Departamento de Física Aplicada III
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Camino de los Descubrimientos s/n
41092 Sevilla

MECÁNICA RACIONAL, 2° CURSO, INGENIERÍA CIVIL, 2023/24

BOLETÍN DE PROBLEMAS DEL TEMA 2: MOVIMIENTO RELATIVO

1. Los triedros $O_1X_1Y_1Z_1$ y $OX_0Y_0Z_0$ están definidos de modo que sus orígenes y los ejes O_1Z_1 coinciden. El triedro "1" está en reposo, mientras que el triedro "0" gira respecto al "1" con velocidad angular uniforme $\vec{\omega}_{01} = \omega\,\vec{k}_1 = \omega\,\vec{k}_0$, de modo que el ángulo θ indicado en la figura depende del tiempo como $\theta(t) = \omega t$.

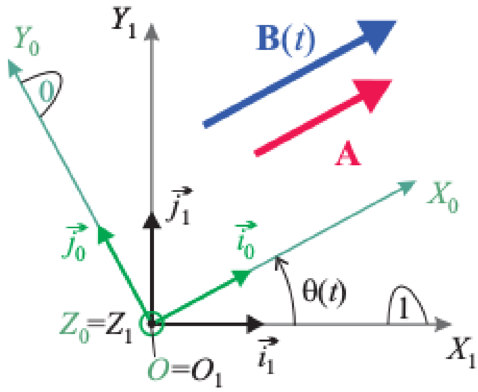
   a) Calcula las derivadas respecto al tiempo de los vectores de la base del triedro "0" vistos desde el triedro "1".

   b) Dado el vector $\vec{A}(t) = a\,\vec{\imath}_0$, con a constante, calcula

   $$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_1, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_0$$

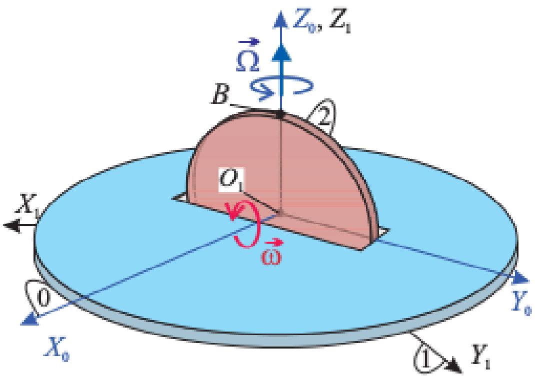
   Expresa el resultado en los vectores de la base móvil (triedro "0") y la base fija (triedro "1).

   c) Haz el mismo cálculo para el vector $\vec{B} = bt\,\vec{\imath}_0$, siendo b una constante.



2. Una plataforma circular gira alrededor de un eje perpendicular a ella que pasa por su centro con velocidad angular uniforme ω. Un coche se mueve radialmente desde el centro de la plataforma hacia fuera con velocidad uniforme v_c. Encunetra la expresión de la velocidad del coche visto desde la plataforma y desde un observador en reposo absoluto.

3. En la figura se muestra un disco de radio R (sólido "2"), que gira con velocidad angular $\omega_{20} = \omega$, constante, alrededor del eje perpendicular a él, O_1X_0. Dicho eje está rígidamente unido a una plataforma (sólido "0"), que gira también con velocidad angular constante $\omega_{01} = \Omega$, alrededor del eje vertical O_1Z_1 de un sistema de referencia fijo $O_1X_1Y_1Z_1$ (sólido "1"). Determina las magnitudes cinemáticas $\vec{v}^{\,B}_{21}$ y $\vec{a}^{\,B}_{21}$ en el instante representado en la figura.

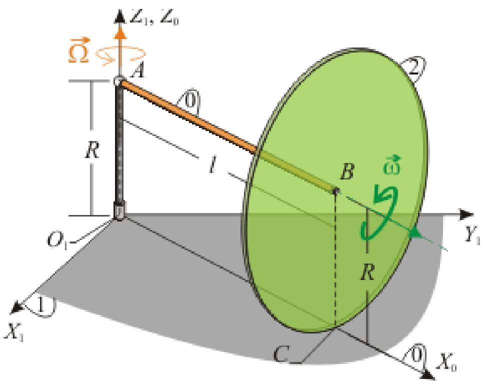


4. El sistema de la figura está formado por una varilla AB de longitud l (sólido ”0”), cuyo extremo A está fijado en el eje vertical O_1Z_1, a una altura R sobre el plano horizontal fijo $O_1X_1Y_1$ (sólido ”1”). La varilla AB gira alrededor de O_1Z_1 con una velocidad angular constante Ω, permaneciendo siempre perpendicular a dicho eje vertical fijo. El extremo B del sólido “0” está articulado al centro de un disco de radio R (sólido ”2”), de modo que la varilla es siempre perpendicular al disco. El disco gira con una velocidad angular constante ω, coincidiendo su eje de giro con la varilla.

