Tema 5: Dinámica de la partícula

FISICA I, 1º, Grado en Ingeniería Civil

Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

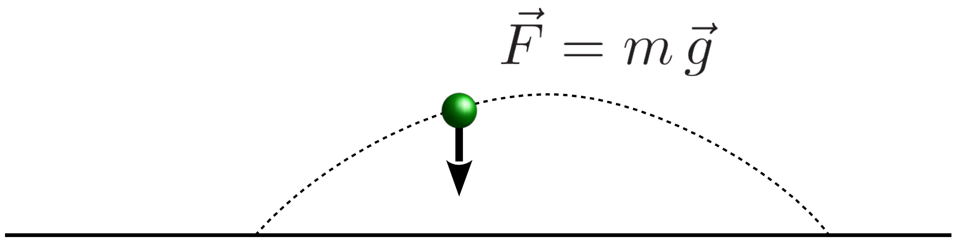
Universidad de Sevilla

Índice

Introducción

- La Dinámica estudia las causas que originan el movimiento de los cuerpos
- Junto con la Cinemática, permite determinar los movimientos de los cuerpos
- Estas causas se caracterizan con la magnitud física de fuerza
- La masa de un cuerpo determina la "intensidad" con que una fuerza afecta a su estado de movimiento

- Es la causa que cambia el estado de reposo o movimiento de un cuerpo, o de producir en él estados de tensión
- Es vectorial: magnitud, dirección y sentido
- En general depende del tiempo, la posición y la velocidad $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$
- Puede provocar diferentes efectos
  - Acelerar un cuerpo: empujar un coche
  - Deformar un cuerpo: estirar un muelle
  - Provocar una rotación: rueda girando
  - No producir ningún efecto (aparentemente): empujar un edificio
- La representación de una fuerza es un vector



Índice

- Introducción
- Leyes de Newton
- Fuerzas activas y de reacción vincular
- Estática del punto
- Fuerzas de rozamiento: Leyes de Coulomb
- Dinámica del punto material
- Coordenadas polares
- Rozamiento dependiente de la velocidad: velocidad terminal

- Fueron enunciadas por Isaac Newton en 1687: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*

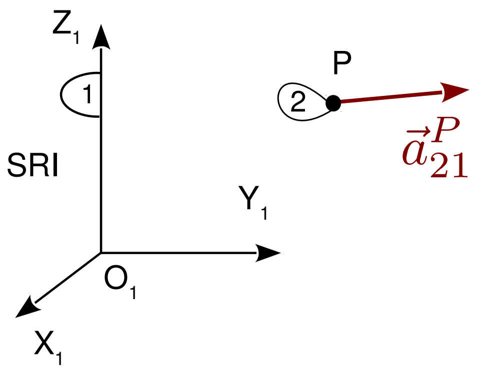
- Primera Ley o Ley de Inercia
  - Introduce el concepto de inercia y sistema de referencia inercial

- Segunda Ley
  - Relaciona fuerza, masa y aceleración

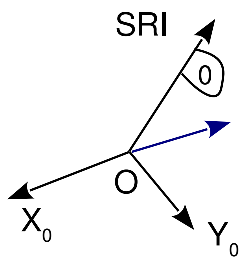
- Tercera Ley o Principio de acción y reacción
  - Relaciona las fuerzas mutuas que ejercen los cuerpos entre sí
  - Esta relacionada con la conservación de la cantidad de movimiento

Todo punto material libre, no sometido a ninguna interacción, se mantiene indefinidamente en estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme respecto a un sistema de referencia inercial

- Un sistema de referencia inercial (SRI) es un sistema en reposo o con velocidad constante
  - Su aceleración es cero
    - Su rotación es cero
  - Un sistema que se traslada con velocidad uniforme respecto a un SRI también es un SRI
- Todos los SRI miden la misma aceleración para un punto material cualquiera



$$\vec{a}^{\,P}_{21} = \vec{a}^{\,P}_{20}$$



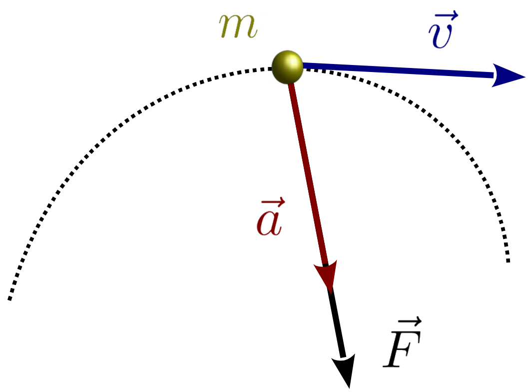
$$\vec{v}^{\,\mathrm{tras}}_{01} = \overrightarrow{\mathrm{cte}}$$

$$\vec{a}^{\,P}_{21} = \vec{a}^{\,P}_{20}$$

Todo punto material sometido a una fuerza experimenta una aceleración en la misma dirección y sentido en que actúa la fuerza y de módulo proporcional al módulo de la fuerza

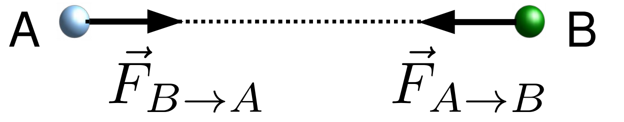
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

- La magnitud m es la masa inercial de la partícula
  - Mide la resistencia de la partícula a cambiar su estado de movimiento (su inercia)
- La fuerza se mide en Newtons en el S.I. : 1 N = 1 kg m s^{-2}
- Se puede leer de 3 maneras diferentes
  - Si se conoce la fuerza y la masa proporciona una ecuación diferencial para describir el movimiento
  - Si se conoce la masa y la aceleración permite determinar la fuerza
  - Si se conoce la fuerza y la aceleración permite determinar la masa inercial

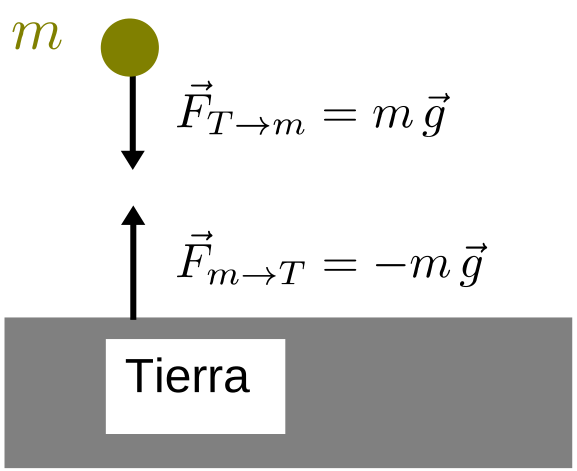


Si un punto material A ejerce una fuerza (**F**$_{A\rightarrow B}$) sobre otro punto material B, entonces B ejerce otra fuerza sobre A (**F**$_{B\rightarrow A}$) de igual módulo y dirección, pero de sentido contrario

$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$$



- Cada fuerza se aplica en cuerpos diferentes
- La aceleración que adquiere cada partícula depende de su masa inercial



