Tema 6: Cinética de la partícula

FISICA I, 1º Grado en Ingeniería Civil

Departamento Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

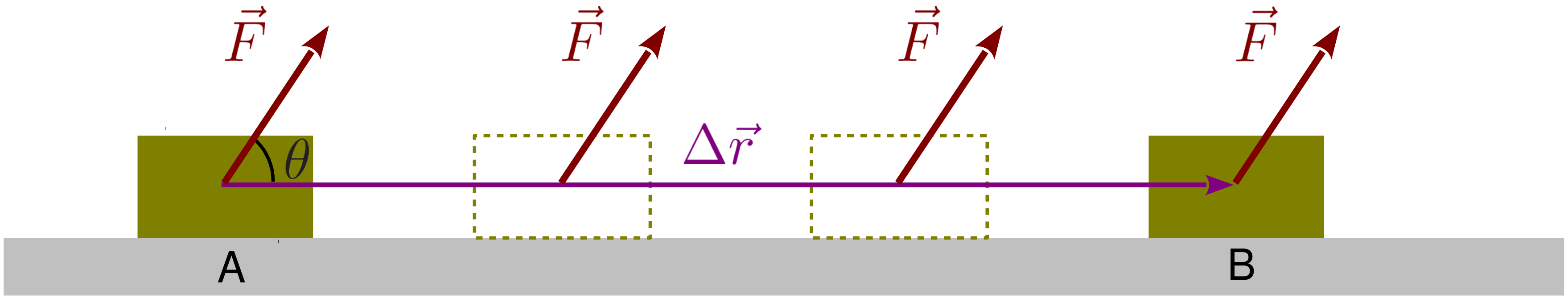
Universidad de Sevilla

Índice

- Las magnitudes cinéticas combinan elementos de cinemática y de inercia
  - Trabajo
  - Energías cinética, potencial y mecánica
  - Cantidad de movimiento (o momento lineal)
  - Momento cinético respecto a un punto (o angular)
- Algunas de estas magnitudes se conservan durante el movimiento de una partícula
  - Se puede obtener información sin resolver todos los detalles
- Forma alternativa de estudiar la Dinámica
  - En algunos problemas se puede encontrar la velocidad sin tener que resolver una ecuación diferencial

Índice

- La fuerza realiza un trabajo sobre el cuerpo durante su movimiento



$$W_A^B = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = |\vec{F}|\,|\Delta\vec{r}|\cos\theta$$

- El signo depende del sentido relativo

$$\theta < \pi/2 \Rightarrow W_A^B > 0$$

$$\theta > \pi/2 \Rightarrow W_A^B < 0$$

$$\theta = \pi/2 \Rightarrow W_A^B = 0$$

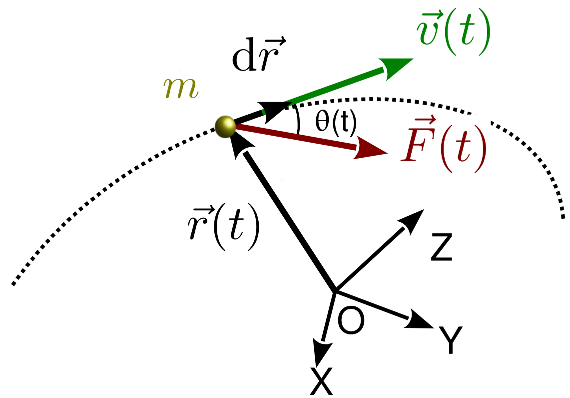
➔ si **F** ⊥ **dr** no hay trabajo mecánico

- En el SI internacional la unidad base es el Julio $\mathrm{J} = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = \mathrm{kg\,m^2s^{-2}}$