   a) Caracteriza los movimientos $\{01\}$, $\{20\}$ y $\{21\}$ (reducciones cinemáticas).

   b) Obtén la expresión de la velocidad $\vec{v}^{C}_{21}$ del punto de contacto del disco con el plano fijo $O_1X_1Y_1$, (punto C) en términos de los datos del problema. ¿Qué relación debe existir entre las velocidades angulares ω y Ω para que el disco ruede sin deslizar sobre el plano?

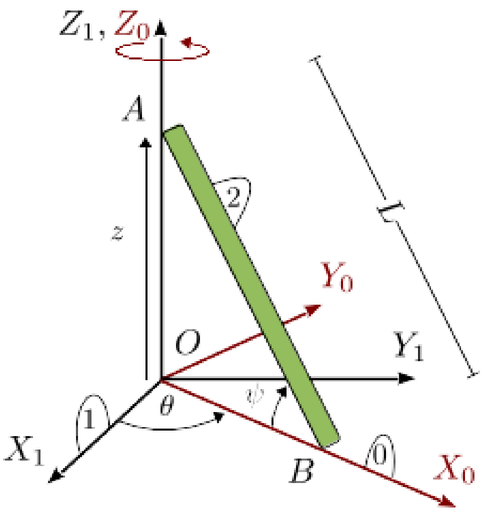
   c) Obtén las expresiones de la aceleración angular del movimiento 21 y de la aceleración $\vec{a}^{B}_{21}$ del centro del disco (punto B). Calcula la aceleración del punto de contacto C perteneciente al disco cuando éste rueda sin deslizar sobre el plano $O_1X_1Y_1$.



5. El extremo A de una barra de longitud L desliza sobre el eje OZ_1. La barra gira respecto al eje OZ_1, de modo que está siempre contenida en el plano OX_0Z_0 y el punto B está siempre en el eje OX_0. Este plano gira respecto al eje OZ_1 con eje permanente OZ_0. En el instante inicial el punto A coincidía con O y el punto B estaba sobre el eje OX_1.

   a) Determina las reducciones cinemáticas de los movimientos $\{01\}$, $\{20\}$ y $\{21\}$, así como sus derivadas. El resultado debe quedar en función de z, ψ, θ y sus derivadas temporales.

   b) Supongamos que la velocidad del punto A respecto al eje es constante y de magnitud v_0. Encuentra la ecuación diferencial que determina la función $\psi(t)$.

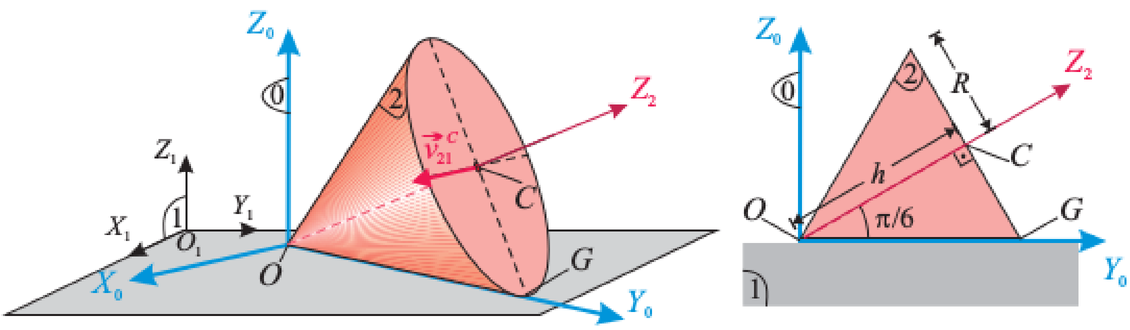


6. Un cono recto de radio R en su base y altura $h = \sqrt{3}R$ (sólido “2”), se mueve rodando sin deslizar sobre el plano fijo $O_1X_1Y_1$ (sólido “1”), en el cual apoya, en cada instante, una generatriz $\overline{OG}$. La velocidad del centro C de la base del cono, medida desde el sistema de referencia ligado al sólido “1”, tiene módulo constante de valor v_0. para facilitar la descripción del movimiento, se introduce un sistema de referencia $OX_0Y_0Z_0$ (sólido “0”) con origen O en el vértice del cono, el eje OZ_0 siempre perpendicular al plano fijo “1”, y cuyo eje OY_0 contiene en cada instante a la generatriz del cono en contacto con dicho plano.