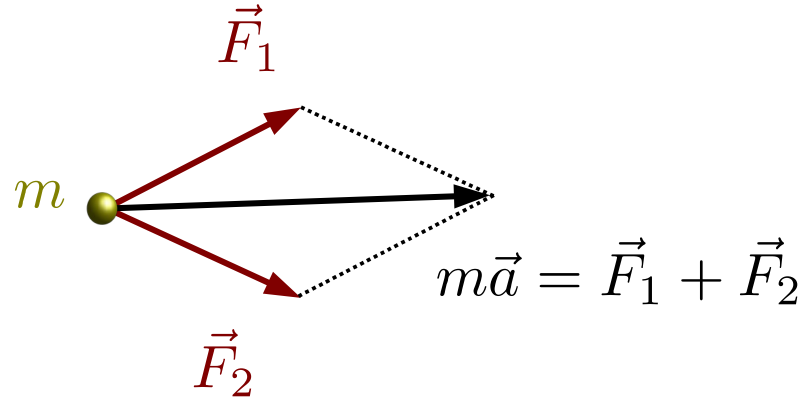
Aceleración de la masa $\qquad g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$

Aceleración de la Tierra $\qquad a_T = \dfrac{F_{m\to T}}{m_T} = g\,\dfrac{m}{m_T}$

$$\left.\begin{array}{l} m = 1\,\mathrm{kg} \\ m_T \simeq 6\times 10^{24}\,\mathrm{kg}\end{array}\right| \Longrightarrow \quad a_T \simeq 2\times 10^{-25}\,\mathrm{m/s^2}$$

Si sobre un mismo punto material actúan dos fuerzas simultáneamente, la aceleración que adquiere es la suma vectorial de las aceleraciones que le comunicarían cada una de las fuerzas por separado

$$\vec{a} = \frac{1}{m}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$



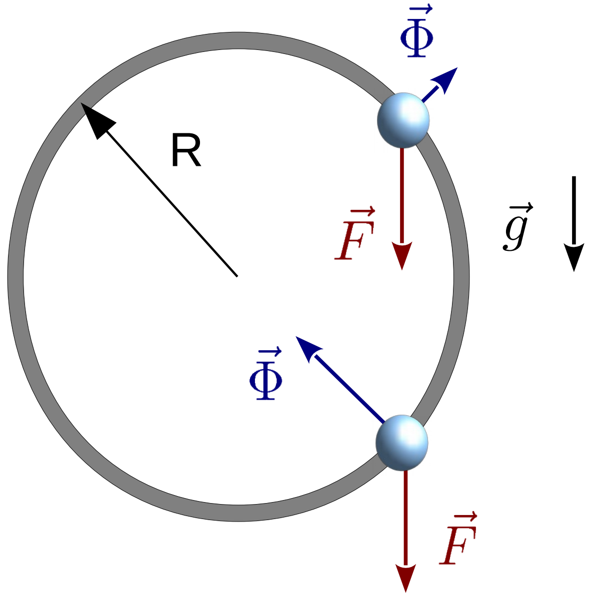
- Cuando la partícula está sometida a *n* fuerzas se generaliza

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}_{neta}$$

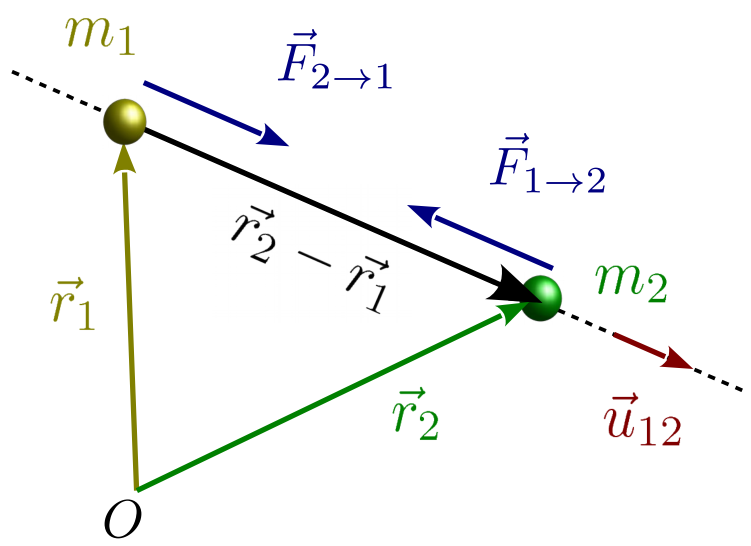
$$\vec{F}_{neta} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Índice

- Fuerzas activas $\vec{F}_i$
  - Son conocidas antes de resolver el problema
  - Ejemplos de fuerzas activas
    - Fuerza gravitatoria
    - Fuerza de un muelle
    - Fuerzas eléctricas y magnéticas
- Fuerzas de reacción vincular (f.r.v.) $\vec{\Phi}_i$
  - Son responsables de que se cumplan las ligaduras
  - Son incógnitas del problema: se adaptan a las fuerzas activas
  - Vínculo liso: la fuerza vincular es perpendicular al vínculo
  - Vínculo rugoso: la fuerza vincular es paralela al vínculo
  - Ejemplos: plano inclinado, cuerda tensa, partícula en un aro



$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^2}\vec{u}_{12} = -G\,m_1 m_2\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}}$$



$$\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}$$

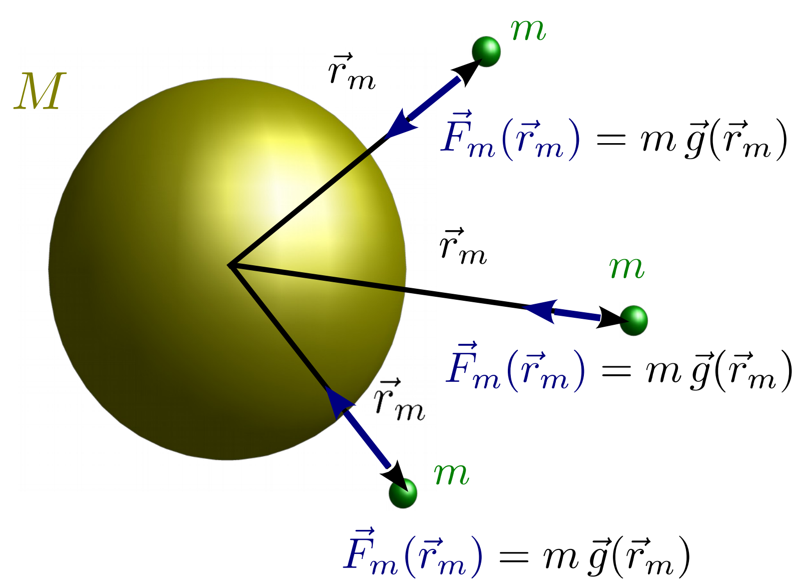
- Propiedades
  - Siempre atractiva
  - Proporcional al producto de las masas
  - Inversamente proporcional al cuadrado de la distancia
  - Dirigida en la dirección que une las dos masas
  - Constante de gravitación universal

$$G = 6.673\times 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$$

  - Cumple la tercera ley

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$$

$$\vec{F}_m = -G\,m\,M\,\frac{\vec{r}_m}{|\vec{r}_m|^3} = m\,\vec{g}(\vec{r}_m)$$



- A cada punto del espacio alrededor de la masa *M* se le asigna un vector ***g*** (aceleración de la gravedad)

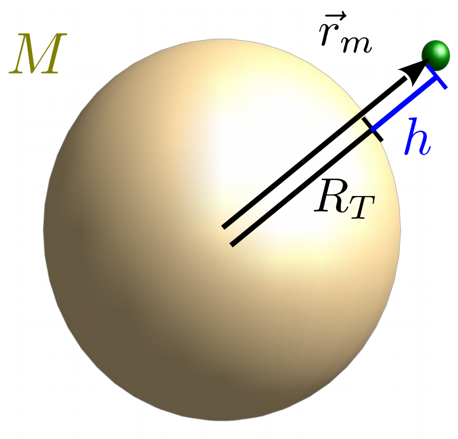
$$\vec{g}(\vec{r}_m) = -G\,M\,\frac{\vec{r}_m}{|\vec{r}_m|^3}$$

