

Tema 4: Centro de masas

Mecánica Racional, 2º, Grado en Ingeniería Civil

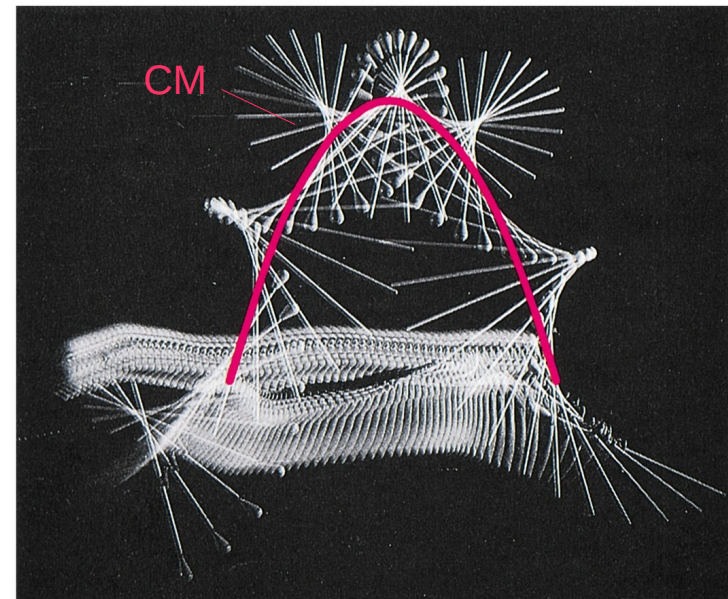
Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

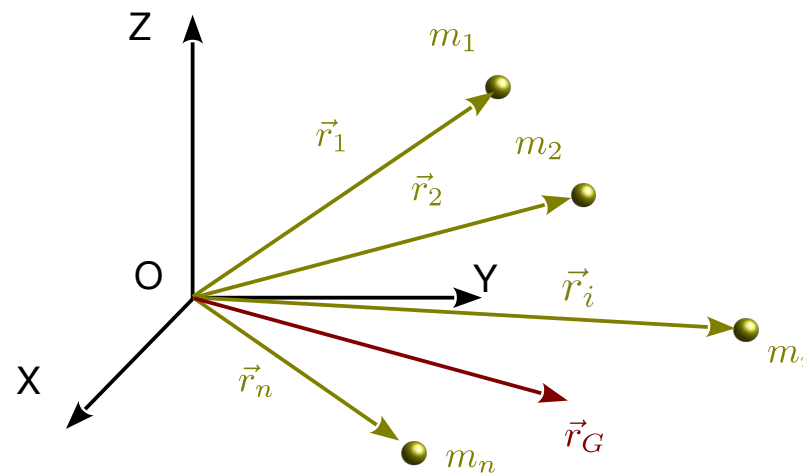
- Definición y propiedades
- Cálculo de centro de masa
 - Cuerpos continuos
 - Figuras compuestas
 - Teoremas de Guldin
- Velocidad y aceleración del CM

- El movimiento de un sólido rígido se puede entender como la superposición de una **traslación** y una **rotación** (Teoremas de Koenig)
- La traslación corresponde al movimiento del centro de masas
- La rotación se realiza respecto al centro de masas



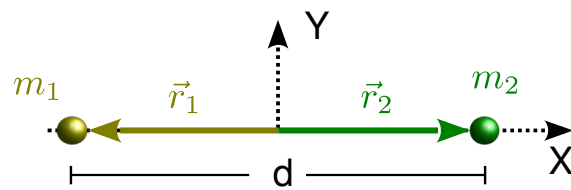
- Dado un sistema de n partículas, se define la posición de su centro de masas

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{M}$$



- m_i es la masa de cada partícula
- \vec{r}_i es el vector de posición de cada partícula
- M es la masa total del sistema

Centro de masas: cálculo para un sistema discreto

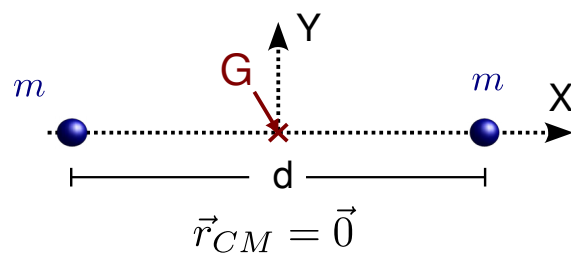


$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= -\frac{d}{2} \vec{i} \\ \vec{r}_2 &= +\frac{d}{2} \vec{i} \end{aligned}$$



