Tema 8: Dinámica del sólido rígido vinculado

Mecánica Racional, 2º, Grado en Ingeniería Civil

Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Índice

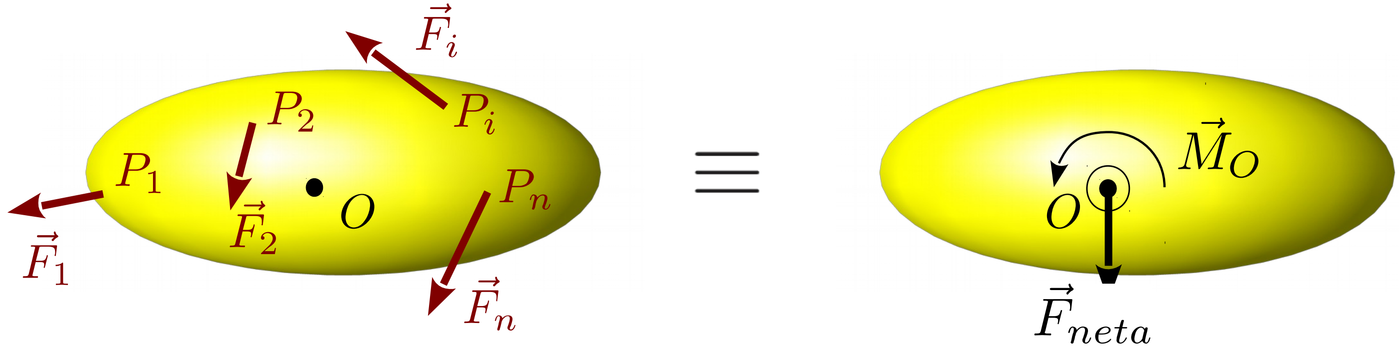
- Introducción
- Recordatorio de vectores deslizantes
- Principio de liberación
- Teoremas generales
- Desvinculación
  - Pares de enlace más usuales
- Ángulos de Euler y movimiento giroscópico

Introducción

- En muchas aplicaciones los sistemas se pueden considerar sólidos rígidos vinculados
- La clave es aplicar el Principio de Liberación a cada contacto entre sólidos
- Una vez liberado, a cada sólido se le aplican los teoremas generales
- El proceso de desvinculación y el concepto de par cinemático guardan una gran relación

Índice

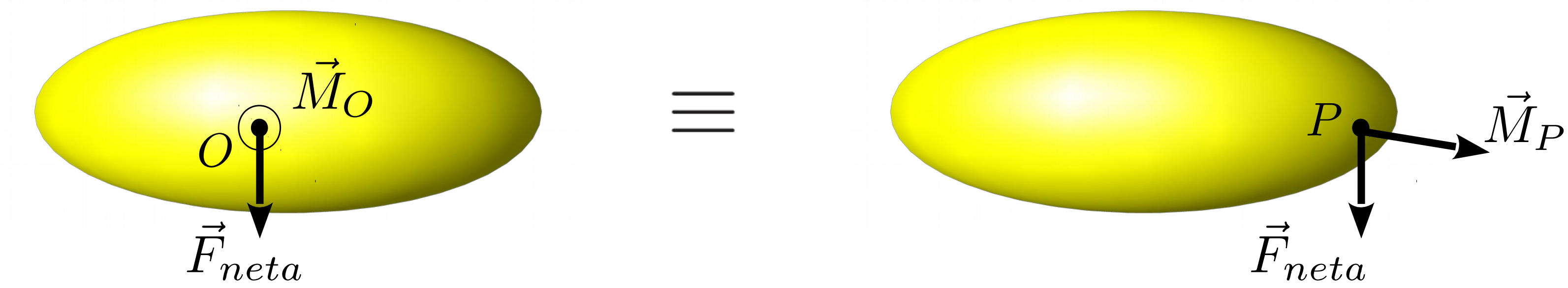
- Las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido son vectores deslizantes
- Dado un conjunto de fuerzas (vectores deslizantes), son dinámicamente equivalentes a una fuerza y un par: Reducción del s.v.d. en un punto



$$\vec{F}_{neta} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i$$

- Equivalencia dinámica quiere decir que el sistema original y la reducción producen el mismo movimiento del sólido
- Pero la distribución de tensiones internas es diferente

- Podemos cambiar el centro de reducción



$$R(O) = \{\vec{F}_{neta}, \vec{M}_O\} \qquad R(P) = \{\vec{F}_{neta}, \vec{M}_P\}$$

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{F}_{neta} \times \overrightarrow{OP}$$

Índice

- Introducción
- Recordatorio de vectores deslizantes
- Principio de liberación
- Desvinculación
  - Pares de enlace más usuales
- Ángulos de Euler y movimiento giroscópico

Principio de liberación

Todo sistema material sometido a vínculos puede ser tratado como libre de vínculos con tal de añadir a las fuerzas y momentos activos las llamadas fuerzas de reacción vincular y momentos de reacción vincular

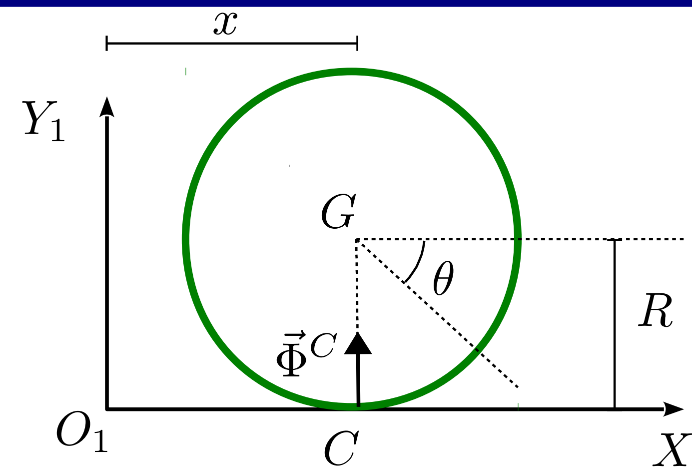
- Las fuerzas de reacción vincular se aseguran de que el vínculo se cumpla
- Al desvincular puede aparecer en cada vínculo una fuerza de reacción vincular y un momento de reacción vincular
  - Antes de resolver el problema sólo se conoce la dirección de las fuerzas y momentos de reacción
  - Su magnitud y sentido se adaptan a las fuerzas y momentos activos para asegurar que el vínculo se cumple
- También se puede hacer una desvinculación global, usando las reducciones cinemática y vincular

Índice

- Una traslación no libre implica una fuerza de reacción vincular
- Una rotación no libre implica un momento de reacción vincular
- Llamaremos reacción vincular tanto a una fuerza como un momento vinculares
- Clasificación de movimientos no libres
  - Movimiento prohibido (vínculo prohibitivo)
    - Potencia nula
  - Movimiento interligado a otros movimientos
    - Potencia nula
  - Movimiento restringido (o reónomo)
    - Potencia no nula (en general)
    - Ejemplo: punto moviéndose con velocidad fijada

      rotación con velocidad angular fijada

- Rueda que **rueda y desliza** (liso)