- La fuerza sobre una masa en un punto alrededor de la masa *M* es

$$\boxed{\vec{F}_m = m\,\vec{g}(\vec{r}_m)}$$

- Se dice que la masa *M* crea un campo de fuerzas en el espacio

- En los puntos cerca de la superficie la aceleración de la gravedad es uniforme



$$|\vec{g}(\vec{r}_m)| = G\,M\frac{1}{|\vec{r}_m|^2} = \frac{G\,M}{R_T^2}\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^{-2} \qquad \frac{h}{R_T} \ll 1$$

$$|\vec{r}_m| = R_T + h = R_T\left(1+\frac{h}{R_T}\right)$$

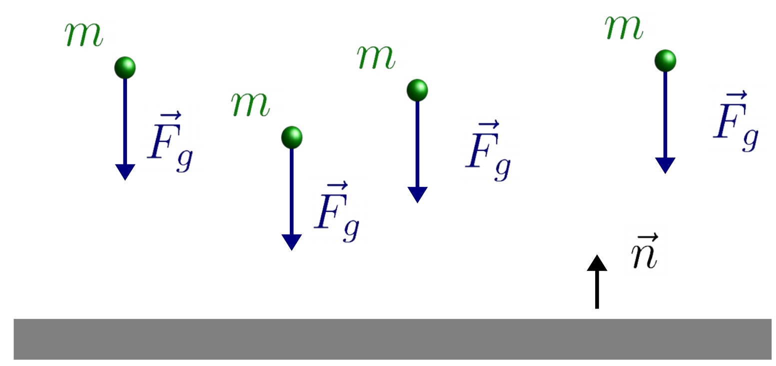
- Usando Taylor $(1+\varepsilon)^n \simeq 1 + n\,\varepsilon \quad \text{si} \quad \varepsilon \ll 1$

$$|\vec{g}(\vec{r}_m)| \simeq \frac{G\,M}{R_T^2}\left(1-\frac{2h}{R_T}\right) \simeq \frac{G\,M}{R_T^2}$$

- Cerca de la superficie la dirección también es uniforme

$$\boxed{\vec{F}_g = m\,\vec{g} = -mg\,\vec{n}}$$

$$g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$$



- Útil para simplificar la expresión de una función complicada en el entorno de un punto

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}\,f'(0)\,x + \frac{1}{2!}\,f''(0)\,x^2 + \frac{1}{3!}\,f^{(3)}(0)\,x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(0)\,x^n + \ldots$$

- Si x es pequeño, se pueden despreciar términos superiores

Orden 0: una constante

$$f(x) \simeq f(0)$$

Orden 1: una recta

$$f(x) \simeq f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)\,x$$

$$\simeq A + B\,x$$

Orden 2: una parábola

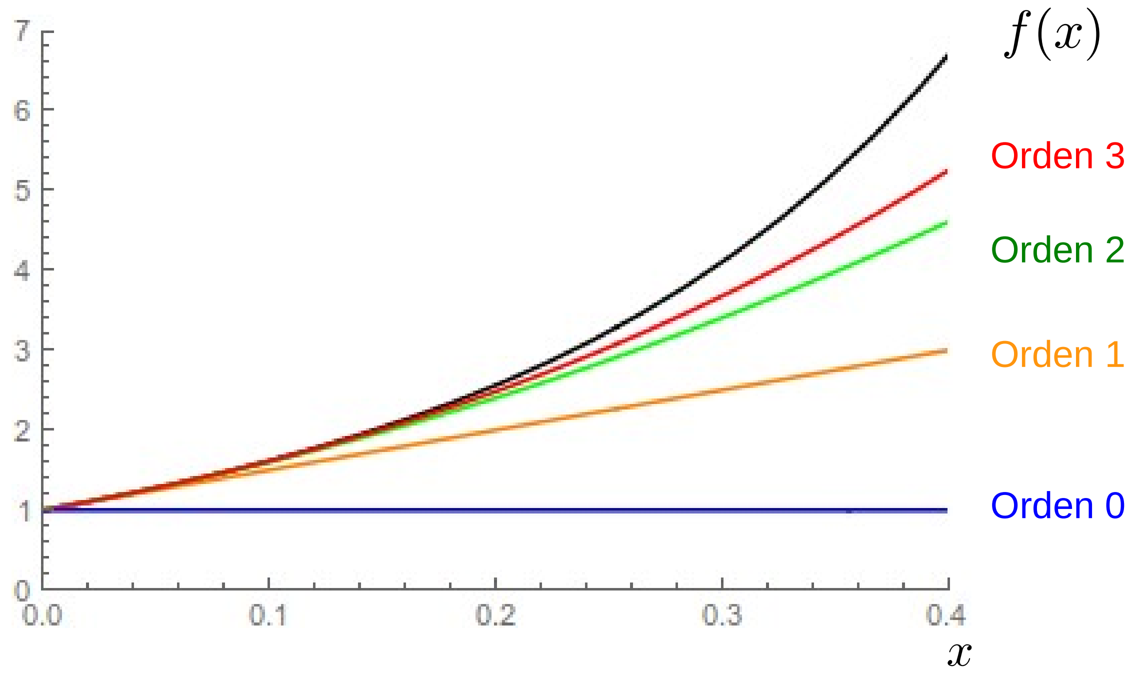
$$f(x) \simeq f(0) + \frac{1}{1!}\,f'(0)\,x + \frac{1}{2!}\,f''(0)\,x^2$$

$$\simeq A + B\,x + C\,x^2$$

Orden 3: un polinomio cúbico

$$f(x) \simeq f(0) + \frac{1}{1!}\,f'(0)\,x + \frac{1}{2!}\,f''(0)\,x^2 + \frac{1}{3!}\,f^{(3)}(0)\,x^3$$