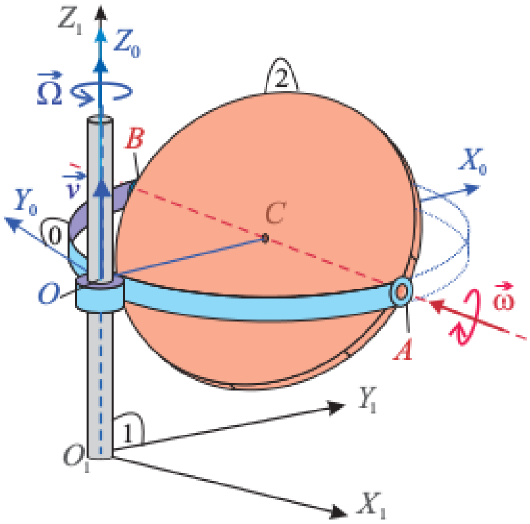
   a) Reducciones cinemáticas de los movimientos relativos.

   b) Ejes de rotación y tipos de movimientos.

   c) Campos de aceleraciones.



7. El sistema de la figura consiste en una horquilla semicircular (sólido "0"), siempre contenida en un plano paralelo al fijo $O_1X_1Y_1$ (sólido "1"). El punto O de la horquilla (siempre el mismo) se desplaza con velocidad v a lo largo del eje O_1Z_1, a la vez que este sólido "0" gira con velocidad angular constante Ω alrededor de dicho eje fijo. Un disco de radio R (sólido "2"), cuyo perímetro se ajusta a la horquilla, se mueve respecto a "0" girando alrededor de ul diámetro común AB, con velocidad angular constante ω. Teniendo en cuenta que los valores v, Ω y ω pueden ser positivos y negativos, determina:



   a) La reducción cinemática del movimiento $\{21\}$ ¿Bajo que condiciones puede ser una rotación instantánea?

   b) El eje de rotación y mínimo deslizamiento del movimiento $\{21\}$. ¿Cuál debe ser el valor de v para que el EIRMD pase por el centro del diso? Calcula en este caso la derivada temporal de la reducción canónica.

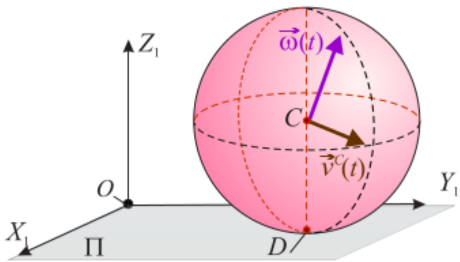
8. Una esfera de radio b (sólido "2") se mueve en contacto con un plano $\Pi = OX_1Y_1$ (sólido "1"). El movimiento de la esfera queda completamente caracterizado, para todo instante de tiempo, por la reducción cinemática:

$$\vec{\omega}_{21}(t) = \frac{v_0}{b}\left(1 - \frac{v_0}{b}t\right)(2\,\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1 + \vec{k}_1); \qquad \vec{v}^{\,C}_{21}(t) = v_0\left(\left(1 - \frac{v_0}{b}t\right)\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1\right)$$

donde C es el centro de la esfera, y v_0 un valor constante conocido.

   a) Indica los tipos de movimientos elementales que ejecuta la esfera a lo largo del tiempo.

   b) Indica, para todo instante de tiempo, si la esfera rueda, pivota o desliza en el punto de contacto con el plano.



9. Una partícula de masa m se encuentra en el interior de un tubo estrecho, el cual gira con velocidad angular uniforme ω en torno a un eje perpendicular al del tubo. Obtén las ecuaciones de movimiento para la partícula utilizando un sistema de referencia en reposo y otro asociado con la varilla (no inercial).