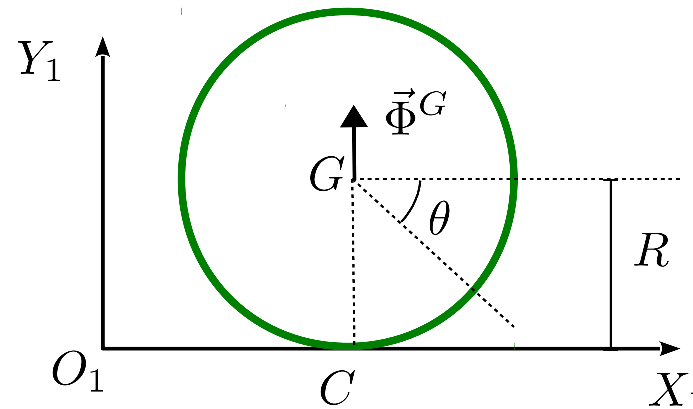


- Desvinculación punto a punto

$$\vec{v}^C = v_x^C\,\vec{\imath}_1 + 0\,\vec{\jmath}_1 \qquad \vec{\omega} = -\dot{\theta}\,\vec{k}$$

$$\vec{\Phi}^C = 0\,\vec{\imath}_1 + \Phi_y\,\vec{\jmath}_1 \qquad \vec{\Gamma}_C = 0\,\vec{k}$$

- Desvinculación global en G



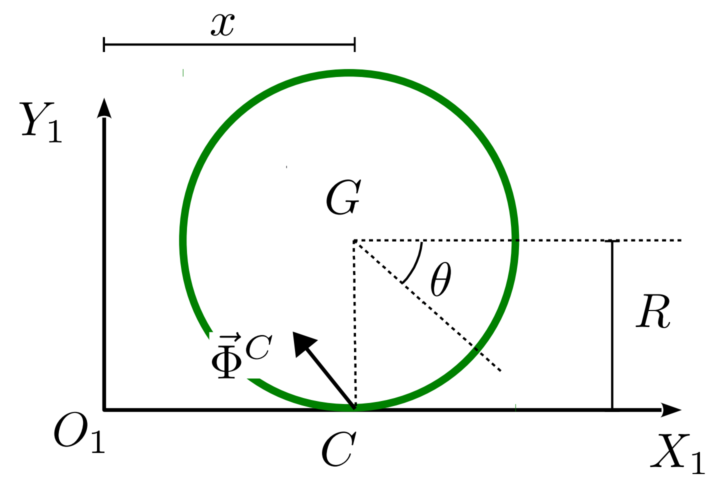
$$\vec{v}^G = \dot{x}\,\vec{\imath}_1 + 0\,\vec{\jmath}_1 \qquad \vec{\omega} = -\dot{\theta}\,\vec{k}$$

$$\vec{\Phi}^G = 0\,\vec{\imath}_1 + \Phi_y\,\vec{\jmath}_1 \qquad \vec{\Gamma}_G = 0\,\vec{k}$$

- Hay 3 incógnitas $\{x, \theta, \Phi_y\}$
- Tenemos 3 ecuaciones $\mathrm{T.C.M.} \rightarrow 2\,\mathrm{ec.}$ $\mathrm{T.M.C.} \rightarrow 1\,\mathrm{ec.}$
- Un vínculo prohibitivo $y^C \geq 0$
  - Conocidas las fuerzas y momentos activos podemos resolver el problema

- Rueda que **rueda y no desliza** en el punto de contacto
- Reducción cinemática en C

$$\vec{v}^C = 0\,\vec{\imath}_1 + 0\,\vec{\jmath}_1 \qquad \vec{\omega} = -\dot{\theta}\,\vec{k}$$



- Ligadura de rodadura sin deslizamiento

$$\vec{v}^G = \dot{x}\,\vec{\imath}_1$$

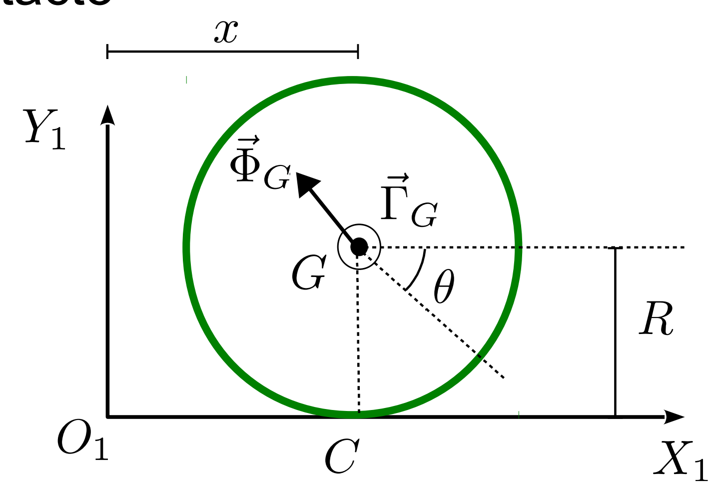
$$\vec{v}^G = \vec{v}^C + \vec{\omega} \times \overrightarrow{CG} \Longrightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$$

- Desvinculación punto a punto

$$\vec{\Phi}^C = \Phi_x\,\vec{\imath}_1 + \Phi_y\,\vec{\jmath}_1 \qquad \vec{\Gamma}_C = 0\,\vec{k}$$

- Hay 3 incógnitas $\{\theta, \Phi_x, \Phi_y\}$
- Tenemos 3 ecuaciones $\mathrm{T.C.M.} \to 2\,\mathrm{ec.}$ $\mathrm{T.M.C.} \to 1\,\mathrm{ec.}$
- Un vínculo prohibitivo $y^C \geq 0$
- Un vínculo interligado $\dot{x} = R\dot{\theta}$
  - Conocidas las fuerzas y momentos activos podemos resolver el problema

- Rueda que **rueda y no desliza** en el punto de contacto
- Reducción cinemática en G



$$\vec{v}^G = \dot{x}\,\vec{\imath}_1 + 0\,\vec{\jmath}_1 \qquad \vec{\omega} = -\dot{\theta}\,\vec{k}$$

- Ligadura de rodadura sin deslizamiento

$$\vec{v}^G = \vec{v}^C + \vec{\omega}\times\overrightarrow{CG} \Longrightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$$

$$\vec{v}^G = R\dot{\theta}\,\vec{\imath}_1 + 0\,\vec{\jmath}_1 \qquad \vec{\omega} = -\dot{\theta}\,\vec{k}$$

- Desvinculación global en G

$$\vec{\Phi}_G = \Phi_x\,\vec{\imath}_1 + \Phi_y\,\vec{\jmath}_1 \qquad \vec{\Gamma}_G = \Gamma\,\vec{k}$$

- Hay 4 incógnitas $\{\theta, \Phi_x, \Phi_y, \Gamma\}$
- Tenemos 3 ecuaciones

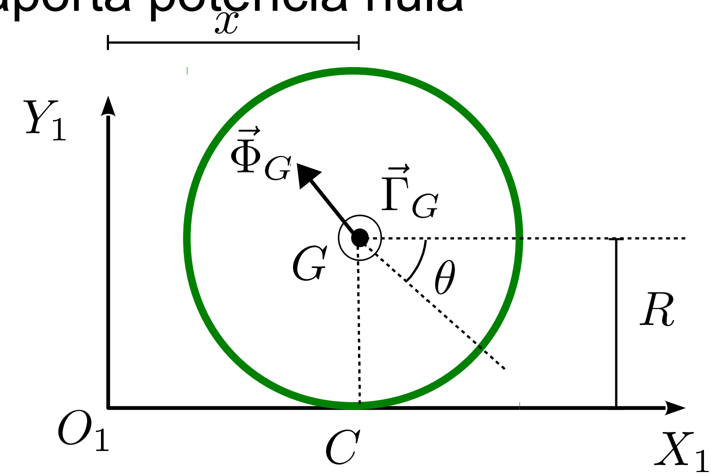
$\mathrm{T.C.M.} \rightarrow 2\,\mathrm{ec.}$

$\mathrm{T.M.C.} \rightarrow 1\,\mathrm{ec.}$

¿?

