

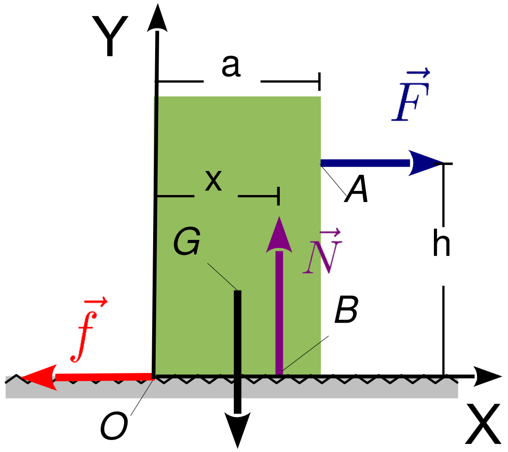
Determina la recta soporte de la normal para que haya equilibrio

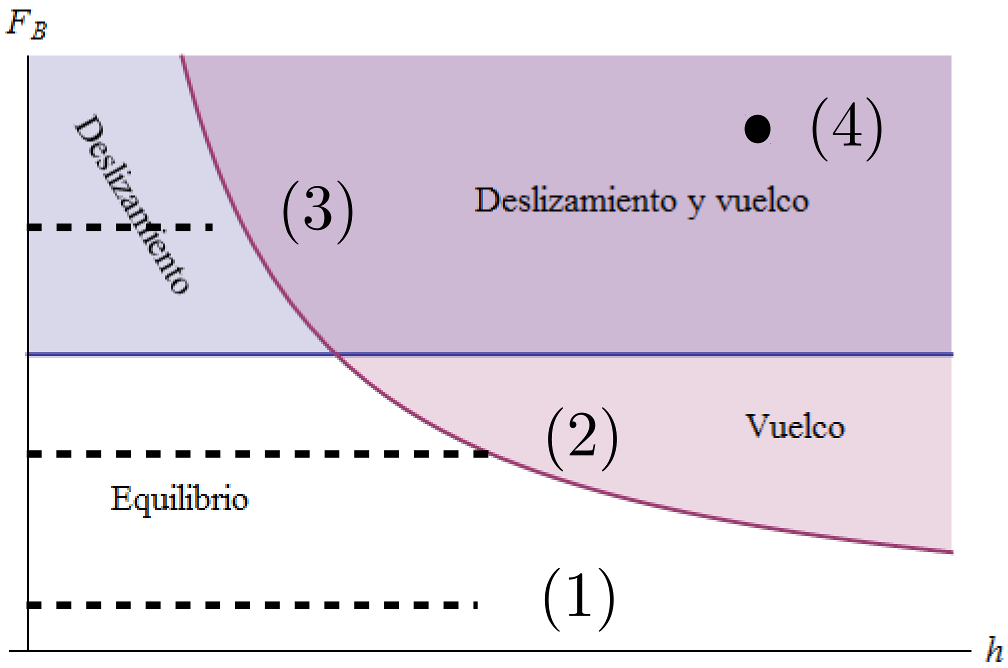
$x \geq 0 \;\longrightarrow$ Nunca vuelca hacia la izquierda

$x \leq a \;\longrightarrow\; |F| \leq \dfrac{aP}{2h}$ Condición de no vuelco hacia la derecha

El equilibrio se pierde con la condición que deja de cumplirse antes

¿Vuelca o desliza?





- Fuerza y/o altura pequeña → equilibrio (1)
- Fuerza moderada y gran altura → vuelca (2)
- Fuerza intensa y baja altura → desliza (3)
- Fuerza intensa y gran altura → desliza y vuelca (4)

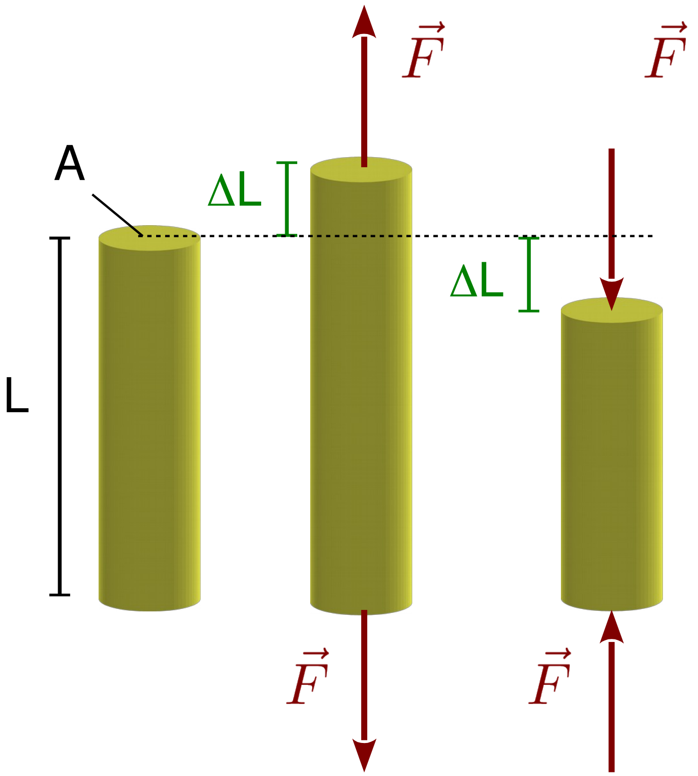
Índice

- Introducción
- Sólido rígido
- Sistemas de vectores deslizantes
- Condiciones de equilibrio estático
- Desvinculación de sólidos
- Teorema de las tres fuerzas
- Principio de fragmentación
- Sistemas hiperestáticos e impropiamente ligados
- Rozamiento seco
- Vuelco inminente
- Elasticidad