- Se divide el trayecto en segmentos infinitesimales

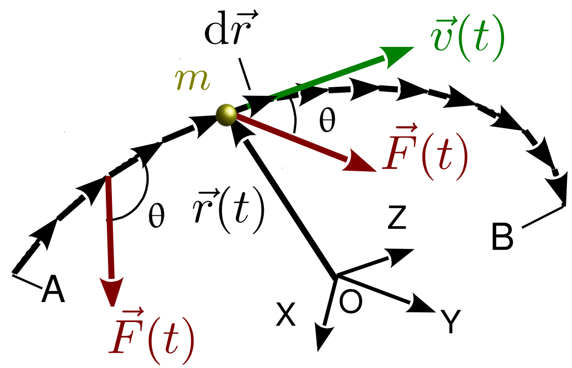
- Trabajo de la fuerza sobre la partícula cuando esta se desplaza un d**r**

$$\delta W = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = |\vec{F}|\,|\mathrm{d}\vec{r}|\,\cos\theta$$



- En un recorrido finito el trabajo total es la suma de los trabajos infinitesimales

$$W_A^B = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

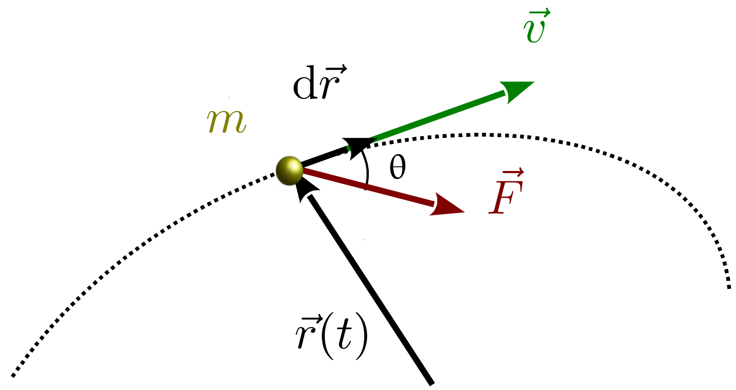


- Teniendo en cuenta la definición de velocidad y la Segunda Ley de Newton

$$\delta W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \vec{F}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t = m\,\vec{a}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t = m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\cancel{\mathrm{d}t}}\cdot\vec{v}\,\cancel{\mathrm{d}t}$$

$$= m\,\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v} = m\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = m\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

$$\delta W = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}m\,v^2\right)$$



- Puede interpretarse diciendo que, al realizar trabajo sobre la partícula, la fuerza le transfiere la cantidad d(mv²/2) en el trayecto d**r**

Índice

- Introducción
- Trabajo mecánico
- Energía cinética
- Energía potencial
- Energía mecánica
- Cantidad de movimiento
- Momento cinético (o angular)

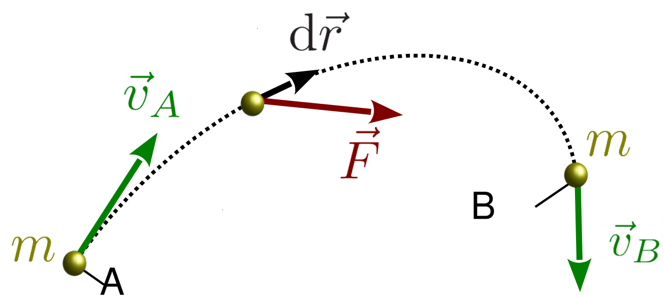
- Definición

$$\boxed{T = K = \frac{1}{2} m\, v^2}$$

- Es un escalar
- Está relacionada con la capacidad de la partícula de realizar trabajo
- Se mide en Julios
- Depende de las propiedades de la partícula: masa y velocidad
  - Combina la inercia (m) con la cinemática (v)
    - No es igual que caiga en el pie una pluma que una bola de plomo, aunque tengan la misma velocidad

- Trabajo total de una fuerza sobre una partícula en el trayecto A - B

$$W_A^B = \int_A^B \delta W = \int_A^B d\left(\frac{1}{2}m\,v^2\right) = \frac{1}{2}m\,v_B^2 - \frac{1}{2}m\,v_A^2$$



- Teorema de las fuerzas vivas o de la energía cinética

$$\boxed{W_A^B = \Delta T = \frac{1}{2}m\,v_B^2 - \frac{1}{2}m\,v_A^2}$$

Versión finita

$$\boxed{\delta W = \mathrm{d}T}$$

Versión local

  - El trabajo modifica el valor de la energía cinética de la partícula
  - Es válido para cualquier tipo de fuerza