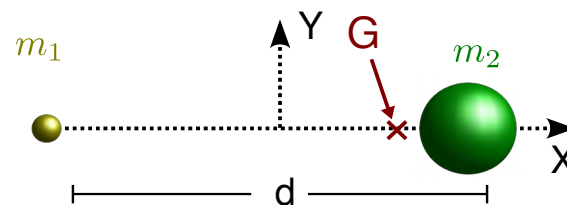
$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) \frac{d}{2} \vec{i}$$

$$m_1 = m_2 = m$$



$$\vec{r}_{CM} = \vec{0}$$

$$m_1 \ll m_2$$



$$\begin{aligned} \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) &\simeq \frac{m_2 - m_1}{m_2} \\ &\simeq 1 - \frac{m_1}{m_2} \end{aligned}$$

$$\vec{r}_{CM} \simeq \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \right) \frac{d}{2} \vec{i}$$

El CM está cerca de la masa **mayor**

Ejemplo: $m_{\text{tierra}} = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$,

$m_{\text{sol}} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$,

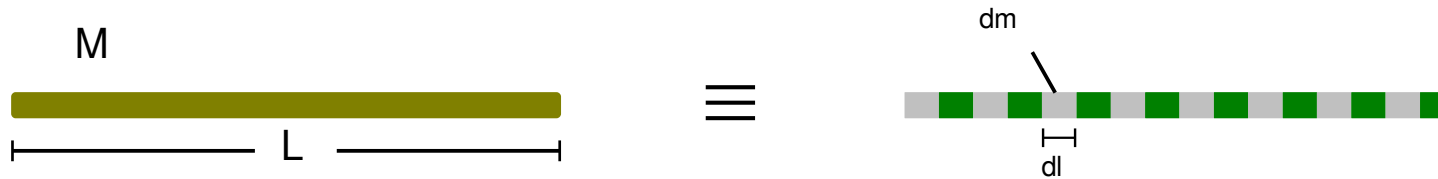
$d = 1.5 \times 10^8 \text{ km}$

- Si el sistema tiene algún plano, línea o punto de **simetría**, el CM está en él

- Si hay varios elementos de simetría el CM debe estar en el corte de todo ellos

- Definición y propiedades
- Cálculo de centro de masa
 - Cuerpos continuos
 - Figuras compuestas
 - Teoremas de Guldin
- Velocidad y aceleración del CM

- Un cuerpo continuo puede considerarse compuesto por un número infinito de masas diferenciales

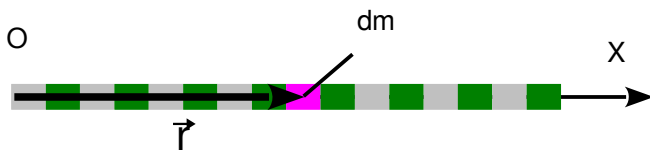


- Los sumatorios se convierten en diferenciales

$$M = \sum dm \implies \int dm$$

$$L = \sum dl \implies \int dl$$

- Posición del centro de masas



$$\vec{r}_G = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} dm}{M}$$

- Densidad lineal de masa

- Si el cuerpo es homogéneo

$$dm = \lambda dl$$

$$\lambda = \frac{M}{L}$$

$$M = \int_{\Gamma} \lambda dl$$

- Densidad superficial de masa

- Si el cuerpo es homogéneo

$$dm = \sigma dS$$

$$\sigma = \frac{M}{S}$$

$$M = \int_S \sigma dS$$

- Densidad volumétrica de masa

- Si el cuerpo es homogéneo

$$dm = \rho dV$$

$$\rho = \frac{M}{V}$$

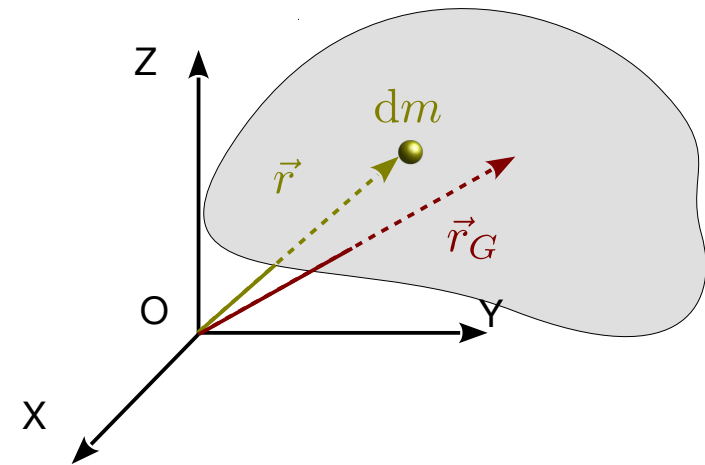
$$M = \int_V \rho dV$$

- Coordenadas cartesianas del centro de masas

$$x_G = \frac{1}{M} \int x(\vec{r}) dm$$

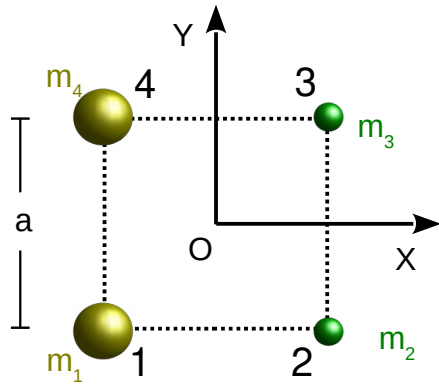
$$y_G = \frac{1}{M} \int y(\vec{r}) dm$$