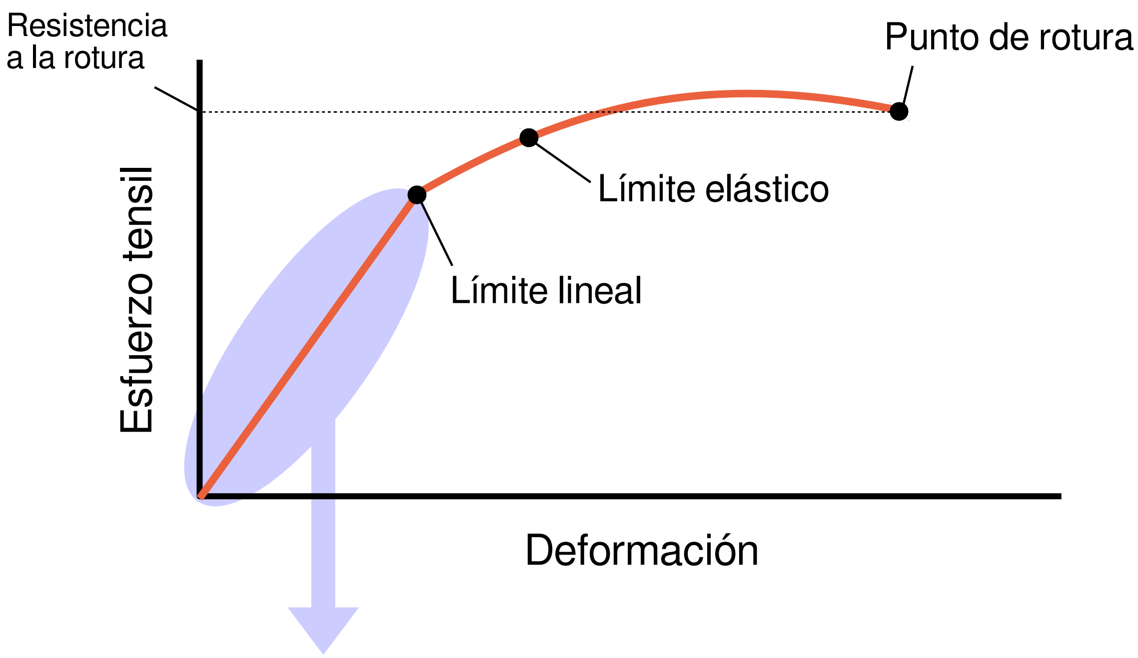
Elasticidad

- Los sólidos reales cambian su forma al ser sometidos a fuerzas externas
- Un sólido elástico recupera su forma original cuando la fuerza externa cesa
- La mayoría de los materiales son elásticos hasta un cierto punto: el límite elástico

Deformación = $\Delta L/L$ Esfuerzo tensil = $|\vec{F}|/A$



Tracción Compresión



$$Y = \frac{\text{esfuerzo tensil}}{\text{deformación}} = \frac{|\vec{F}|/A}{\Delta L/L}$$ Módulo de Young

Módulo de Young

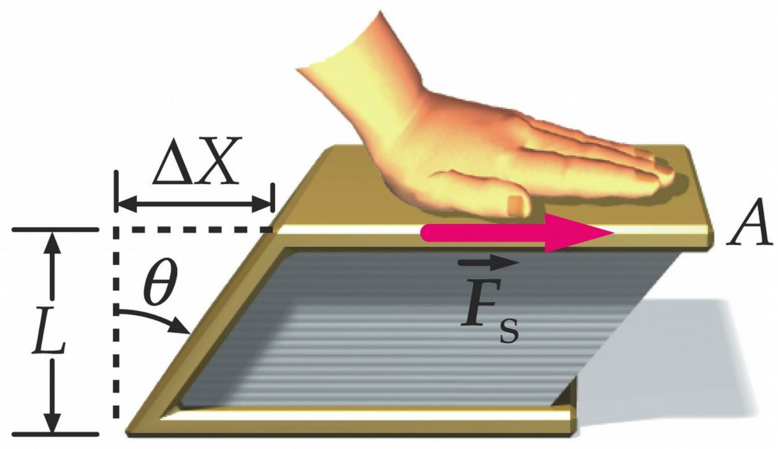
Material	Y 10^9 N/m^2	Resistencia a la tracción, 10^6 N/m^2	Resistencia a la compresión, 10^6 N/m^2
Acero	200	520	520
Aluminio	70	90	
Cobre	110	230	
Hierro (forjado)	190	390	
Hormigón	23	2	17
Hueso			
Tracción	16	200	
Compresión	9		270
Latón	90	370	
Plomo	16	12	