$$\simeq A + B\,x + C\,x^2 + D\,x^3$$

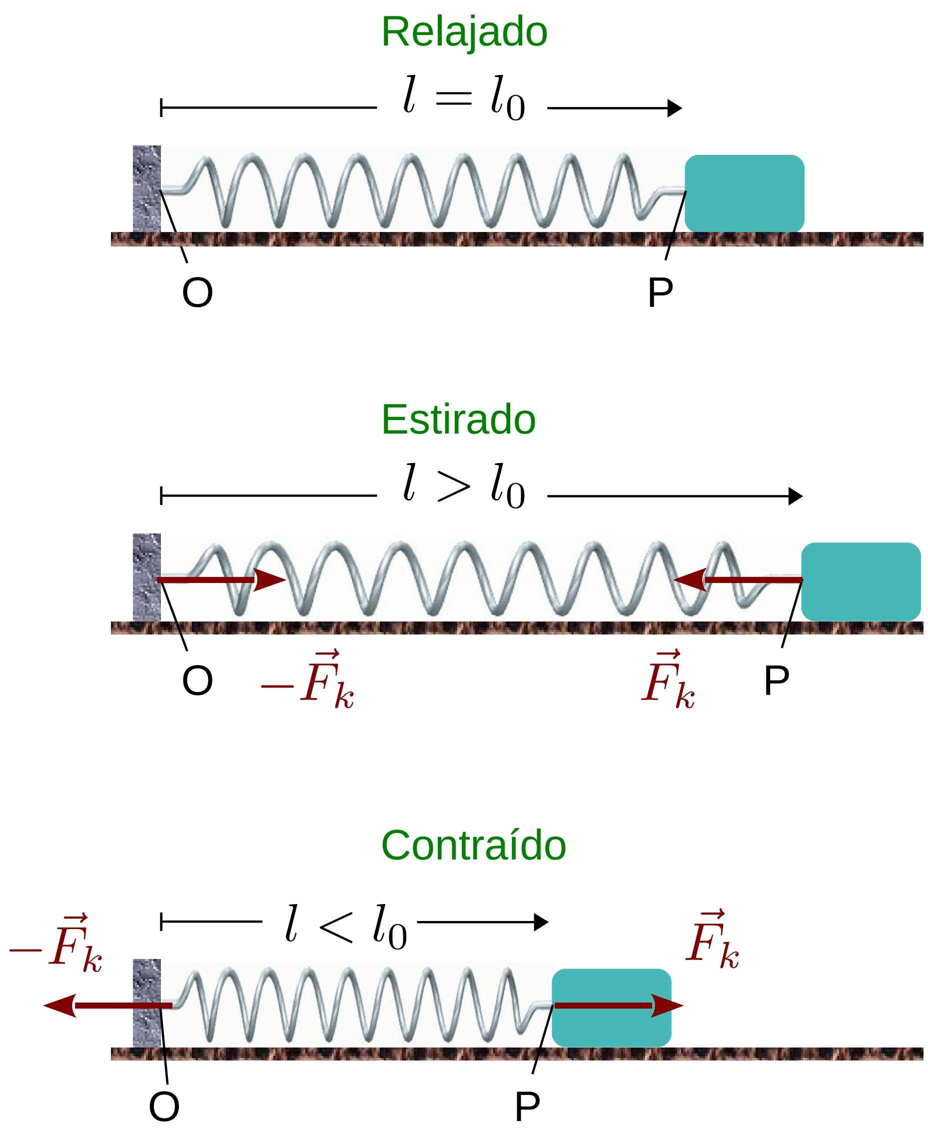


- Ley de Hooke: $$\boxed{\vec{F}_k = -k\,(l - l_0)\,\vec{u}_{OP}}$$

  - k es la constante elástica (N/m)
  - l_0 es la longitud natural
  - l es la elongación
  - Si la longitud natural es cero

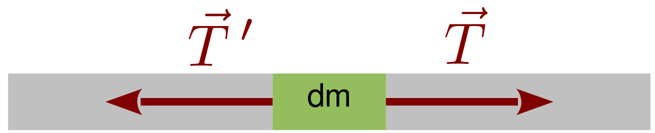
$$\vec{F}_k = -k\,l\,\vec{u}_{OP} = -k\,\overrightarrow{OP}$$

  - Un muelle calibrado permite medir la intensidad de una fuerza (Dinamómetro)



Fuerzas de contacto: sólidos y cuerdas

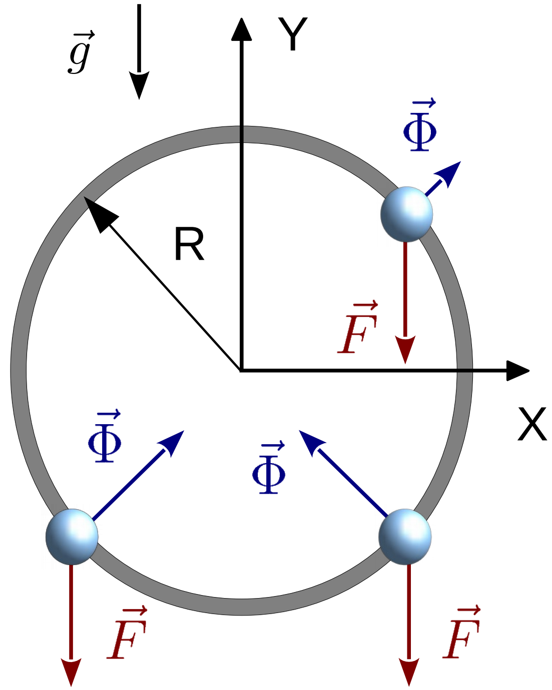
- Cuando un cuerpo empuja a otro, la interacción se modela con fuerzas de contacto
  - Estas fuerzas son de origen electromagnético
  - Pueden ser activas o de reacción vincular
    - Activas: mano empujando una caja
    - Reacción vincular: fuerza normal de una mesa sobre una caja
  - Si los cuerpos son sólidos rígidos no se deforman
- Una cuerda puede usarse para tirar de un objeto, pero no para empujarlo
  - Puede ser fuerza activa o de reacción vincular
  - La tensión de una cuerda es el módulo de la fuerza que un trozo de cuerda ejerce sobre otro
  - Si la masa de la cuerda es despreciable la tensión es la misma en todos los puntos de la cuerda



$$\mathrm{d}m\,\vec{a} = \vec{T} + \vec{T}\,'$$

$$\mathrm{d}m = 0 \Longrightarrow \vec{T} = -\vec{T}\,' \Longrightarrow |\vec{T}| = \mathrm{cte}$$

- Punto sujeto a vínculos: limitaciones impuestas a su posición o movimiento
  - Bilaterales: cumplen una ecuación de ligadura
    - Partícula engarzada en aro
  - Unilaterales: sólo actúan en un sentido
    - Partícula sobre una mesa sin adhesión, cuerdas
  - Geométrico: no aparece explícitamente la velocidad
    - Partícula engarzada en aro
  - Cinemático: aparece explícitamente la velocidad
    - Rodadura sin deslizamiento
- Grados de libertad r = 3- h (h es el número de vínculos)
- Las fuerzas de reacción vincular (f.r.v.), $\mathbf{\Phi}_i$, hacen que el vínculo se cumpla
  - Se adaptan a las fuerzas activas: no son completamente conocidas a priori.



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$r = 3 - 2 = 1$$

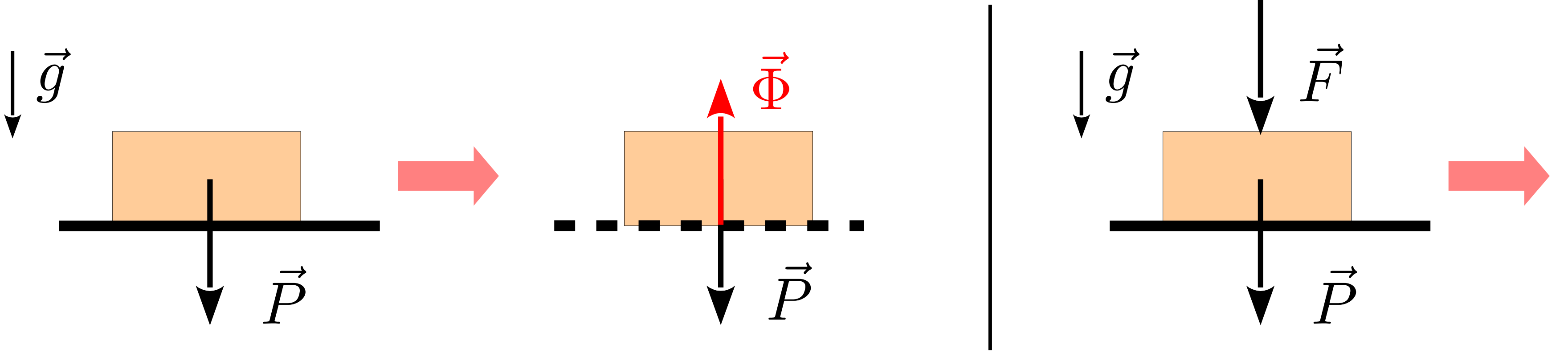
Fuerzas vinculares: Principio de liberación, diagrámas de sólido libre

