# Tema 12: Oscilaciones

Mecánica Racional, 2º, Grado en Ingeniería Civil

Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

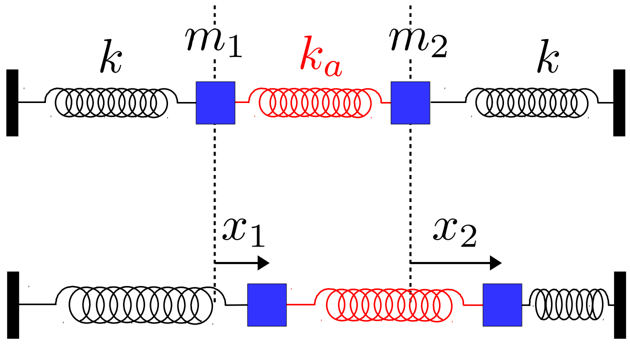
# Índice

- Cuando se acoplan osciladores, el sistema presenta nuevas frecuencias de oscilación diferentes a las propias de los osciladores por separado
  - En el acoplamiento débil entre dos osciladores se produce un trasvase periódico de energía entre los osciladores
- Cuando se perturba ligeramente un sistema mecánico en equilibrio, el movimiento resultante es oscilatorio
- Los sistemas complejos tienen diferentes frecuencias de oscilación: los modos normales

- Introducción
- Osciladores acoplados
  - Acoplamiento débil
- Modos normales de oscilación

# Osciladores acoplados

- Consideramos dos muelles de constante k acoplados por otro muelle de constante $k_a$




- La posición de las masas se determinan respecto a las posiciones de equilibrio

$$m_1 = m_2 = m$$

- Segunda Ley de Newton aplicada a cada masa

$$(1) \to m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k_a(x_2 - x_1)$$

$$(2) \to m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k_a(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x}_1 + (k + k_a)x_1 - k_a x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + (k + k_a)x_2 - k_a x_1 = 0 \end{array} \right.$$

- Buscamos soluciones oscilantes

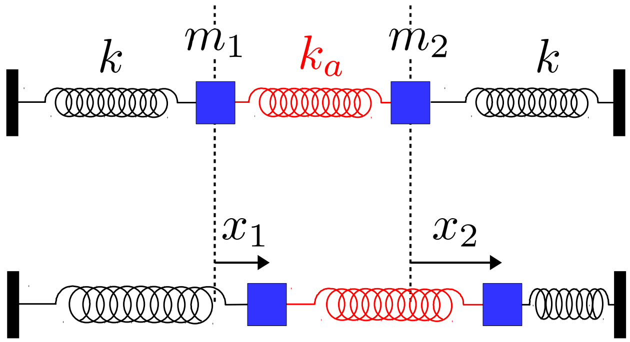
$$x_1(t) = B_1 e^{i\omega t}$$

$$x_2(t) = B_2 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{cc} (k + k_a - m\omega^2) & -k_a \\ -k_a & (k + k_a - m\omega^2) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right]$$

# Osciladores acoplados

- Para que haya soluciones no triviales el determinante de la matriz de coeficientes debe ser nulo

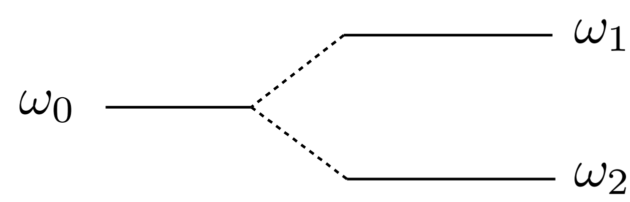



$$(\mathrm{k} + \mathrm{k}_a - m\omega^2)^2 - k_a^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k+2k_a}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{cases}$$

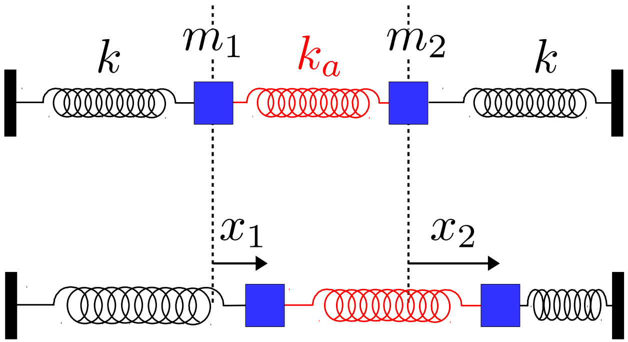
- Aparecen dos frecuencias características
- Si fijamos una de las masas (por ejemplo $x_2=0$)

$$m\ddot{x}_1 + (k+k_a)x_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k+k_a}{m}}$$