$$z_G = \frac{1}{M} \int z(\vec{r}) dm$$



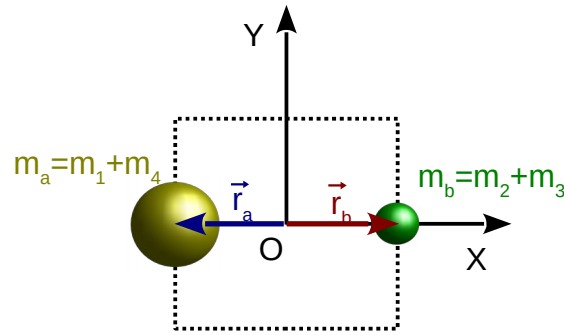
- Definición y propiedades
- Cálculo de centro de masa
 - Cuerpos continuos
 - Figuras compuestas
 - Teoremas de Guldin
- Velocidad y aceleración del CM

- Podemos calcular el CM como una composición de partes del sistema



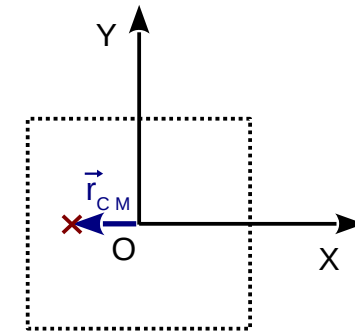
$$m_1 = m_4$$

$$m_2 = m_3$$



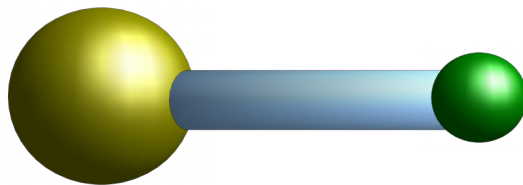
$$\vec{r}_a = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_4 \vec{r}_4}{m_1 + m_4} = -\frac{a}{2} \vec{i}$$

$$\vec{r}_b = \frac{m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_2 + m_3} = \frac{a}{2} \vec{i}$$



$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_a \vec{r}_a + m_b \vec{r}_b}{m_a + m_b}$$

- De este modo se puede calcular el CM de sistemas complejos

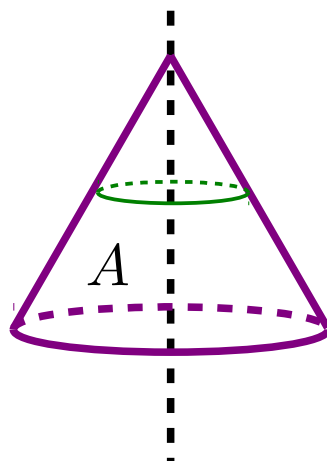
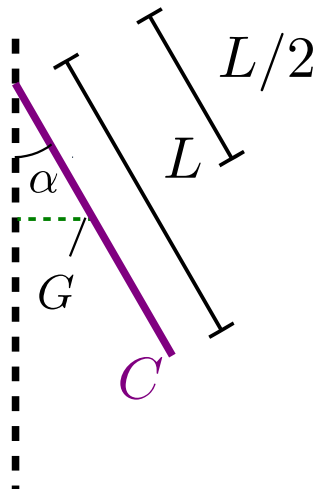


$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^N M_i \vec{r}_{Gi}}{\sum_{i=1}^N M_i}$$

- Definición y propiedades
- Cálculo de centro de masa
 - Cuerpos continuos
 - Figuras compuestas
 - Teoremas de Guldin
- Velocidad y aceleración del CM

- Primer teorema: El área A de una superficie de revolución generada por la rotación de una curva plana C , alrededor de un eje externo a C y que esté en su mismo plano, es igual al producto de la longitud L_C de C por la distancia L_G recorrida por el centroide geométrico