Vínculos prohibitivo e interligado: desvinculación global

- La relación de cierre es que el vínculo interligado aporta potencia nula



$$P_{21} = \vec{\Phi}_G \cdot \vec{v}^G + \vec{\Gamma}_G \cdot \vec{\omega} = \dot{x}\Phi_x - \Gamma\dot{\theta} = 0$$

$$\Longrightarrow \Gamma = R\Phi_x$$

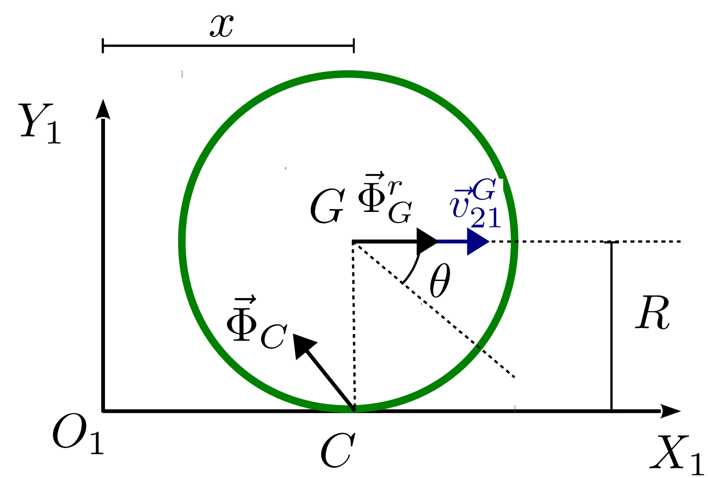
- Hay 4 incógnitas $\{\theta, \Phi_x, \Phi_y, \Gamma\}$
- Tenemos 4 ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{T.C.M.} \to 2\,\mathrm{ec.} \\ \mathrm{T.M.C.} \to 1\,\mathrm{ec.} \\ P_{21} = 0 \to 1\,\mathrm{ec.} \end{array}\right|$$

- Conocidas las fuerzas y momentos activos podemos resolver el problema

- Rueda que **rueda y no desliza** con $v^G=v(t)$ conocido
- Reducción cinemática en C

$$\vec{v}^C = 0\,\vec{\imath}_1 + 0\,\vec{\jmath}_1 \qquad \vec{\omega} = -\dot{\theta}\,\vec{k}$$



- Ligadura de rodadura sin deslizamiento

$$\vec{v}^G = \dot{x}\,\vec{\imath}_1 = v(t)\,\vec{\imath}_1$$

$$\vec{v}^G = \vec{v}^C + \vec{\omega}\times\overrightarrow{CG} \Longrightarrow \dot{\theta} = \dot{x}/R = v(t)/R$$

- Desvinculación vincular punto a punto

$$\vec{\Phi}_C = \Phi_x\,\vec{\imath}_1 + \Phi_y\,\vec{\jmath}_1 \qquad \vec{\Gamma}_C = 0\,\vec{k}$$

$$\vec{\Phi}^r_G = \Phi_r\,\vec{\imath}_1$$

- Hay 3 incógnitas $\{\Phi_x, \Phi_y, \Phi_r\}$
- Tenemos 3 ecuaciones $\mathrm{T.C.M.} \to 2\,\mathrm{ec.}$ $\quad \mathrm{T.M.C.} \to 1\,\mathrm{ec.}$

- Un vínculo prohibitivo $y^C \geq 0$
- Un vínculo interligado $\dot{\theta} = \dot{x}/R$
- Un vínculo restringido $\dot{x} = v(t)$

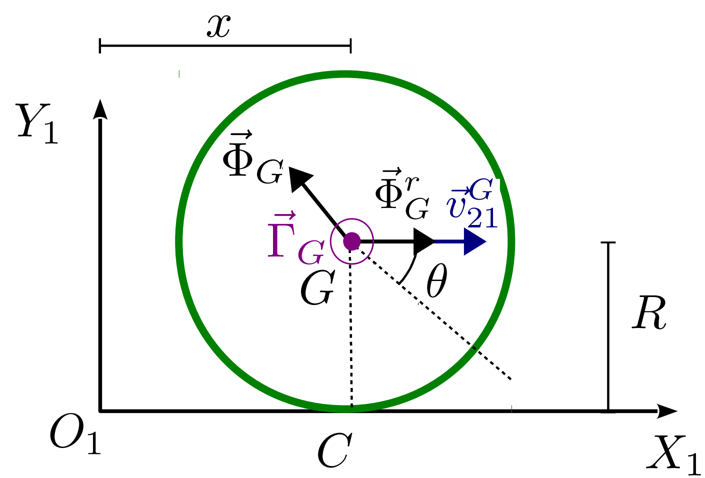
- Rueda que **rueda y no desliza** con v^G=v(t) conocido
- Reducción cinemática en G

$$\vec{v}^G = v(t)\,\vec{\imath}_1 + 0\,\vec{\jmath}_1 \qquad \vec{\omega} = -\dot{\theta}\,\vec{k}$$

- Ligadura de rodadura sin deslizamiento

$$\vec{v}^G = \dot{x}\,\vec{\imath}_1 = v(t)\,\vec{\imath}_1$$

$$\vec{v}^C = \vec{v}^G + \vec{\omega}\times\overrightarrow{GC} \Longrightarrow \dot{\theta} = \dot{x}/R = v(t)/R$$



- Desvinculación vincular global

$$\vec{\Phi}_G = \Phi_x\,\vec{\imath}_1 + \Phi_y\,\vec{\jmath}_1 \qquad \vec{\Gamma}_C = \Gamma\,\vec{k}$$

$$\vec{\Phi}^r_G = \Phi_r\,\vec{\imath}_1$$

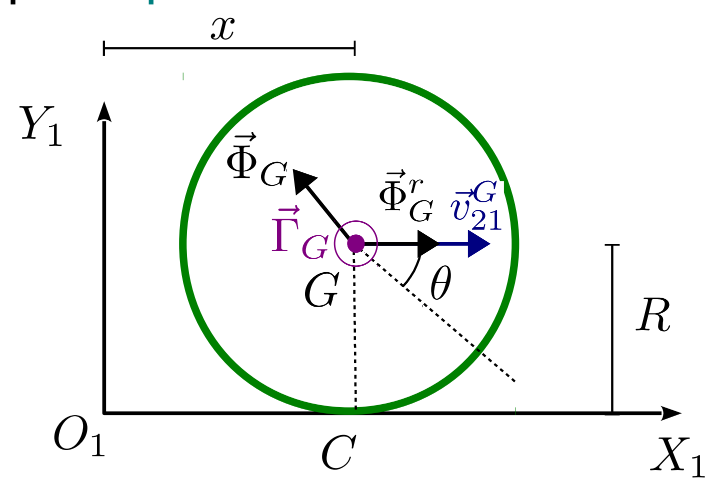
- Hay 4 incógnitas $\{\Phi_x, \Phi_y, \Gamma, \Phi_r\}$
- Tenemos 3 ecuaciones $\mathrm{T.C.M.} \to 2\,\mathrm{ec.}$ $\mathrm{T.M.C.} \to 1\,\mathrm{ec.}$

¿?