- El acoplamiento desdobla la frecuencia del sistema con una sola masa



- Hacemos el cambio de variable




$$\eta_1 = x_1 - x_2 \qquad x_1 = (\eta_2 + \eta_1)/2$$

$$\eta_2 = x_1 + x_2 \qquad x_2 = (\eta_2 - \eta_1)/2$$

- Segunda Ley de Newton sobre cada masa

$$m\,\ddot{\eta}_1 + (k + 2k_a)\,\eta_1 = 0$$

$$m\,\ddot{\eta}_2 + k\,\eta_2 = 0$$

- Ecuaciones diferenciales desacopladas
- Equivalente a dos MAS con $\omega_1$, $\omega_2$

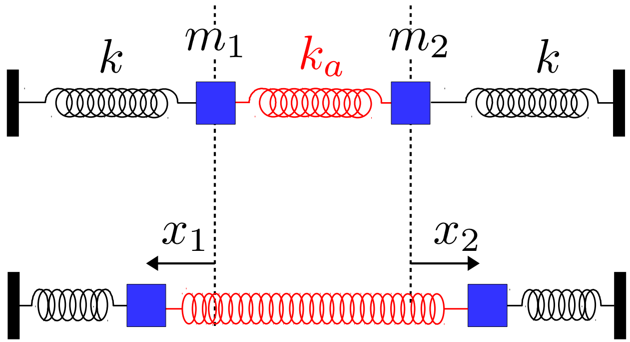
- Solución general

$$\eta_1(t) = C_1^+ e^{i\omega_1 t} + C_1^- e^{-i\omega_1 t} \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{k+2k_a}{m}}$$

$$\eta_2(t) = C_2^+ e^{i\omega_2 t} + C_2^- e^{-i\omega_2 t} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Si en t=0 tenemos

$$x_1(0) = -x_2(0) \qquad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_2(0) = 0 \qquad \dot{\eta}_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_2(t) = 0$$



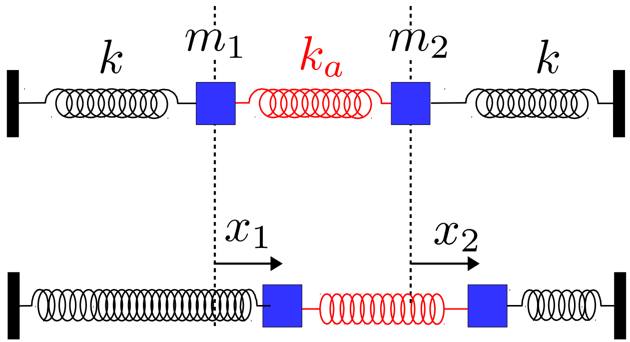

- Sólo aparece la frecuencia $\omega_1$ $\quad x_1(t) = -x_2(t)$

Modo antisimétrico

---

- Si en t=0 tenemos

$$x_1(0) = x_2(0) \qquad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_1(0) = 0 \qquad \dot{\eta}_1(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_1(t) = 0$$




- Sólo aparece la frecuencia $\omega_2$ $\quad x_1(t) = x_2(t)$

Modo simétrico

- Supongamos $k_a \ll k$ $\Rightarrow$ $\varepsilon = \dfrac{k_a}{2k} \ll 1$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\left(1+\frac{k_a}{k}\right)^{1/2} \simeq \sqrt{\frac{k}{m}}\,(1+\varepsilon) \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\frac{k}{m}} \simeq \omega_0\,(1+\varepsilon)^{-1} \simeq \omega_0\,(1-\varepsilon)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}\left(1+\frac{2k_a}{k}\right)^{1/2} \simeq \sqrt{\frac{k}{m}}\,(1+4\varepsilon)^{1/2} \simeq \omega_0(1-\varepsilon)\,(1+2\varepsilon) \simeq \omega_0\,(1+\varepsilon)$$

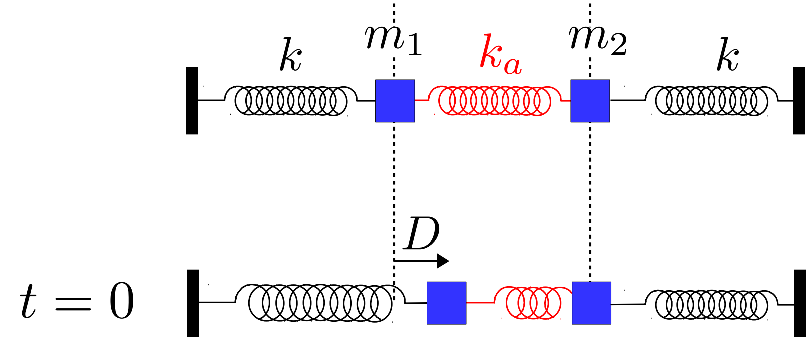
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \simeq \omega_0\,(1-\varepsilon)$$