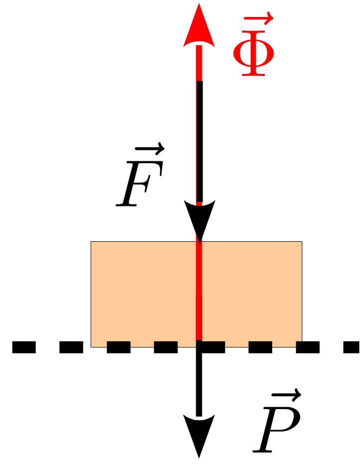
Todo punto material sometido a vínculos puede ser tratado como si estuviese libre de ellos si se sustituyen dichos vínculos por fuerzas de reacción vincular

Diagrama de cuerpo libre

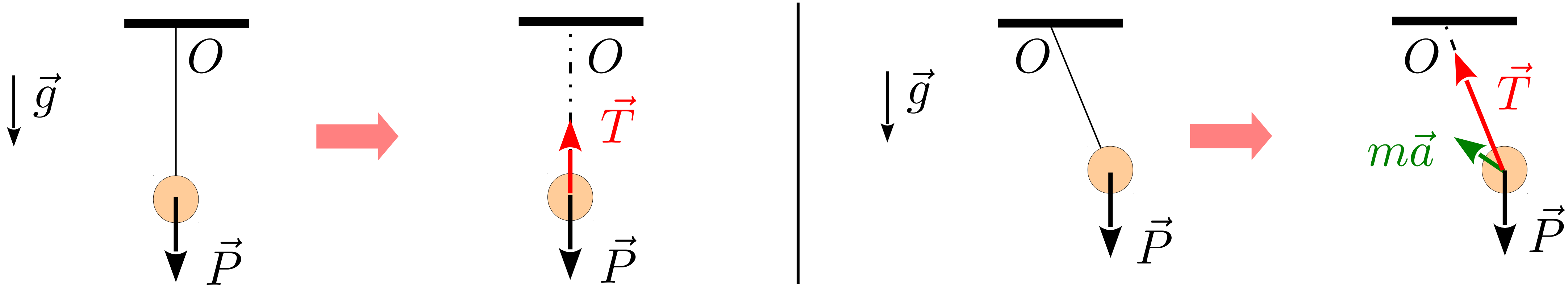
- Las f.r.v. cumplen la misma función que los vínculos sustituidos: se oponen a cualquier estado de reposo o movimiento incompatible con ellos
- Son perpendiculares a los vínculos geométricos cuando el vínculo es liso
- Las f.r.v. son incógnitas del problema. Son desconocidas a priori
- Para construir el diagrama de cuerpo libre hay que identificar **todas** las fuerzas que actúan sobre el cuerpo: activas y de reacción vincular

- Fuerza normal
  - El vínculo es que el bloque no atraviese la superficie horizontal





- Tensión de una cuerda en un péndulo
  - El vínculo es que la distancia entre la masa y el punto O no sea mayor que la longitud de la cuerda (unilateral)



Índice

Equilibrio estático del punto

- Equilibrio mecánico en un S.R.I. $\vec{v}(t) = 0 \quad \forall t \Longrightarrow \vec{a}(t) = 0$
- La suma neta de fuerzas sobre la partícula debe ser nula

$$\boxed{\vec{F}_{neta} = \vec{0}}$$

- Punto libre: sólo hay fuerzas aplicadas

$$\vec{F}_{neta} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}$$

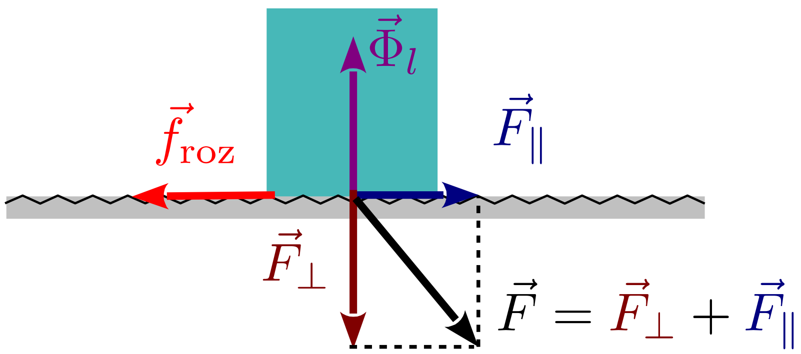
- Punto vinculado: hay que desvincular la partícula aplicando el Principio de Liberación

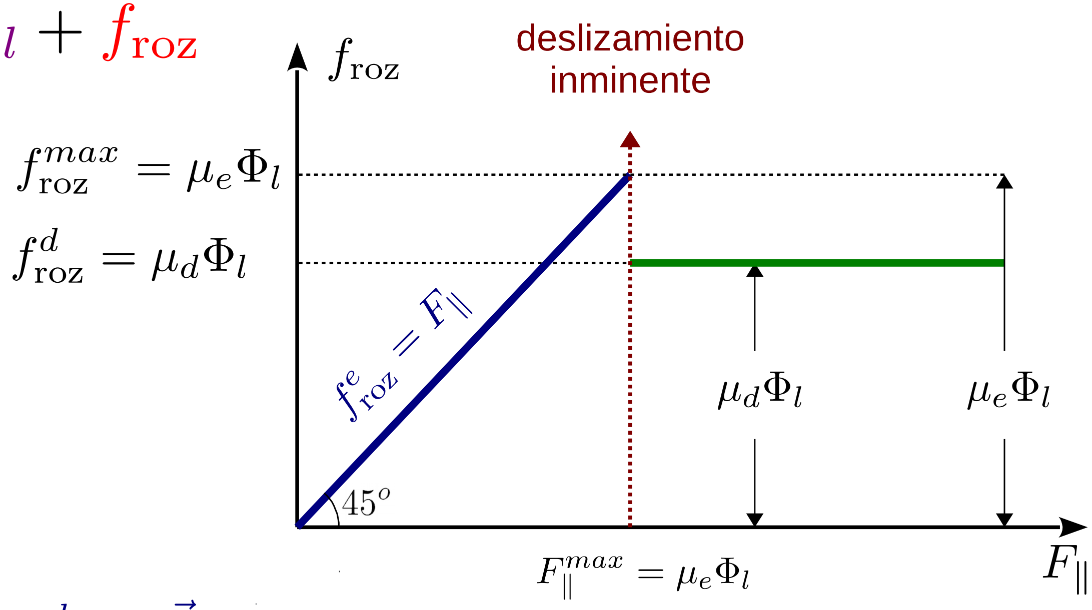
$$\vec{F}_{neta} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{m} \vec{\Phi}_j = \vec{0}$$

  - Vínculo liso: sabemos que la fuerza vincular es normal al vínculo, pero su magnitud es una incógnita
  - Vínculo rugoso: además de la fuerza vincular normal al vínculo, hay que añadir una fuerza de rozamiento tangente al vínculo