- La relación de cierre es que el vínculo interligado aporta potencia nula

$$P_{21} = \vec{\Phi}_G \cdot \vec{v}^G + \vec{\Gamma}_G \cdot \vec{\omega} = \dot{x}\Phi_x - \Gamma\dot{\theta} = 0$$

$$\Longrightarrow \Gamma = R\Phi_x$$



- Hay 4 incógnitas $\{\Phi_x, \Phi_y, \Gamma, \Phi_r\}$
- Tenemos 4 ecuaciones

$$\mathrm{T.C.M.} \to 2\,\mathrm{ec.}$$
$$\mathrm{T.M.C.} \to 1\,\mathrm{ec.}$$
$$P_{21} = 0 \to 1\,\mathrm{ec.}$$

- En este caso determinamos las reacciones a partir del movimiento conocido y las fuerzas activas

- Solución del problema

T.C.M.

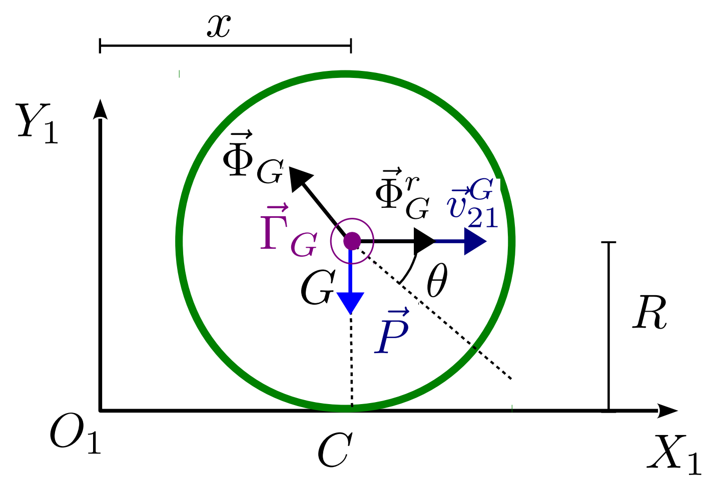
$$\vec{\Phi}_G + \vec{\Phi}^r_G + \vec{P} = M\,\dot{\vec{v}}^G \to \left\{ \begin{array}{l} \Phi_x + \Phi_r = M\dot{v} \\ \Phi_y = P \end{array} \right.$$

T.M.C.

$$\vec{\Gamma}_G = -I\ddot{\theta}\,\vec{k} \to \Gamma = -I\ddot{\theta} = -I\frac{\dot{v}}{R}$$

$P_{21} = 0$

$$\vec{\Phi}_G \cdot \vec{v}^G + \vec{\Gamma}_G \cdot \vec{\omega} \to \Gamma = R\Phi_x$$



$$\boxed{\Phi_x = -\frac{I}{R^2}\dot{v} \qquad \Phi_y = P \qquad \Gamma = -\frac{I}{R}\dot{v} \qquad \Phi_r = \left(M + \frac{I}{R^2}\right)\dot{v}}$$

- Potencia aportada por el vínculo reónomo

$$P_r = \vec{\Phi}^r_G \cdot \vec{v}^G = \Phi_r\, v \neq 0$$

Índice

- Introducción
- Recordatorio de vectores deslizantes
- Principio de liberación
- Teoremas generales
- Desvinculación
  - Pares de enlace más usuales
- Ángulos de Euler y movimiento giroscópico

- Suponemos dos sólidos con contactos lisos de modo que algunos movimientos están prohibidos
- Reducción cinemática genérica del par cinemático $\{\vec{v}^A, \vec{\omega}\}$

$$\vec{v}^A = [v_1, v_2, v_3] \qquad \vec{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$$

- Reducción vincular genérica del par de enlace $\{\vec{\Phi}, \vec{\Gamma}\}$

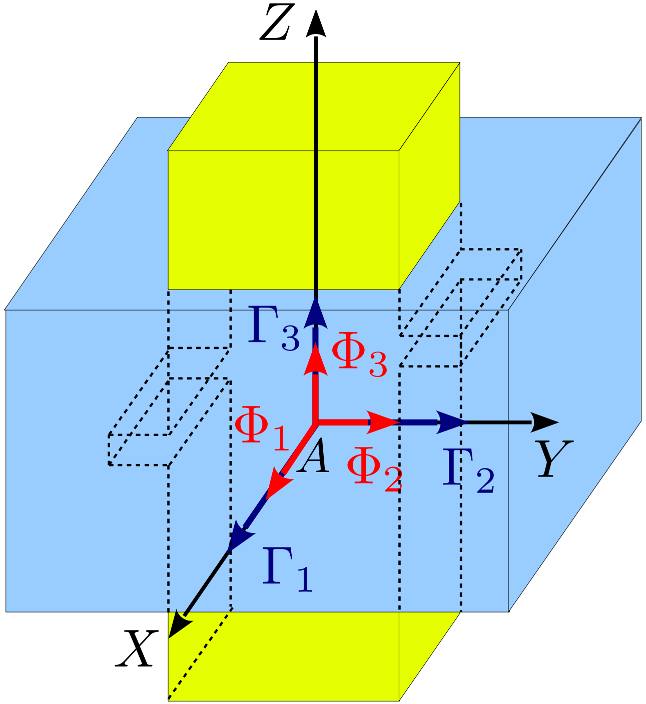
$$\vec{\Phi} = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3] \qquad \vec{\Gamma} = [\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3]$$

- Un cero en una componente de la reducción cinemática implica que la componente asociada en la reducción vincular puede ser no nula
- En un movimiento plano las reducciones genéricas son

$$\vec{v}^A = [v_1, v_2, 0] \qquad \vec{\omega} = [0, 0, \omega_3]$$

$$\vec{\Phi} = [0, 0, \Phi_3] \qquad \vec{\Gamma} = [\Gamma_1, \Gamma_2, 0]$$

- Par de empotramiento



- Reducción cinemática en A

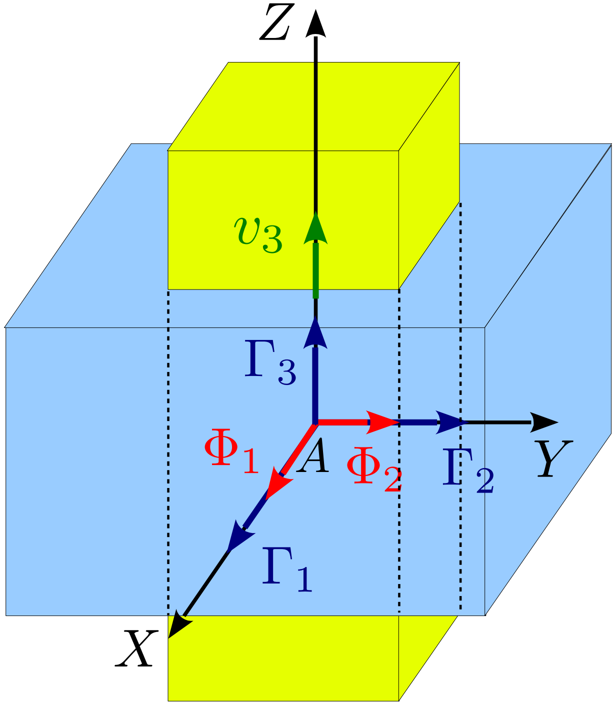
$$\vec{v}^A = [0, 0, 0] \qquad \vec{\omega} = [0, 0, 0]$$