- Las dos frecuencias están muy próximas a $\omega_0$

- Supongamos $x_1(0) = D, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\eta_1(0) = D \\ \dot{\eta}_1(0) = 0\end{array}\right| \Rightarrow \eta_1(t) = D\cos(\omega_1 t)$$

$$\left.\begin{array}{l}\eta_2(0) = D \\ \dot{\eta}_2(0) = 0\end{array}\right| \Rightarrow \eta_2(t) = D\cos(\omega_2 t)$$




- Recuperamos $x_1$

$$x_1 = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2) = D\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad \cos a - \cos b = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

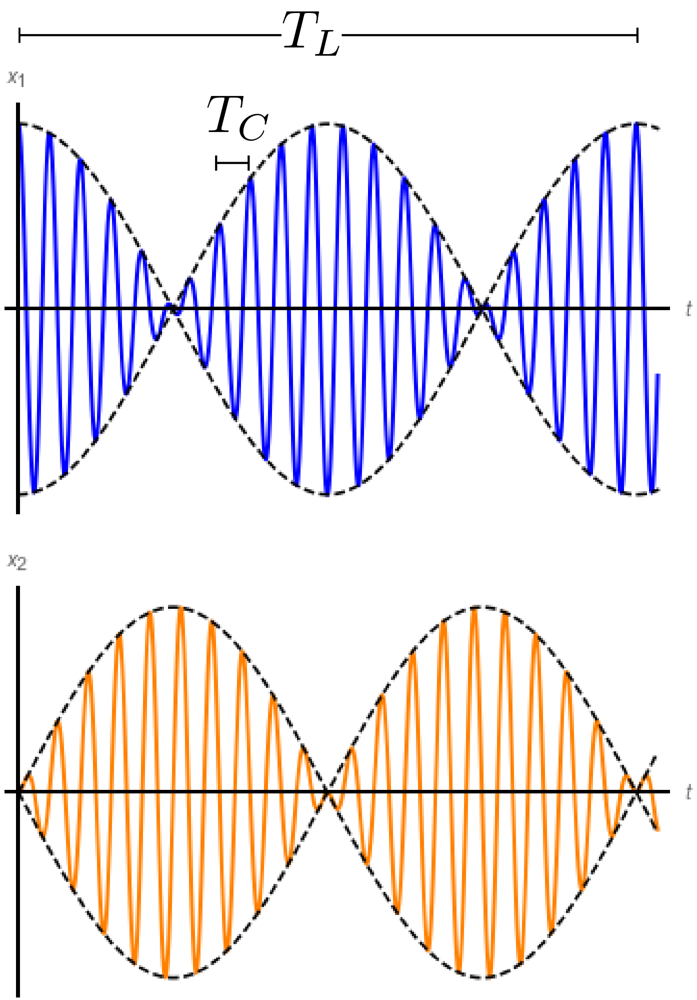
---

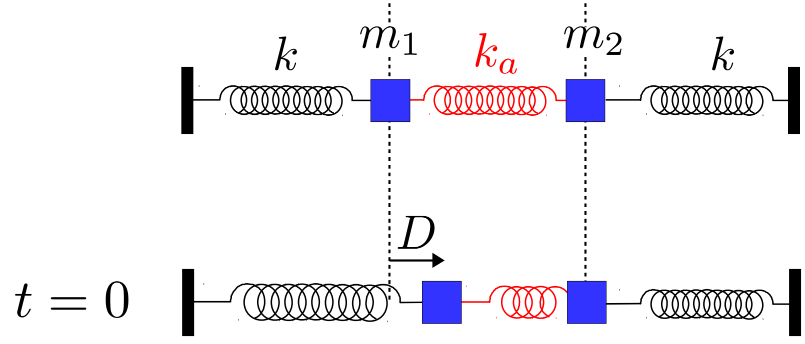
$$x_1 = D\cos(\varepsilon\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)$$

$$x_2 = D\,\mathrm{sen}\,(\varepsilon\omega_0 t)\,\mathrm{sen}\,(\omega_0 t)$$

$$\varepsilon\omega_0 \ll \omega_0 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon\omega_0} \gg \frac{1}{\omega_0}$$