- Si hay varias fuerzas actuando

$$\boxed{\frac{1}{2}m\,v_B^2 - \frac{1}{2}m\,v_A^2 = W_{\mathrm{neto}}\Big|_A^B}$$

- Potencia instantánea

$$P_W = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$$

  - Mide la tasa con la que se realiza trabajo
  - Se mide en Watios $\mathrm{W} = \mathrm{J/s} = \mathrm{kg\,m^2 s^{-3}}$
  - Trabajo a partir de la potencia: $\mathrm{d}W = P_W\,\mathrm{d}t$

- Potencia transferida por una fuerza sobre una partícula en movimiento

$$P_W = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

- Versión instantánea del teorema de las fuerzas vivas

$$P_W = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \qquad \mathrm{d}T = P_W\,\mathrm{d}t$$

Si la fuerza neta que actúa sobre un punto material es nula o perpendicular a su trayectoria, su energía cinética se conserva constante a lo largo del tiempo

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}_T = \vec{0} \\ \vec{F}_T \perp \mathrm{d}\vec{r}\end{array}\right| \Longrightarrow \delta W_T = \vec{F}_T \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}T = 0 \Longrightarrow T = \mathrm{cte}$$

- Ejemplos
  - Partícula libre
  - Movimiento de un satélite artificial alrededor de la Tierra
  - Movimiento de la Tierra respecto al Sol (considerando la órbita circular)
  - Movimiento de una carga eléctrica en el seno de un campo magnético

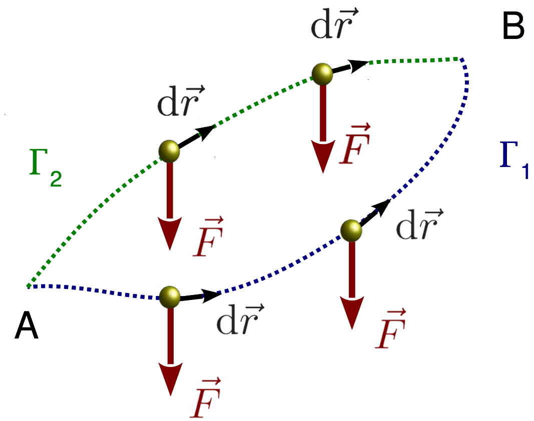
- Introducción
- Trabajo mecánico
- Energía cinética
- Energía potencial
- Energía mecánica
- Cantidad de movimiento
- Momento cinético (o angular)

Una fuerza es conservativa si el trabajo que realiza sobre un punto material que se desplaza entre dos puntos no depende de la trayectoria seguida

$$W_{A,\Gamma_1}^{B} = \int_{A,\Gamma_1}^{B} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$W_{A,\Gamma_2}^{B} = \int_{A,\Gamma_2}^{B} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$W_{A,\Gamma_1}^{B} = W_{A,\Gamma_2}^{B} \Longleftrightarrow \vec{F} = \vec{F}^{C}$$



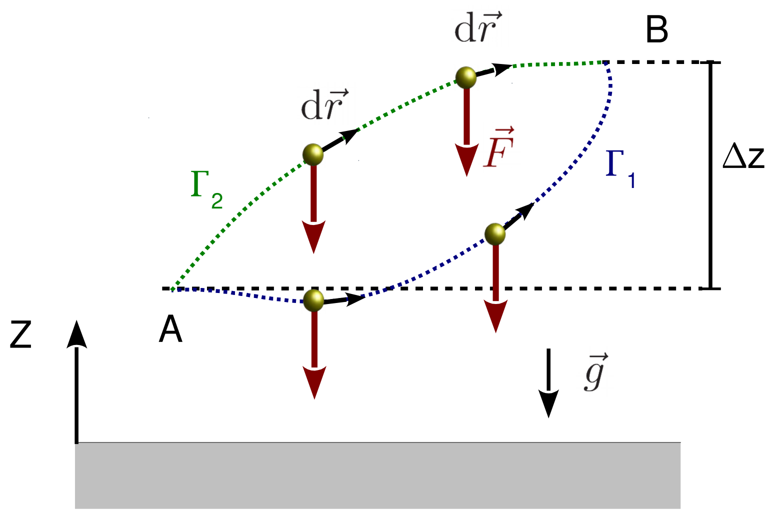
- La diferencia de energía potencial entre dos puntos es el trabajo realizado por la fuerza conservativa cuando la partícula se mueve entre esos dos puntos, cambiando el signo