- Reducción vincular en A

$$\vec{\Phi} = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3] \qquad \vec{\Gamma} = [\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3]$$

- 0 grados de libertad: no hay movimiento posible

- Par prismático



- Reducción cinemática en A

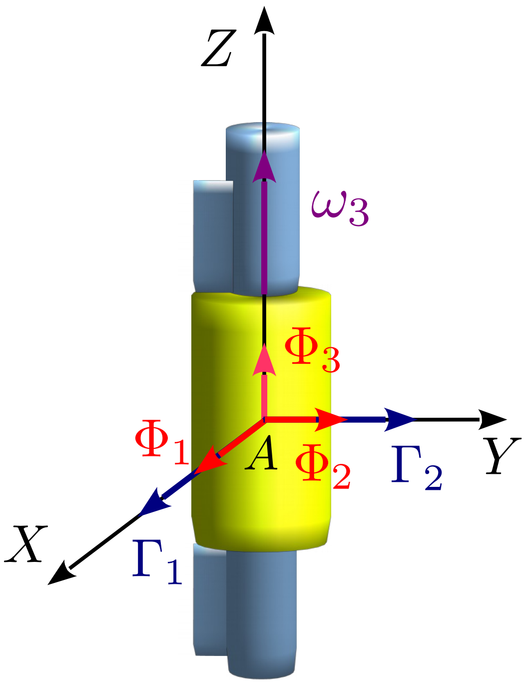
$$\vec{v}^A = [0, 0, v_3] \qquad \vec{\omega} = [0, 0, 0]$$

- Reducción vincular en A

$$\vec{\Phi} = [\Phi_1, \Phi_2, 0] \qquad \vec{\Gamma} = [\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3]$$

- 1 grado de libertad

- Par de revolución



- Reducción cinemática en A

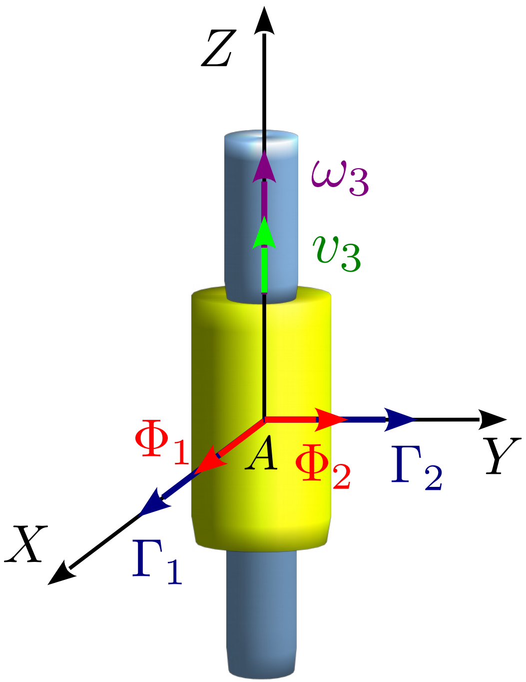
$$\vec{v}^A = [0, 0, 0] \qquad \vec{\omega} = [0, 0, \omega_3]$$

- Reducción vincular en A

$$\vec{\Phi} = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3] \qquad \vec{\Gamma} = [\Gamma_1, \Gamma_2, 0]$$

- 1 grado de libertad
- Corresponde a un cojinete radial

- Par cilíndrico



- Reducción cinemática en A

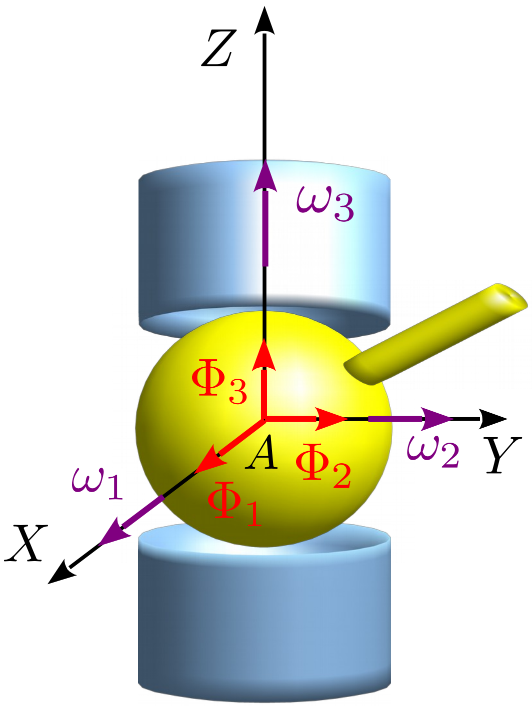
$$\vec{v}^A = [0, 0, v_3] \qquad \vec{\omega} = [0, 0, \omega_3]$$

- Reducción vincular en A

$$\vec{\Phi} = [\Phi_1, \Phi_2, 0] \qquad \vec{\Gamma} = [\Gamma_1, \Gamma_2, 0]$$

- 2 grados de libertad
- Corresponde a un cojinete axial

- Par esférico



- Reducción cinemática en A

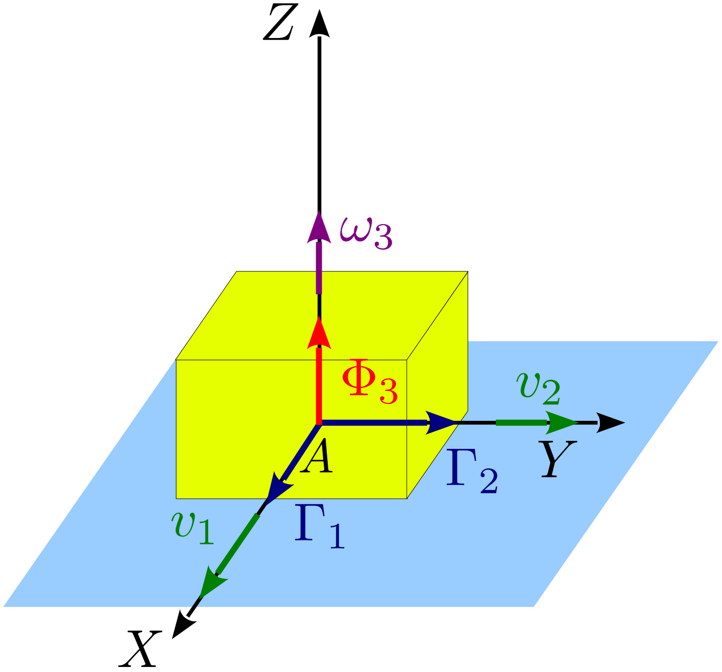
$$\vec{v}^A = [0, 0, 0] \qquad \vec{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$$

- Reducción vincular en A

$$\vec{\Phi} = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3] \qquad \vec{\Gamma} = [0, 0, 0]$$