Índice

- Fuerza activa $\vec{F} = \vec{F}_\perp + \vec{F}_\parallel$
- Fuerza de contacto del suelo $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_l + \vec{f}_{\mathrm{roz}}$





región estática región dinámica

$$\vec{f}_{\mathrm{roz}} = \begin{cases} -\vec{F}_\parallel & \text{si } 0 \leq F_\parallel \leq F_\parallel^{max} = \mu_e \Phi_l \text{ y } \vec{v}_{21}^{des} = \vec{0} \\ -\mu_d \Phi_l \dfrac{\vec{v}_{21}^{des}}{|\vec{v}_{21}^{des}|} & \text{si } \quad \vec{v}_{21}^{des} \neq \vec{0} \end{cases}$$

- Región estática

  No se produce deslizamiento

  (vínculo prohibitivo)

- Región dinámica

  Se produce deslizamiento (vinculo resistivo)

  Disipación de energía y deterioro de las superficies

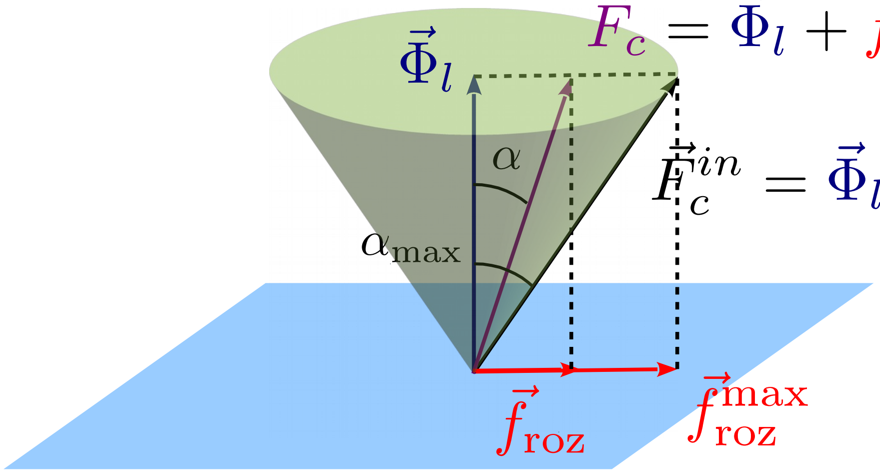
- Situación estática
  - El módulo de la fuerza de rozamiento estático es una incógnita del problema
  - El módulo máximo de la fuerza de rozamiento estático es proporcional a la fuerza normal
  - El módulo máximo de la fuerza de rozamiento no depende del área de la superficie de contacto

$$|\vec{f}_{roz}| \leq |\vec{f}^{max}_{roz}| = \mu_e\,|\vec{\Phi}_l|$$

- μ_e es el coeficiente de rozamiento estático, depende de la naturaleza de las superficies de contacto
- El sentido de la fuerza de rozamiento se opone a la tendencia del movimiento relativo entre las superficies
- Cuando consideramos una superficie, la fuerza de contacto total de la superficie sobre la partícula tiene que estar dentro del **cono de rozamiento**

$$\vec{F}_c = \vec{\Phi}_l + \vec{f}_{\mathrm{roz}}$$

$$\vec{F}_c^{lim} = \vec{\Phi}_l + \vec{f}^{\mathrm{max}}_{\mathrm{roz}}$$



$$\tan\alpha_{\mathrm{max}} = \frac{|\vec{f}^{\mathrm{max}}_{\mathrm{roz}}|}{|\vec{\Phi}_l|} = \mu_e$$

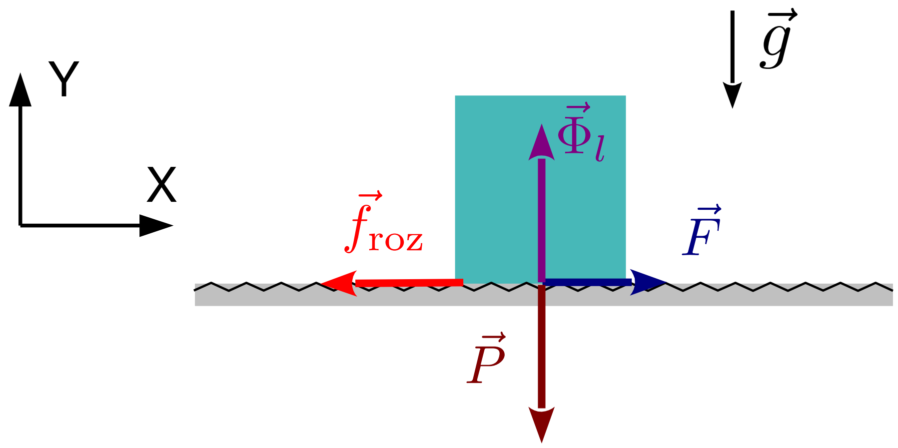
$$\tan\alpha = \frac{|\vec{f}_{\mathrm{roz}}|}{|\vec{\Phi}_l|} \leq \tan\alpha_{\mathrm{max}} = \mu_e$$

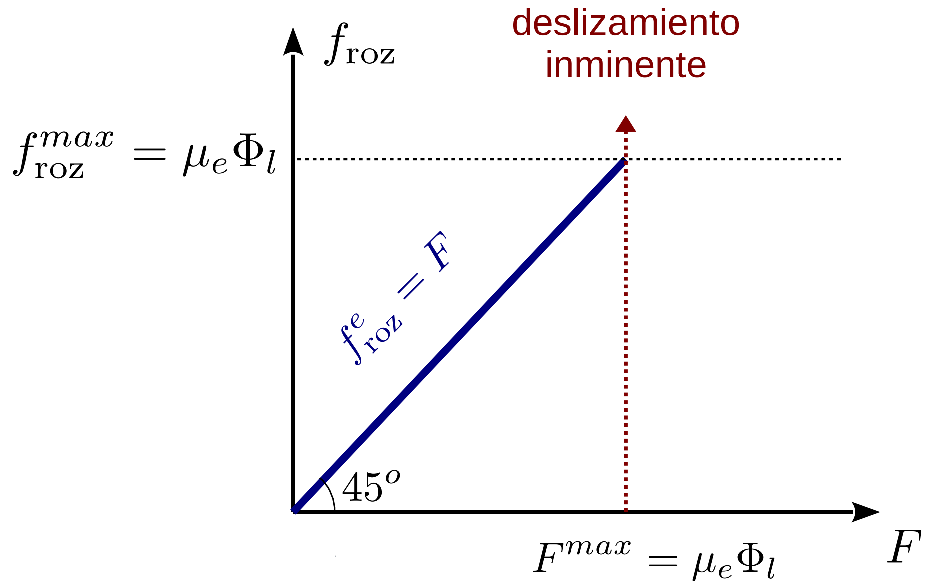
$$\boxed{|\vec{f}_{roz}| \leq \mu_e|\vec{\Phi}_l|}$$

- Situación dinámica
  - El módulo de la fuerza de rozamiento dinámico es conocido y proporcional a la fuerza normal

$$|\vec{F}_R| = \mu_d\,|\vec{\Phi}_l|$$

    - μ_d es el coeficiente de rozamiento dinámico; depende de la naturaleza de las superficies de contacto; no depende de la velocidad (en el modelo de Coulomb)
    - $\mu_e > \mu_d$
  - La fuerza de rozamiento es paralela y de sentido opuesto a la velocidad relativa entre las superficies