- La energía se transmite de un oscilador al otro alternativamente



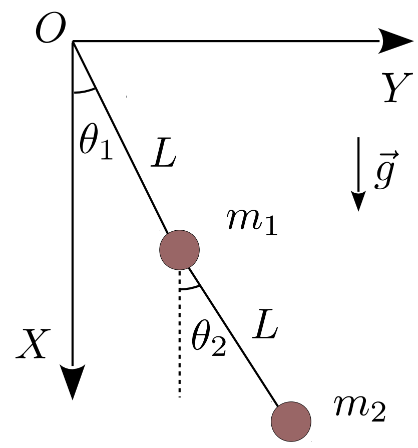

$$T_L = \frac{2\pi}{\varepsilon\omega_0}$$

$$T_C = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- Introducción
- Osciladores acoplados
  - Acoplamiento débil
- Modos normales de oscilación

- Sistema holónomo, esclerónomo, conservativo, independiente

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_k) \qquad \vec{v}_i = \vec{v}_i(q_k, \dot{q}_k)$$




$$\{q_1, q_2\} = \{\theta_1, \theta_2\} \qquad r = 2 \qquad n_p = 2$$

$$\vec{r}_1 = L\cos\theta_1\,\vec{\imath} + L\,\mathrm{sen}\,\theta_1\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{r}_2 = L(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\,\vec{\imath} + L(\,\mathrm{sen}\,\theta_1 + \,\mathrm{sen}\,\theta_2)\,\vec{\jmath}$$

- La energía cinética tiene la forma genérica

$$T(\dot{q}_k) = \sum_{i,j=1}^{r} \frac{1}{2} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \qquad m_{ij}(q_k) = \sum_{l=1}^{n}{}_p m_l \left(\frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_i}\right)\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}\right) = m_{ji}(q_k)$$

$$T = mL^2\dot{\theta}_1^2 + mL^2\cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{mL^2}{2}\dot{\theta}_2^2$$

- La energía potencial depende sólo de las coordenadas

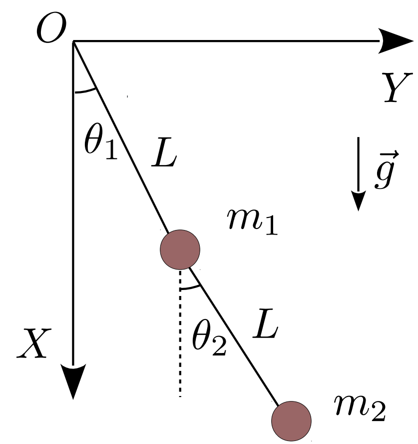
$$U = U(q_k)$$

$$U = -mgL\,(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

# Modos normales para oscilaciones pequeñas cerca del equilibrio

- Cerca del equilibrio ($q_k=q_k^0$) U puede aproximarse por Taylor

$$U \simeq U_{eq} + \sum_{i=1}^{r} \cancelto{0}{\left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{eq}} q_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{eq} q_i q_j$$




$$U \simeq mgL\theta_1^2 + \frac{mgL}{2}\theta_2^2$$

  - Las derivadas primeras son cero en el equilibrio
  - El valor constante $U_{eq}$ puede eliminarse cambiando la referencia de energía potencial

- Cerca del equilibrio (oscilaciones pequeñas) la energía potencial queda

$$U(q_k) = \sum_{i,j=1}^{r} \frac{1}{2} A_{ij} q_i q_j \qquad A_{ij} = \sum_{i,j=1}^{r} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{eq} = A_{ji} \neq f(q_k)$$

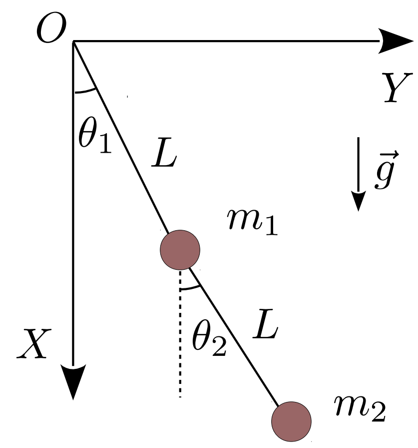
  - Los $A_{ij}$ son números, no funciones

# Modos normales para oscilaciones pequeñas cerca del equilibrio

- Cerca del equilibrio ($q_k = q_k^0$) $m_{ij}$ también puede aproximarse por Taylor

$$m_{ij} \simeq m_{ij}^{eq} + \sum_{p=1}^{r} \left.\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_p}\right|_{eq} q_p \simeq m_{ij}^{eq}$$

  - Guardamos los primeros términos no nulos
  - Los $m^{eq}_{ij}$ son números, no funciones