- 3 grados de libertad
- Corresponde a una rótula o una articulación

- Par plano



- Reducción cinemática en A

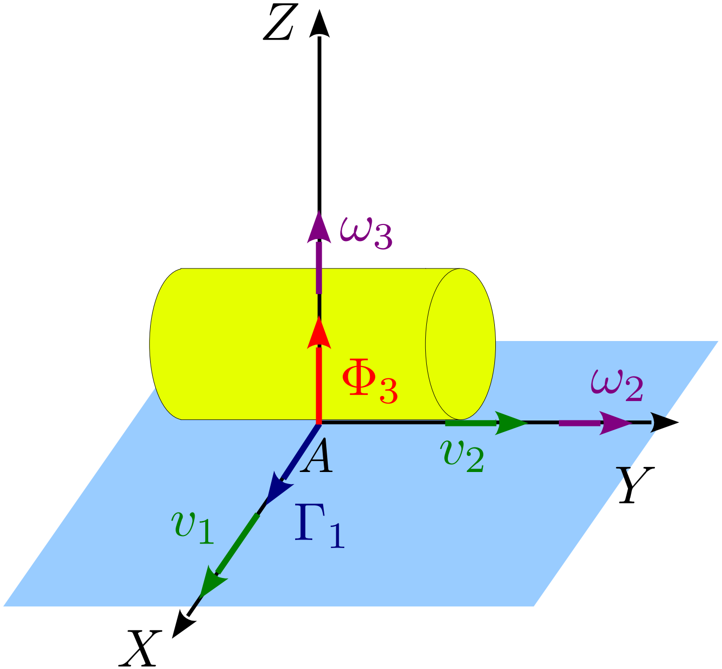
$$\vec{v}^A = [v_1, v_2, 0] \qquad \vec{\omega} = [0, 0, \omega_3]$$

- Reducción vincular en A

$$\vec{\Phi} = [0, 0, \Phi_3] \qquad \vec{\Gamma} = [\Gamma_1, \Gamma_2, 0]$$

- 3 grados de libertad
- Es un movimiento plano
- El vínculo es unilateral $\Phi_3 \geq 0$

- Par cilindro-plano



- Reducción cinemática en A

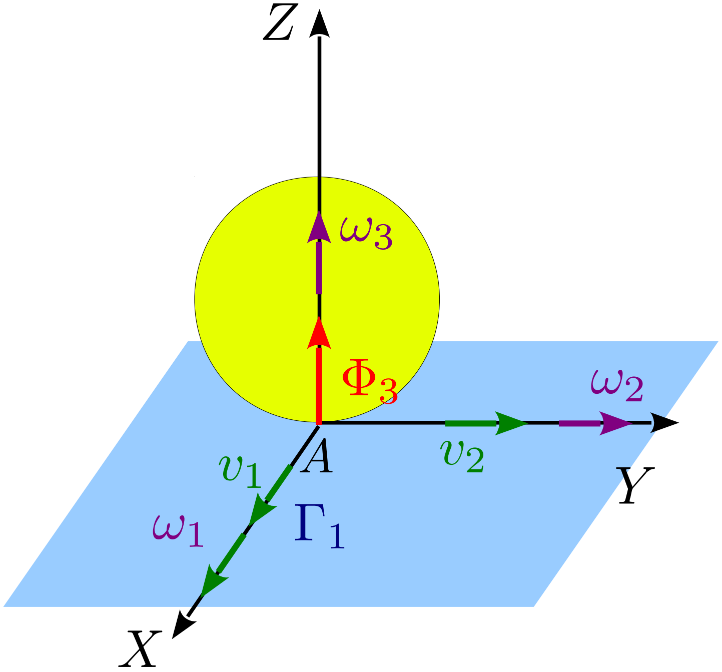
$$\vec{v}^A = [v_1, v_2, 0] \qquad \vec{\omega} = [0, \omega_2, \omega_3]$$

- Reducción vincular en A

$$\vec{\Phi} = [0, 0, \Phi_3] \qquad \vec{\Gamma} = [\Gamma_1, 0, 0]$$

- 4 grados de libertad
- El vínculo es unilateral $\Phi_3 \geq 0$

- Par esfera-plano



- Reducción cinemática en A

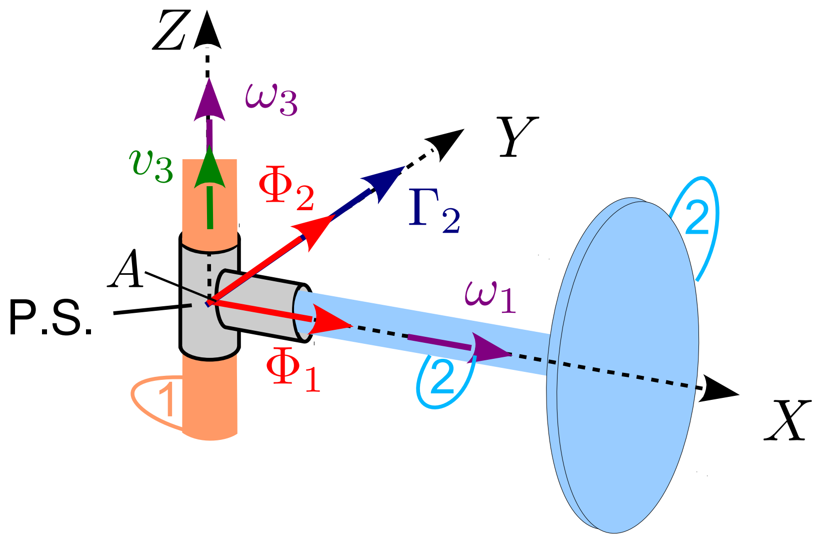
$$\vec{v}^A = [v_1, v_2, 0] \qquad \vec{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$$

- Reducción vincular en A

$$\vec{\Phi} = [0, 0, \Phi_3] \qquad \vec{\Gamma} = [0, 0, 0]$$

- 5 grados de libertad
- El vínculo es unilateral $\Phi_3 \geq 0$

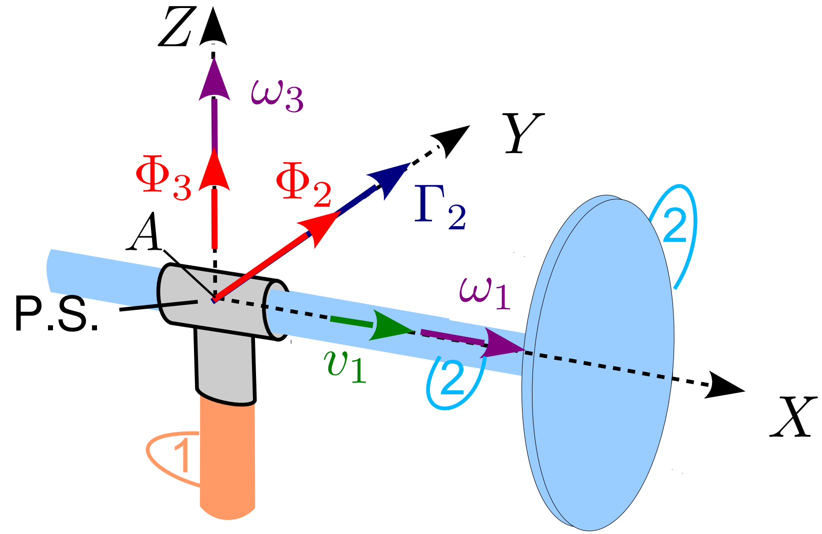
- Son sólidos de masas y dimensiones despreciables que conectan entre sí sólidos con masa
- Transmiten sin modificar las acciones entre dos sólidos con masa
- Pueden combinar varios pares de enlace



$$\vec{v}^A_{21} = [0, 0, v_3] \qquad \vec{\omega}_{21} = [\omega_1, 0, \omega_3]$$

$$\vec{\Phi}_{21} = [\Phi_1, \Phi_2, 0] \qquad \vec{\Gamma}_{21} = [0, \Gamma_2, 0]$$