Equilibrio: $\vec{F} + \vec{P} + \vec{\Phi}_l + \vec{f}_{roz} = \vec{0}$

Fuerzas

$$\vec{P} = -P\,\vec{\jmath}$$
$$\vec{\Phi}_l = N\,\vec{\jmath}$$
$$\vec{F} = F\,\vec{\imath}$$
$$\vec{f}_{\mathrm{roz}} = f\,\vec{\imath}$$

Incógnitas: $\{N, f\}$

$$(X): \quad f = -F$$
$$(Y): \quad N = P$$
$$\vec{f}_{\mathrm{roz}} = -F\,\vec{\imath}$$
$$\vec{\Phi}_l = P\,\vec{\jmath}$$

Condición de no deslizamiento

$$|\vec{f}_{roz}| \leq \mu_e |\vec{\Phi}_l| \Rightarrow |F| \leq \mu_e P$$

La fuerza de rozamiento sólo es $\mu_e N$ en condiciones de deslizamiento inminente

μ_e puede ser infinitamente grande (cremallera)

Índice

- Conocidas las fuerzas, la Segunda Ley proporciona la ecuación diferencial del movimiento en un sistema de referencia inercial

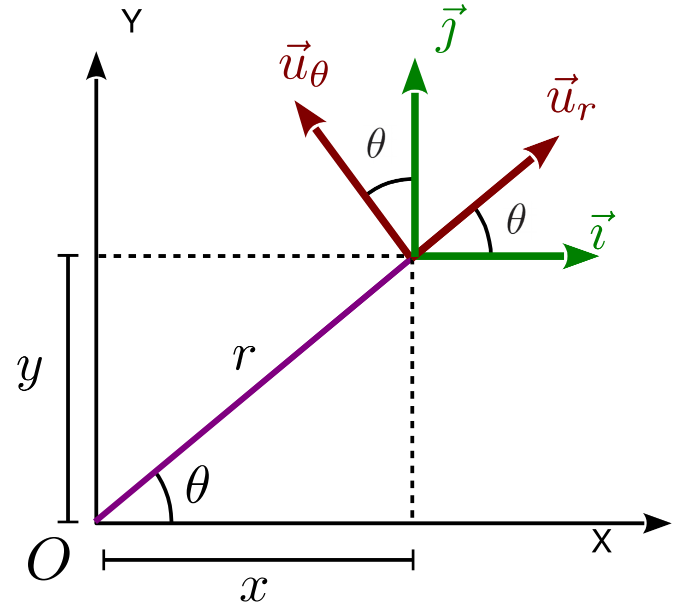
- Elementos para resolver un problema de dinámica del punto
  - Ecuación diferencial $$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m}\left[\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{s}\vec{\Phi}_j\right]$$
  - Ligaduras $f_j(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \qquad j = 1, \ldots, s$
  - Condiciones iniciales $\vec{r}(0) \qquad \dot{\vec{r}}(0)$

- A la inversa, conocida la aceleración y los vínculos, podemos determinar las fuerzas

Índice

- Movimiento en un plano

- Relación con las cartesianas



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = r\,\cos\theta$$
$$\tan\theta = y/x \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$r \in [0, \infty) \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$
$$\theta \in [0, 2\pi) \qquad y \in (-\infty, +\infty)$$

- Base vectorial

$$\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{\imath} + \mathrm{sen}\,\theta\,\vec{\jmath} \qquad \vec{\imath} = \cos\theta\,\vec{u}_r - \mathrm{sen}\,\theta\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{u}_\theta = -\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \qquad \vec{\jmath} = \mathrm{sen}\,\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta$$

  - **u**$_r$ señala la dirección del desplazamiento cuando *r* varía y θ es constante
  - **u**$_\theta$ señala la dirección del desplazamiento cuando θ varía y *r* es constante

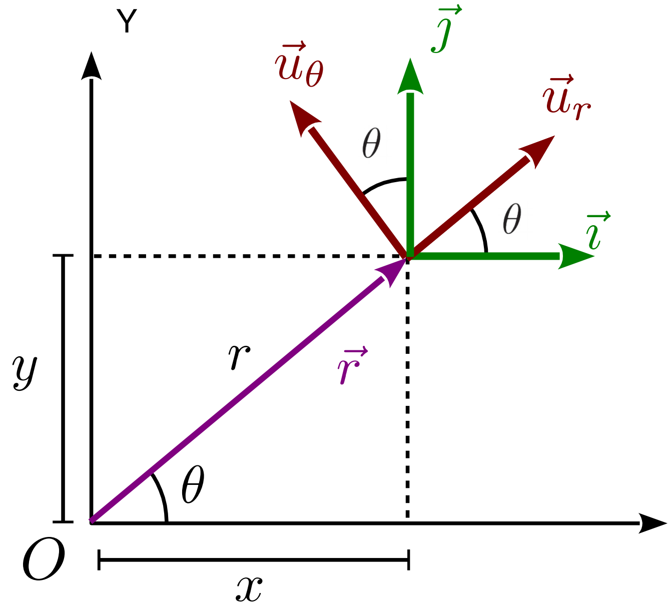
- Derivadas de los vectores: los vectores de la base polar dependen de θ

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \qquad \dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

- Relación con las cartesianas

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = r\,\cos\theta$$
$$\tan\theta = y/x \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$r \in [0, \infty) \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$
$$\theta \in [0, 2\pi) \qquad y \in (-\infty, +\infty)$$



- Vector de posición

$$\vec{r} = r\,\vec{u}_r$$

- Vector velocidad

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\vec{u}}_r = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

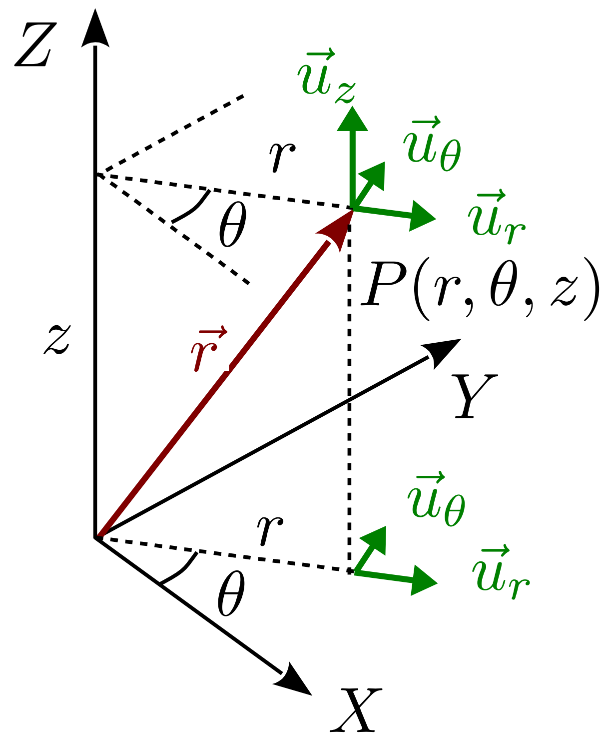
- Vector aceleración

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta$$

- Añadimos la dirección perpendicular al plano
- Posicionamiento del punto $P(r,\theta,z)$

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad x = r\,\cos\theta$$
$$\tan\theta = y/x \qquad y = r\,\operatorname{sen}\theta$$
$$z=z \qquad z=z$$

$$r\in[0,\infty) \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$
$$\theta\in[0,2\pi) \qquad y\in(-\infty,+\infty)$$
$$z\in(-\infty,+\infty) \qquad z\in(-\infty,+\infty)$$