$$U_B - U_A = -W_A^B = -\int_A^B \vec{F}^C \cdot \mathrm{d}\vec{r} \qquad W_A^B = -\Delta U$$

  - El origen de la energía potencial es arbitrario
  - La energía potencial de una partícula depende de su posición en un campo de fuerzas conservativo

- Fuerza gravitatoria cerca de la superficie

$$\vec{F}_g = m\,\vec{g} = -m\,g\,\vec{k}$$



- Trabajo realizado por **F**$_g$ en un desplazamiento infinitesimal

$$\delta W = \vec{F}_g \cdot \mathrm{d}\vec{r} = m\vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -mg\mathrm{d}z = -\mathrm{d}U$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,\vec{\imath} + \mathrm{d}y\,\vec{\jmath} + \mathrm{d}z\,\vec{k}$$

$$m\vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -mg\,\mathrm{d}z$$

- Diferencia de energía potencial entre dos puntos

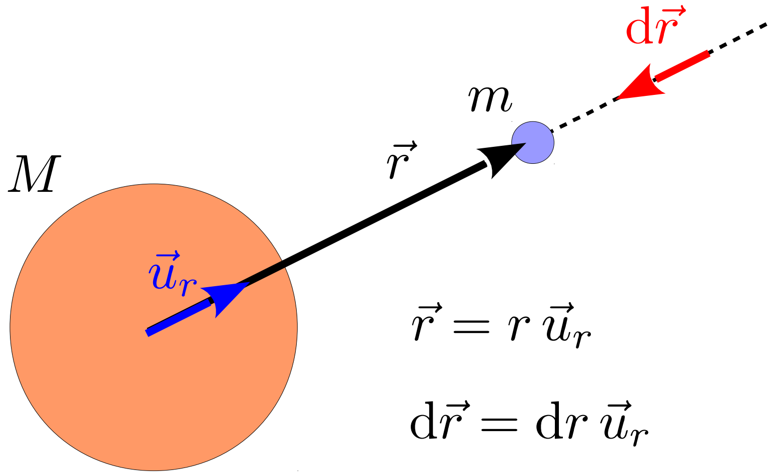
$$U_B - U_A = \int_A^B \mathrm{d}U = -\int_A^B \vec{F}_g \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{z_A}^{z_B} mg\,\mathrm{d}z = mg\int_{z_A}^{z_B} \mathrm{d}z = mg(z_B - z_A) = mg\Delta z$$

- Energía potencial gravitatoria (con una referencia arbitraria en z=0)

$$\boxed{U(z) = U(0) + mgz}$$

- Energía potencial gravitatoria para una masa puntual

$$\vec{F}_g = -G\,M\,m\frac{\vec{r}}{r^3}$$



$$\vec{r} = r\,\vec{u}_r$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r$$

$$\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = r\mathrm{d}r$$

- La masa m viene desde el infinito
- El trabajo realizado en un desplazamiento infinitesimal es

$$\delta W = \vec{F}_g\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -\frac{GMm}{r^3}\,\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -GMm\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -\mathrm{d}U$$