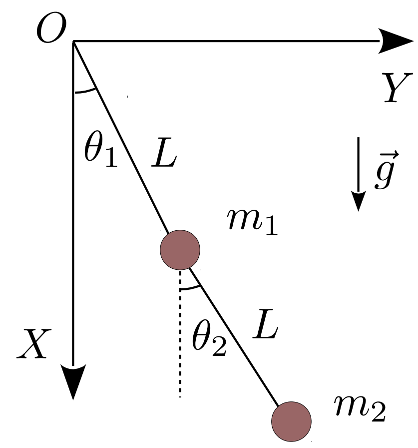

$$T \simeq mL^2\dot{\theta}_1^2 + mL^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{mL^2}{2}\dot{\theta}_2^2$$

- Cerca del equilibrio (oscilaciones pequeñas) la energía cinética queda

$$T(\dot{q}_k) = \sum_{i,j=1}^{r} \frac{1}{2} m_{ij}^{eq}\, \dot{q}_i \dot{q}_j$$

  - Los $m^{eq}_{ij}$ son números, no funciones
  - Son simétricos

- Ecuaciones de Euler cerca del equilibrio




$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\right)+\frac{\partial U}{\partial q_k}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\right)=\sum_{j=1}^{n} m_{kj}^{eq}\ddot{q}_j$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_k}=\sum_{j=1}^{n} A_{kj}q_j$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{j=1}^{r}\left(m_{kj}^{eq}\ddot{q}_j+A_{kj}q_j\right)=0$$

$$k=1,\ldots,r$$

$$k=1: \quad 2mL^2\ddot{\theta}_1+mL^2\ddot{\theta}_2+2mgL\theta_1=0$$

$$k=2: \quad mL^2\ddot{\theta}_1+mL^2\ddot{\theta}_2+mgL\theta_2=0$$

# Modos normales para oscilaciones pequeñas cerca del equilibrio

- Buscamos soluciones oscilatorias

$$q_j(t) = a_j e^{i(\omega t+\phi)} \qquad \ddot{q}_j = -\omega^2 q_j \;\Rightarrow\; \sum_{j=1}^{n} A_{kj} q_j = \omega^2 m^{eq}_{kj} q_j$$

$$k = 1, \ldots, n$$

- Problema de autovalores generalizado

$$(A_{ij})\; q_j = \omega^2 \;(m^{eq}_{ij})\; q_j \qquad |A_{ij} - \omega^2\, m^{eq}_{ij}| = 0 \;\Rightarrow\; \omega_i^2$$

- Las matrices son simétricas definidas positivas, o sea, los autovalores $\omega^2$ son reales
- Se obtienen n frecuencias características del sistema (puede haber degeneración)

$$\begin{bmatrix} 2mgL & 0 \\ 0 & mgL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 2mL^2 & mL^2 \\ mL^2 & mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2mgL - 2\omega^2 mL^2 & -\omega^2 mL^2 \\ -\omega^2 mL^2 & mgL - \omega^2 mL^2 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{2+\sqrt{2}}\,\sqrt{g/L} = 1.85\sqrt{g/L} \\ \omega_2 &= \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{g/L} = 0.77\sqrt{g/L} \end{aligned}$$

# Modos normales para oscilaciones pequeñas cerca del equilibrio

- Al ser las matrices simétricas definidas positivas se puede hace un cambio de variables para que sean diagonales: son los autovectores del problema
- El sistema se puede tratar como n osciladores (modos) desacoplados

$$q_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\eta_j \qquad \left| \qquad \begin{array}{l} \ddot{\eta}_j + \omega_j^2\,\eta_j = 0 \\ j = 1, \ldots, n \end{array} \right.$$

  - Los autovalores y autovectores del problema son las frecuencias y los modos normales, respectivamente

$$\begin{bmatrix} 2mgL & 0 \\ 0 & mgL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 2mL^2 & mL^2 \\ mL^2 & mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \left[-1, \sqrt{2}\right] \qquad \eta_1 = -\theta_1 + \sqrt{2}\theta_2$$

$$v_2 = \left[1, \sqrt{2}\right] \qquad \eta_2 = \theta_1 + \sqrt{2}\theta_2$$

# Modos normales del péndulo doble

$$\omega_1 = 1.85\sqrt{g/L}$$

$$\eta_1 = A\cos(\omega_1 t)$$

$$\eta_2 = 0 \rightarrow \theta_2 = -\theta_1/\sqrt{2}$$

$$\omega_2 = 0.77\sqrt{g/L}$$

$$\eta_2 = A\cos(\omega_2 t)$$

$$\eta_1 = 0 \rightarrow \theta_2 = \theta_1/\sqrt{2}$$