- Vector de posición

$$\vec{r} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z$$

- Vector velocidad

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z$$

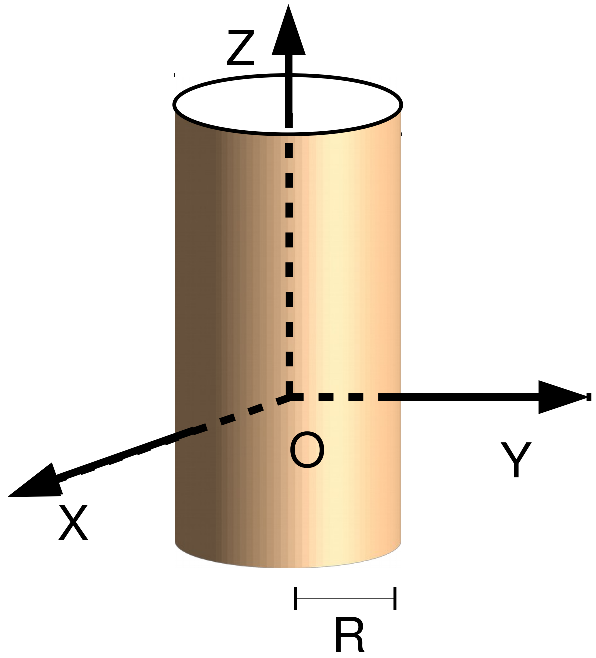
- Vector aceleración

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{u}_k$$

Ejemplos de uso

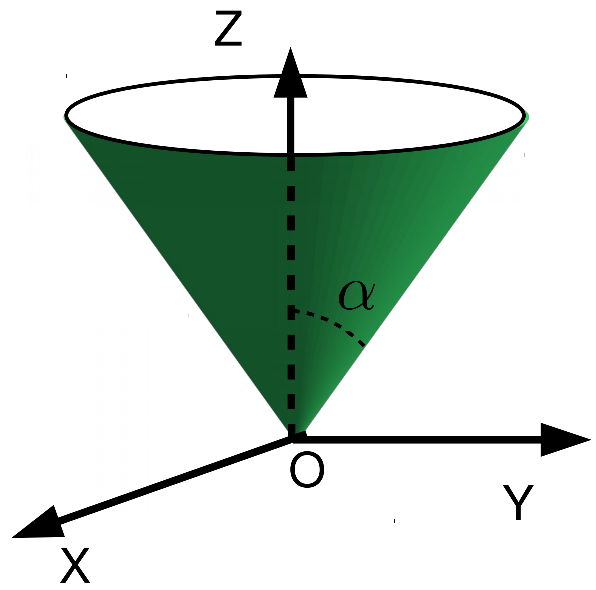
- Superficie cilíndrica

$$r = R$$



- Superficie cónica

$$r = z\,\tan\alpha$$



- Identificar las fuerzas que actúan sobre el sistema
  - Dibujar el diagrama de cuerpo libre, con la dirección y sentido correcto de las fuerzas
    - A veces el sentido de una fuerza no es conocido a priori (muelles con elongación no nula, fuerzas vinculares y de rozamiento…)
    - Cada vínculo liso implica una fuerza vincular perpendicular al vínculo
    - Cada vínculo rugoso implica una fuerza vincular perpendicular al vínculo y otra tangente (rozamiento)
- Elegir un sistema de ejes y coordenadas
- Expresar las fuerzas en las coordenadas y base vectorial elegidas
  - Fuerzas activas: su valor en función de la posición y/o velocidad de la partícula
  - Fuerzas vinculares: su magnitud es una incógnita, su dirección es conocida
- Expresar las magnitudes cinemáticas (velocidad, aceleración)
- Aplicar la ecuación correspondiente
  - Estática: $\vec{F}_{neta} = \vec{0}$
  - Dinámica: $\vec{F}_{neta} = m\vec{a}$

Índice

- Cuando un cuerpo se mueve en el seno de un fluido, aparece una fuerza de rozamiento que depende de la velocidad

$$F_R = -b\,|\vec{v}|^n$$

- Si la velocidad respecto al fluido es pequeña, n=1

$$\vec{F}_R = -b\vec{v}$$

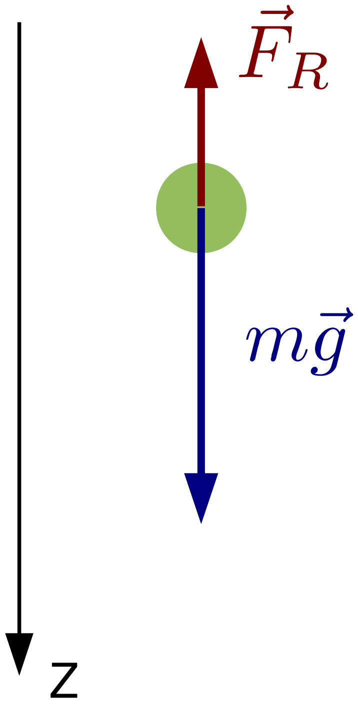
- El coeficiente *b* depende del fluido y de la forma del cuerpo

- Si esta fuerza de rozamiento actúa el tiempo suficiente, la velocidad del cuerpo se hace constante. El valor límite se llama velocidad terminal

Fuerzas de rozamiento viscoso: esfera cayendo

- Supongamos una esfera que cae cerca de la superficie de la Tierra partiendo del reposo

$$\vec{a} = a\,\vec{k} \qquad \vec{v} = v\,\vec{k}$$



$$m\vec{g} = m\,g\,\vec{k}$$

$$\vec{F}_R = -b\,v\,\vec{k}$$

$$m\,a = m\,g - b\,v$$

- En t=0, no hay fuerza viscosa: a(0) = g
- Al aumentar la velocidad, el término viscoso aumenta, mientras que el gravitatorio permanece constante
- Cuando los dos términos se igualan, la velocidad es constante

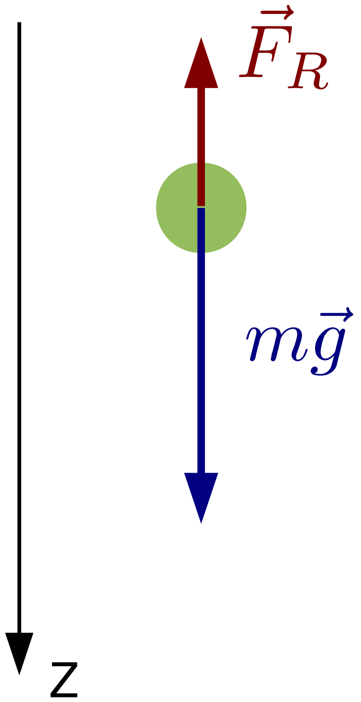
$$v_T = \frac{mg}{b}$$

Velocidad terminal

Fuerzas de rozamiento viscoso: esfera cayendo

- Podemos resolver la ecuación diferencial (suponemos v(0)=0)

$$a = g - \frac{b}{m}v \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{b}{m}v \quad \rightarrow$$



$$\mathrm{d}v = \left(g - \frac{b}{m}v\right)\mathrm{d}t \quad \rightarrow \quad \int_0^{v(t)} \frac{\mathrm{d}v}{g - \frac{b}{m}v} = \int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\boxed{v(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) = v_T\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

$$v_T = \frac{mg}{b}$$

$$\tau = \frac{m}{b}$$