- Cuanto mayor sea el módulo de Young menos se deforma el material
- La resistencia a la tracción es la tensión a la que se rompe bajo tracción
  - La resistencia a la tracción y el módulo de Young son dos cosas distintas
- La resistencia a la compresión es la tensión a la que se rompe bajo compresión
- En muchos materiales el módulo de Young para tracción y compresión es similar

- Una fuerza aplicada tangencialmente a la superficie se llama de cizalladura

- Esfuerzo de cizalladura = $\dfrac{|\vec{F}_S|}{A}$

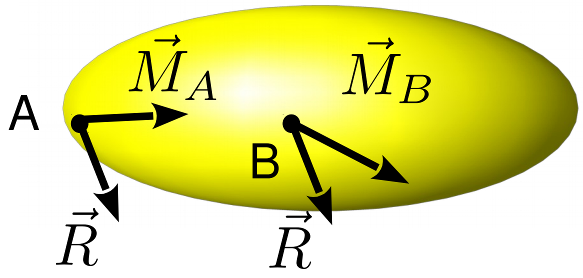
- Deformación de cizalladura = $\dfrac{\Delta X}{L} = \tan\theta$



- Módulo de cizalladura (o de torsión)

$$M_c = \frac{\text{esfuerzo de cizalladura}}{\text{deformación de cizalladura}} = \frac{|\vec{F}_S|/A}{\Delta X/L} = \frac{|\vec{F}_S|/A}{\tan\theta}$$

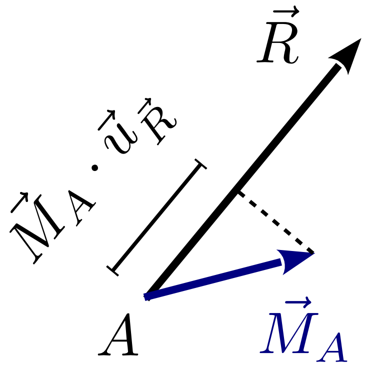
  - Es aproximadamente constante para tensiones pequeñas
    - Acero : 84 x 10^9 N/m^2
    - Cobre : 42 x 10^9 N/m^2

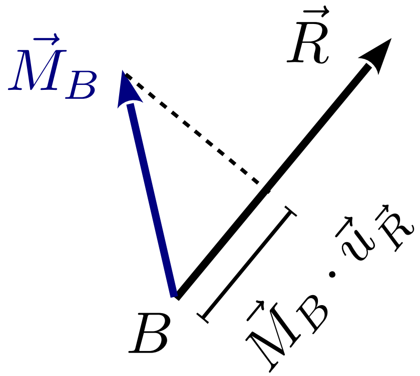


- Al cambiar el punto de reducción de un s.v.d., cambia el momento en el punto
- Esto define un **campo de momentos**
- Los momentos en dos puntos están relacionados a través de la ecuación del campo de momentos

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{R} \times \overrightarrow{AB}$$

- Hay dos invariantes importantes (cosas que valen lo mismo en cualquier punto de reducción)
  - Invariante vectorial: $\vec{R}$
  - Invariante escalar: $\vec{M}_A \cdot \vec{R}$

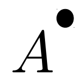




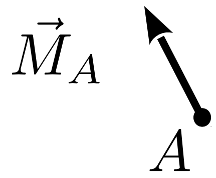
- Dem $\vec{M}_B \cdot \vec{R} = (\vec{M}_A + \vec{R} \times \overrightarrow{AB}) \cdot \vec{R} = \vec{M}_A \cdot \vec{R} + \underbrace{(\vec{R} \times \overrightarrow{AB}) \cdot \vec{R}}_{0} = \vec{M}_A \cdot \vec{R}$

Clasificación de s.v.d.

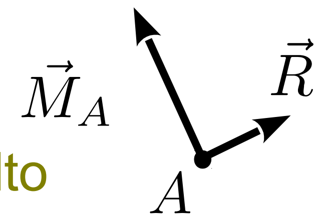
- Los s.v.d. se pueden clasificar en términos de la nulidad o no de los dos invariantes
  - Tipo I $\vec{R}=\vec{0},\quad \vec{M}_A=\vec{0}$
    - Se llama sistema nulo



  - Tipo II $\vec{R}=\vec{0},\quad \vec{M}_A\neq\vec{0}$
    - Se puede representar por un par de fuerzas



  - Tipo III $\vec{R}\neq\vec{0},\quad \vec{M}_A\cdot\vec{R}=0$
    - Existe un punto en el cual la reducción consta de un sólo vector suelto
      - Ej: Vectores concurrentes en el punto de concurrencia



  - Tipo IV $\vec{R}\neq\vec{0},\quad \vec{M}_A\cdot\vec{R}\neq 0$
    - En todos los puntos la reducción consta de un vector suelto y un par