- Diferencia de energía potencial entre el infinito y P

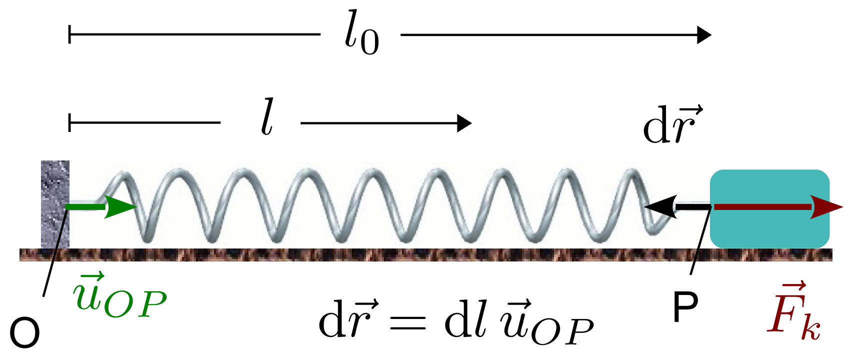
$$U_A - U_\infty = \int_\infty^{A}\mathrm{d}U = -\int_\infty^{\overset{B}{A}}\vec{F}_g\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_\infty^{r_A} GMm\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \left[-GMm\frac{1}{r}\right]_\infty^{r_A} = -\frac{GMm}{r_A}$$

- Energía potencial gravitatoria (tomando energía potencial cero en el infinito)

$$\boxed{U(r) = -\frac{GMm}{r}}$$

- Fuerza del muelle

$$\vec{F}_k = -k(l - l_0)\vec{u}_{OP}$$



- Trabajo realizado por **F**$_k$ en un desplazamiento infinitesimal

$$\delta W = \vec{F}_k \cdot \mathrm{d}\vec{r} = [-k(l - l_0)\vec{u}_{OP}] \cdot [\mathrm{d}l\,\vec{u}_{OP}] = -k(l - l_0)\,\mathrm{d}l = -\mathrm{d}U$$

- Energía potencial elástica (con referencia de potencial en l_0)

$$U(l) = U(l_0) - \int_{l_0}^{l} \vec{F}_k \cdot \mathrm{d}\vec{r} = U(l_0) + \int_{l_0}^{l} k(l - l_0)\mathrm{d}l$$

$$\boxed{U(l) = U(l_0) + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2}$$

Índice

Energía mecánica

- Se define como la suma de la energía cinética y la energía potencial total (una energía potencial por cada fuerza conservativa)

$$\boxed{E = T + U}$$

Si todas las fuerzas que realizan trabajo sobre una partícula son conservativas su energía mecánica se conserva

- Demostración

$$\delta W = \vec{F}_T^C \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \left| \begin{array}{l} -\mathrm{d}U \\ \mathrm{d}T \end{array} \right. \longrightarrow \mathrm{d}T + \mathrm{d}U = 0 \longrightarrow \mathrm{d}(T+U) = 0 \longrightarrow E = T + U = \mathrm{cte}$$

- Si hay fuerzas no conservativas el trabajo que realizan varía la energía mecánica

$$\delta W = \vec{F}_T^C \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \vec{F}^{NC} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \left| \begin{array}{c} -\mathrm{d}U + \delta W^{NC} \\ \mathrm{d}T \end{array} \right. \longrightarrow \delta W^{NC} = \mathrm{d}T + \mathrm{d}U = \mathrm{d}E \longrightarrow W^{NC} = \Delta E$$

Índice

- La cantidad de movimiento o momento lineal de una partícula es el producto de su masa por su velocidad

$$\boxed{\vec{p} = m\,\vec{v}}$$

[p] = kg m s^{-1}

- Teorema de la cantidad de movimiento

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\,\vec{v})}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} \Longrightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}$$

  - Es un enunciado alternativo de la Segunda Ley de Newton

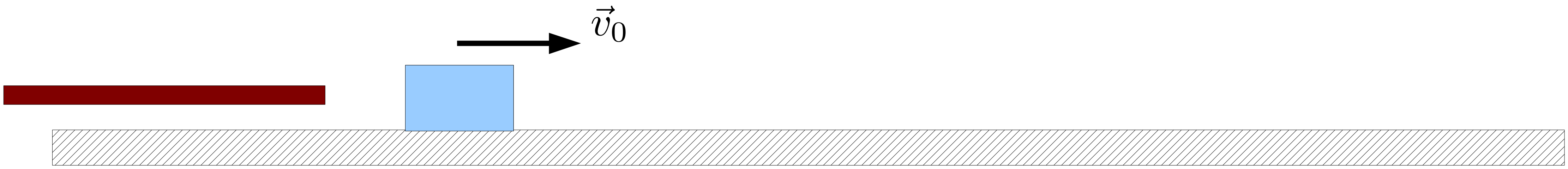
- Impulso mecánico (Teorema de la cantidad de movimiento en forma elemental y finita)