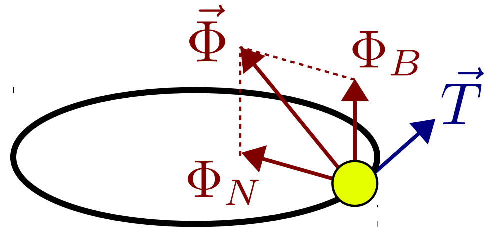
Par cilíndrico + Par de revolución



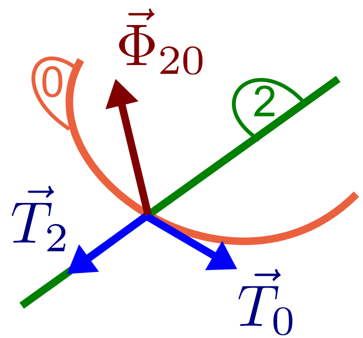
$$\vec{v}^A_{21} = [v_1, 0, 0] \qquad \vec{\omega}_{21} = [\omega_1, 0, \omega_3]$$

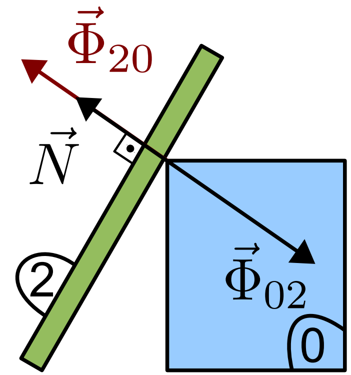
$$\vec{\Phi}_{21} = [0, \Phi_2, \Phi_3] \qquad \vec{\Gamma}_{21} = [0, \Gamma_2, 0]$$

Par de revolución + Par cilíndrico



- Punto - curva $\vec{\Phi} \perp \vec{T}$
  - 3D $\vec{\Phi} = \Phi_N \, \vec{N} + \Phi_B \, \vec{B}$
  - 2D $\vec{\Phi} = \Phi_N \, \vec{N}$
- Punto - superficie $\vec{\Phi} = \Phi \, \vec{u}_S$
  - $\mathbf{u}_s$ es un vector unitario normal a la superficie

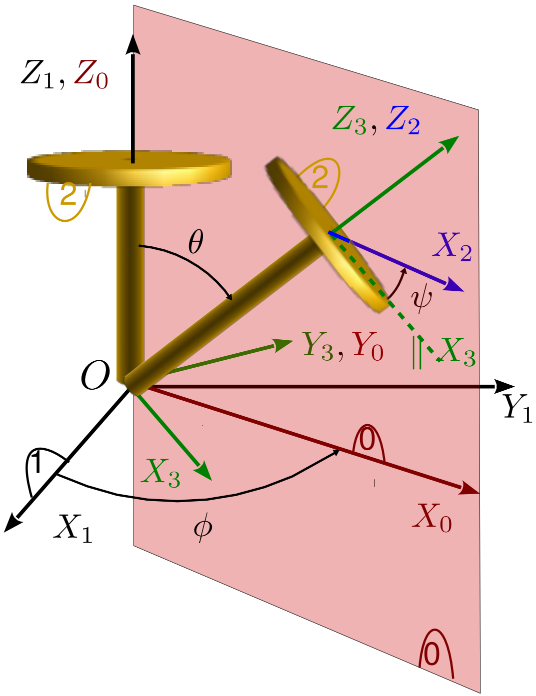




- Curva - curva
  - 3D $\vec{\Phi}_{20} = \Phi \, (\vec{T}_2 \times \vec{T}_0)$
  - 2D $\vec{\Phi}_{20} = \Phi \, \vec{N}$
- Curva - superficie $\vec{\Phi} = \Phi \, \vec{u}_S$
  - $\mathbf{u}_s$ es un vector unitario normal a la superficie
- Superficie - superficie $\vec{\Phi} = \Phi \, \vec{u}_S$
  - $\mathbf{u}_s$ es el vector unitario normal común a las dos superficies

- Introducción
- Recordatorio de vectores deslizantes
- Principio de liberación
- Teoremas generales
- Desvinculación
    - Pares de enlace más usuales
- Ángulos de Euler y movimiento giroscópico

- Los ángulos de Euler permiten describir una rotación arbitraria de un sólido con un punto fijo respecto a un sistema de referencia fijo



ϕ $\rightarrow$ Rotación alrededor del eje Z_1: $1 \rightarrow 0$ $\quad \vec{\omega}_{01} = \dot{\phi}\,\vec{k}_{0,1}$

- Precesión

θ $\rightarrow$ Rotación alrededor del eje Y_0: $0 \rightarrow 3$ $\quad \vec{\omega}_{30} = \dot{\theta}\,\vec{\jmath}_{0,3}$

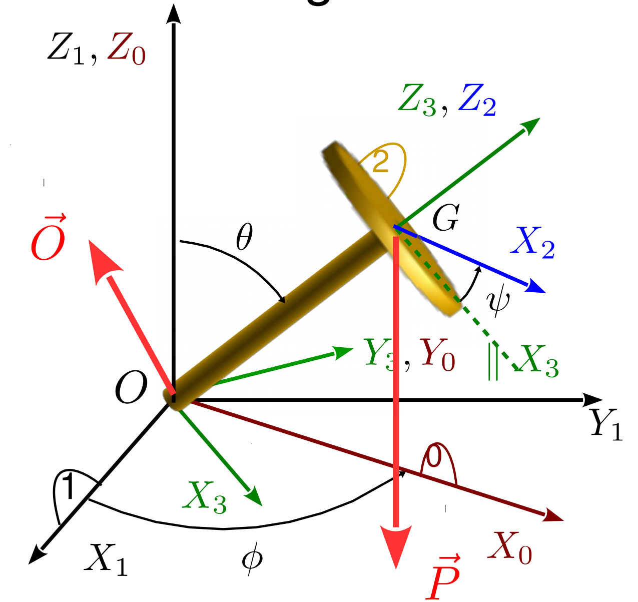
- Nutación

ψ $\rightarrow$ Rotación alrededor del eje Z_3: $3 \rightarrow 2$ $\quad \vec{\omega}_{23} = \dot{\psi}\,\vec{k}_{2,3}$

- Rotación propia

- Hay diferentes formas de definirlos según como sea la secuencia de rotaciones y los ejes de rotación

- Sólido con punto fijo en O y con $I_{xx}=I_{yy}$, sometido a la acción de la gravedad
  - Masa M, OG=L



  - Reducciones cinemáticas

$$\vec{\omega}_{01} = \dot{\phi}\,\vec{k}_{0,1} \qquad \vec{v}^{\,O}_{01} = \vec{0}$$

$$\vec{\omega}_{30} = \dot{\theta}\,\vec{\jmath}_{0,3} \qquad \vec{v}^{\,O}_{30} = \vec{0}$$

$$\vec{\omega}_{23} = \dot{\psi}\,\vec{k}_{2,3} \qquad \vec{v}^{\,G}_{23} = \vec{0}$$