Área del cono abierto $A = L_C L_G$



$$L_C = L$$

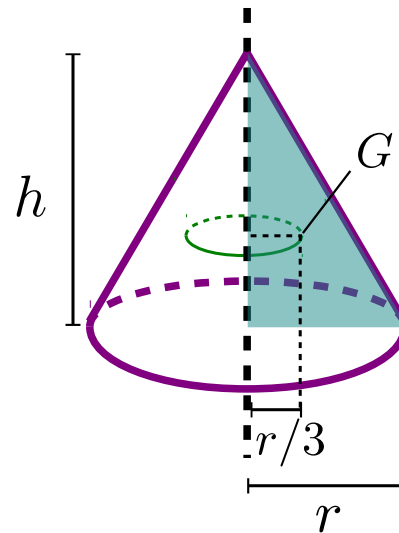
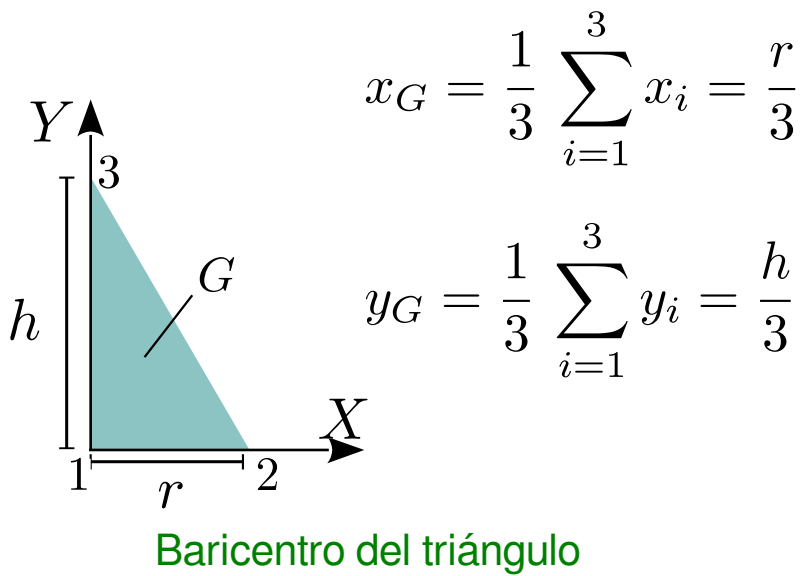
$$L_G = 2\pi \left(\frac{1}{2} L \sin \alpha \right) = \pi L \sin \alpha$$

$$A = (\pi L \sin \alpha) L = \pi L^2 \sin \alpha$$

Teoremas de Pappus-Guldin

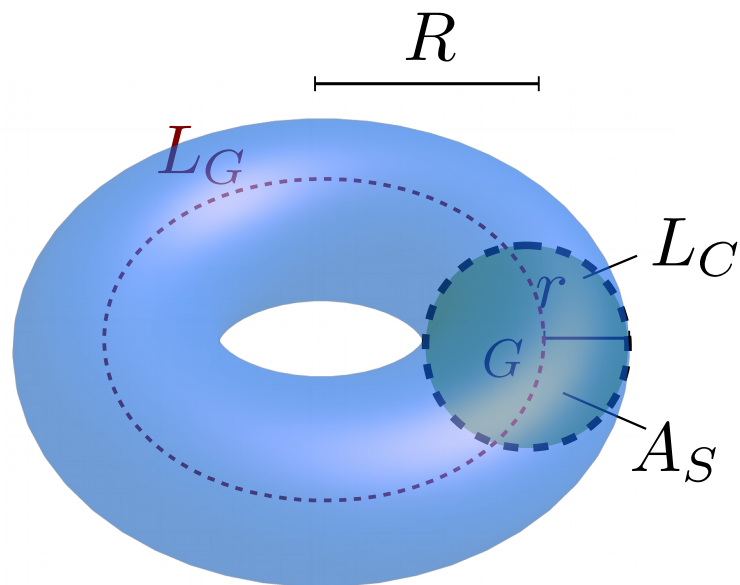
- Segundo teorema: El volumen V de un sólido de revolución generado por la rotación de una figura plana S , alrededor de un eje externo a ella, es igual al producto del área A_S de F por la distancia L_G recorrida por el CM

Volumen del cono $V = A_S L_G$



$$A_S = \frac{1}{2}hr$$
$$L_G = 2\pi \left(\frac{1}{3}r \right) = \frac{2\pi r}{3}$$
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

- Aplicación a un toro



Área

$$A = L_C L_G$$

$$A = (2\pi r) (2\pi R) = 4\pi^2 r R$$

Volumen

$$V = A_S L_G$$

$$V = (\pi r^2) (2\pi R) = 2\pi^2 r^2 R$$

- Definición y propiedades
- Cálculo de centro de masa
 - Cuerpos continuos
 - Figuras compuestas
 - Teoremas de Guldin
- Velocidad y aceleración CM

- Velocidad del centro de masas

$$\vec{v}_G = \frac{1}{M} \int \vec{v}(\vec{r}) dm$$

- Aceleración del centro de masas

$$\vec{a}_G = \frac{1}{M} \int \vec{a}(\vec{r}) dm$$

- Cantidad de movimiento del centro de masas

$$\vec{C} = M\vec{v}_G = \int \vec{v}(\vec{r}) dm$$