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_B) - \vec{p}(t_A) = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

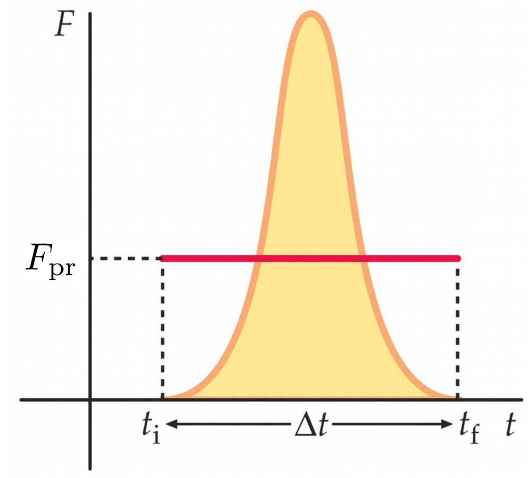
  - Es útil cuando la partícula sufre una fuerza en un intervalo de tiempo pequeño

$$\vec{F}_{media} \simeq \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

- Percusión sobre una partícula
  - Una fuerza actúa sobre un tiempo muy corto



  - Si Δt es muy pequeño se puede despreciar el movimiento de la partícula durante la colisión y considerar la fuerza media ejercida sobre la partícula



  - El problema después de la percusión se puede tratar como una partícula con velocidad inicial $\mathbf{v}_0$
  - La velocidad después de la percusión se calcula con el impulso mecánico

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_0 - \vec{0} = \int_{t_f}^{t_i} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \vec{I} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_0 = \frac{1}{m}\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,\mathrm{d}t \simeq \frac{1}{m}\vec{F}_{pr}\Delta t = \frac{\vec{I}}{m}$$

Si la fuerza neta que actúa sobre un punto material es nula se conserva su cantidad de movimiento

- Demostración

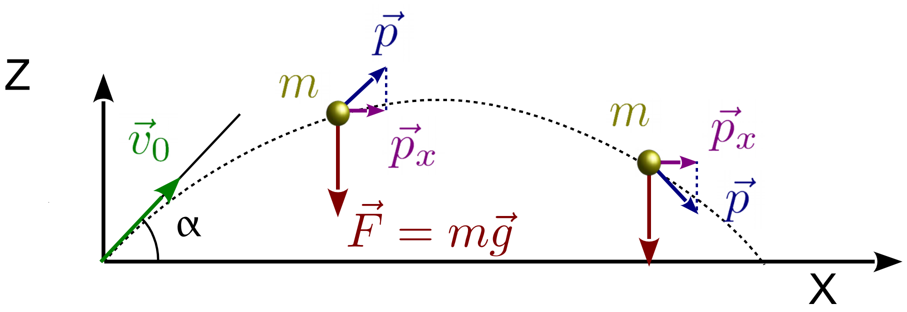
$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{F} = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \longrightarrow \vec{p} = \vec{\mathrm{cte}}$$

- Si la dirección de la fuerza es constante, se conserva la cantidad de movimiento en las direcciones perpendiculares a la fuerza

$$\vec{F} \perp \vec{n} \longrightarrow \vec{F} \cdot \vec{n} = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{n} = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}(\vec{p} \cdot \vec{n})}{\mathrm{d}t} = 0 \longrightarrow \vec{p} \cdot \vec{n} = \mathrm{cte}$$

- Ejemplo



$$\vec{F} \perp \vec{u}_x \longrightarrow \vec{p} \cdot \vec{u}_x = \mathrm{cte} \longrightarrow p_x = \mathrm{cte} \longrightarrow v_x = \mathrm{cte}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_z = (v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt) \end{cases}$$