  - Movimiento absoluto del sólido

$$\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_{23} + \vec{\omega}_{30} + \vec{\omega}_{01} = [-\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta, \dot{\theta}, \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta]_3$$

$$\vec{k}_0 = -\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{\imath}_3 + \cos\theta\,\vec{k}_3$$

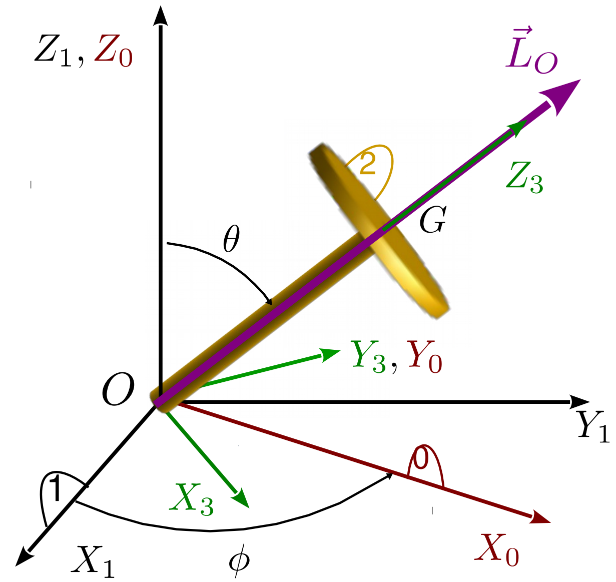
$$\vec{v}^{\,G}_{21} = \vec{v}^{\,G}_{23} + \vec{v}^{\,G}_{30} + \vec{v}^{\,G}_{01} = [L\dot{\theta}, L\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta, 0]_3$$

$$\overrightarrow{OG} = L\,\vec{k}_{2,3}$$

- Momento angular en O

$$\overleftrightarrow{I}_O = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}_3$$

$$\vec{L}_O = \overleftrightarrow{I}_O \cdot \vec{\omega}_{21} = [-I_0\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta,\ I_0\dot{\theta},\ I\dot{\phi}\cos\theta + I\dot{\psi}]_3$$



- Aproximación de giróscopo veloz $\dot{\psi} \gg \dot{\phi}$

- Suponemos además que no hay movimiento de nutación $\dot{\theta} = 0$

$$\vec{L}_O \simeq [0,\, 0,\, I\dot{\psi}]_3$$

- Equivale a suponer que el momento cinético en O sólo tiene componente en el eje Z_3

- Momento externo en O

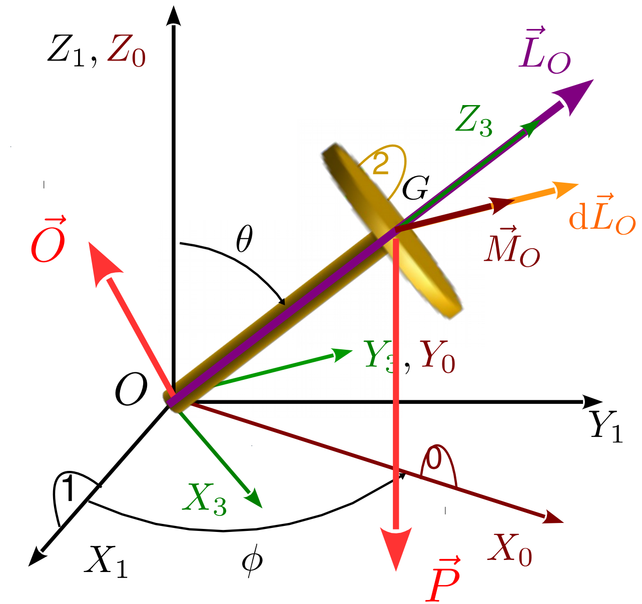
$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OG} \times \vec{P} = [0,\ MgL \operatorname{sen}\theta,\ 0]_3$$

- T.M.C. en O

$$\mathrm{d}\vec{L}_O = \vec{M}_O\ \mathrm{d}t = \overrightarrow{OG} \times \vec{P} = \ \mathrm{d}t\ MgL \operatorname{sen}\theta\, \vec{\jmath}_3$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}\right|_3 + \vec{\omega}_{31} \times \vec{L}_O$$

$$= [0,\ I\dot{\psi}\dot{\phi} \operatorname{sen}\theta\ ,\ I\ddot{\psi}]_3$$



$$\vec{\omega}_{31} = \vec{\omega}_{30} + \vec{\omega}_{01}$$
$$= [-\dot{\phi} \operatorname{sen}\theta,\ \cancelto{0}{\dot{\theta}},\ \dot{\phi}\cos\theta]_3$$

Del T.M.C.

$$\ddot{\psi} = 0 \Longrightarrow \dot{\psi} = \mathrm{cte}$$

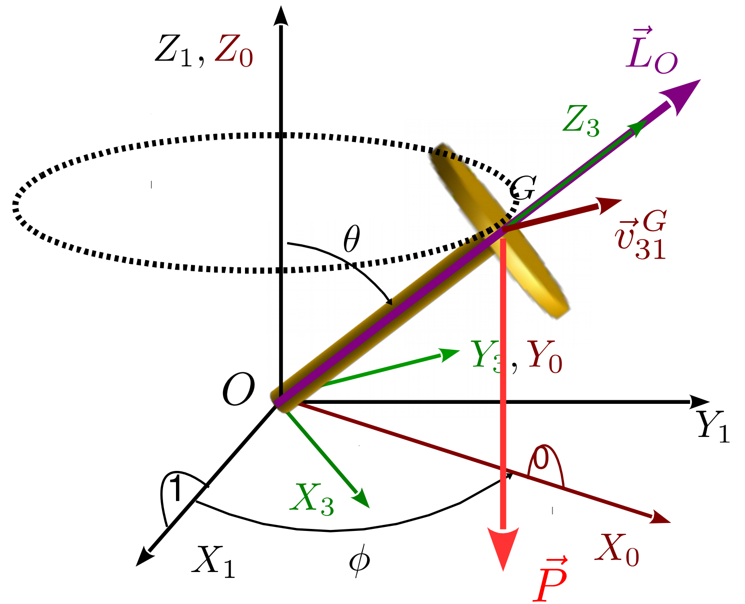
$$I\dot{\psi}\dot{\phi} = MgL \Longrightarrow \dot{\phi} = \frac{1}{\dot{\psi}}\,\frac{MgL}{I} = \mathrm{cte}$$

- El momento cinético (por tanto el sólido), precesa alrededor del eje Z_0

$$\vec{\omega}_{01} = \dot{\phi}\,\vec{k}_0 = \frac{1}{\dot{\psi}}\frac{MgL}{I}\,\vec{k}_0$$

- La velocidad del punto G es perpendicular a la fuerza aplicada en él (peso)

$$\vec{v}^{\,G}_{21} = \vec{v}^{\,G}_{23} + \vec{v}^{\,G}_{30} + \vec{v}^{\,G}_{01}$$
$$= L\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{\jmath}_{3,0}$$



$$\vec{v}^{\,G}_{23} = \vec{0}$$

$\dot{\theta} = 0$

$$\vec{v}^{\,G}_{30} = \cancel{\vec{\omega}_{30}} \times \overrightarrow{OG} = \vec{0}$$

$$\vec{v}^{\,G}_{01} = \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OG} = L\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{\jmath}_{3,0}$$

- Aplicaciones:
  - Precesión de los equinoccios
  - Brújulas giroscópicas
  - Estabilización de objetos en vuelo