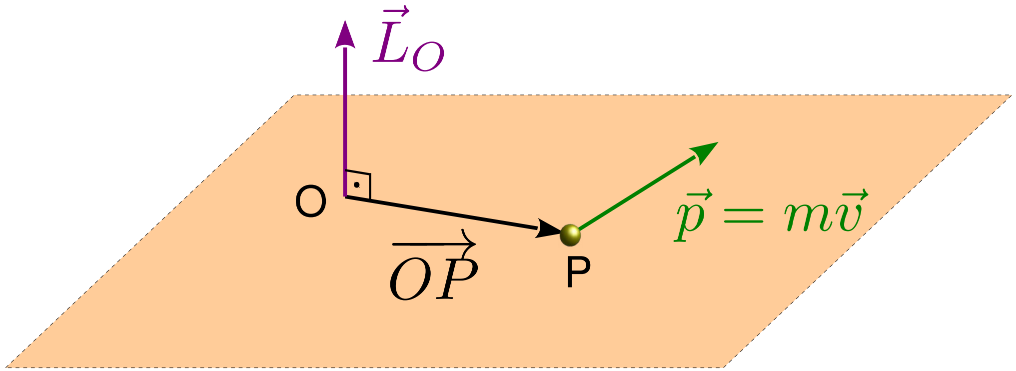
Índice

Momento cinético (o angular)

- El momento cinético de un punto material respecto a un punto O es el producto vectorial

$$\boxed{\vec{L}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{p} = \overrightarrow{OP} \times (m\vec{v})}$$

[L] = kg m^2 s^{-1}



- Teorema del Momento Cinético

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p} + \overrightarrow{OP} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \cancelto{0}{\vec{v} \times (m\vec{v})} + \overrightarrow{OP} \times \vec{F} = \vec{M}_O$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_O}$$

- Momento de una fuerza respecto a O: $\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}$

Si el momento repecto a un punto O de la fueza neta que actúa sobre una partícula es nulo, el momento cinético de la partícula respecto a O es constante

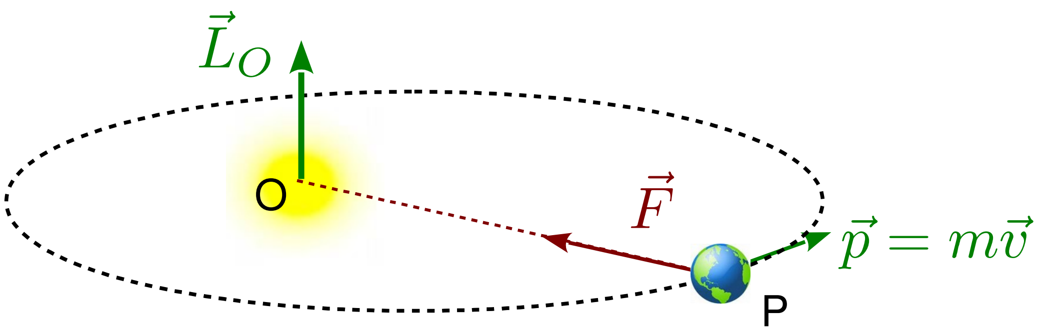
- Ejemplo: movimiento central. La dirección de la fuerza neta pasa siempre por O

$$\vec{F} \parallel \overrightarrow{OP} \longrightarrow \overrightarrow{M}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{F} = \vec{0} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \longrightarrow \overrightarrow{L}_O = \vec{\mathrm{cte}}$$

  - Conservación parcial: Si el momento de la fuerza es perpendicular a un vector **n** fijo, se conserva la proyección del momento cinético sobre **n**

$$\overrightarrow{M}_O \perp \vec{n} \longrightarrow \overrightarrow{M}_O \cdot \vec{n} = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{n} = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}(\vec{L}_O \cdot \vec{n})}{\mathrm{d}t} = 0 \longrightarrow \vec{L}_O \cdot \vec{n} = \mathrm{cte}$$

  - Ejemplo: movimiento de traslación de la Tierra



$$\vec{F} \parallel \overrightarrow{OP} \longrightarrow \overrightarrow{M}_O = \vec{0} \longrightarrow \vec{L}_O = \vec{\mathrm{cte}}$$