Física I. Boletín 2. Septiembre de 2015

2.1. Sean A y B dos puntos diametralmente opuestos en una circunferencia c. Sea P otro punto de la misma circunferencia. Demuestre que los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BP}$ son ortogonales.

Inversamente, sean A, B y P tres puntos tales que $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$. Pruebe que el centro de la circunferencia que pasa por A, B y P se encuentra en el punto medio del segmento AB.

2.2. A partir del producto escalar y del vectorial de dos vectores del plano, con módulo unidad, demuestre las fórmulas trigonométricas para el coseno y el seno de una diferencia de dos ángulos.

2.3. Con ayuda de productos escalares y vectoriales demuestre los teoremas del coseno

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

y del seno

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

en un triángulo de lados a, b y c, y ángulos opuestos A, B y C.

2.4. Dados los vectores

$$\vec{v} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k} \qquad \vec{a} = 6\vec{\imath} + 9\vec{\jmath} + 6\vec{k}$$

Construya una base ortonormal dextrógira $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$, tal que

(a) El primer vector, $\vec{T}$, vaya en la dirección y sentido de $\vec{v}$

(b) El segundo, $\vec{N}$, esté contenido en el plano definido por $\vec{v}$ y $\vec{a}$.

(c) El tercero, $\vec{B}$, sea perpendicular a los dos anteriores, y orientado según la regla de la mano derecha.

(d) Supongamos un vector que en la base canónica se escribe

$$\vec{F} = -12\vec{k}$$

¿Cuál es su expresión en la base $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$?

2.5. Dados los vectores

$$\vec{v} = 2.0\vec{\imath} + 3.5\vec{\jmath} - 4.2\vec{k} \qquad \vec{a} = 4.5\vec{\imath} - 2.2\vec{\jmath} + 1.5\vec{k}$$

(a) ¿Qué ángulo forman estos dos vectores?

(b) ¿Qué área tiene el paralelogramo que tiene a estos dos vectores por lados?

(c) Escriba $\vec{a}$ como suma de dos vectores, uno paralelo a $\vec{v}$ y otro ortogonal a él.

2.6. Calcule el ángulo que forman dos diagonales de un cubo.

2.7. Un globo aerostático está atado al suelo por una cuerda de 50 m y ejerce una fuerza de 2000 N sobre esta cuerda (en la dirección de esta y tirando de ella). El globo se halla a una altura de 30 m y se halla empujado por un fuerte viento del noroeste. Exprese el vector fuerza en la base canónica, si el eje X apunta en la dirección este y el eje Y en la dirección norte.

2.8. De las siguientes expresiones, indique cuáles son necesariamente incorrectas. Aquí las diferentes letras representan las magnitudes definidas en el problema 1.1, R es una distancia y $\vec{r}$ el vector de posición; t es el tiempo:

a) : $\vec{F} = m\dfrac{\vec{v}\times\vec{a}}{\vec{v}}$	b) : $\vec{F}\times(\vec{v}\times\vec{a}) = (\vec{p}\cdot\vec{a})\times\vec{a}$
c) : $\dfrac{\vec{L}}{R} = \vec{F}t - \vec{v}$	d) : $(\vec{r}\times\vec{p})\vec{L} = R(\vec{r}\cdot\vec{p})\vec{p}$
e) : $\dfrac{\vec{F}-\vec{p}/t}{m} = \dfrac{\vec{r}-\vec{v}t}{t^2-t}$	f) : $\dfrac{1}{\vec{r}} = \dfrac{\vec{r}}{r^2}$
g) : $L = \vec{r}\times\vec{p}$	h) : $\dfrac{W}{t} = \vec{F}\times\left(\vec{v}-\dfrac{R}{t}\right)$

2.9. Se tiene un vector conocido, no nulo, $\vec{A}$ y uno que se desea determinar, $\vec{X}$. Se dan como datos su producto escalar y su producto vectorial por $\vec{A}$

$$\vec{A}\cdot\vec{X} = k \qquad \vec{A}\times\vec{X} = \vec{C}$$

Determine el valor de $\vec{X}$. ¿Es suficiente una sola de las dos ecuaciones para hallar $\vec{X}$?

2.10. De una fuerza $\vec{F}_1$ se sabe que tiene de intensidad 10 N y que los ángulos que forma con los semiejes OX y OY positivos valen 60°. Determine las componentes cartesianas de esta fuerza. ¿Existe solución? ¿Es única?

Si a esta fuerza se le suma otra $\vec{F}_2 = -10\vec{\imath} - 10\vec{\jmath}\,(\mathrm{N})$, ¿qué ángulo forma la resultante con los ejes coordenados?

2.11. Considere la terna de vectores

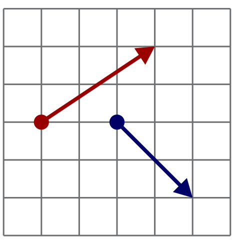
$$\vec{u}_1 = \cos(\theta)\vec{\imath} + \mathrm{sen}(\theta)\vec{\jmath} \qquad \vec{u}_2 = -\mathrm{sen}(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath} \qquad \vec{u}_3 = \vec{k}$$

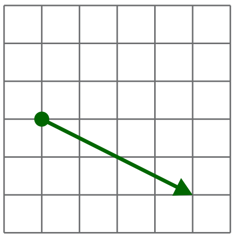
(a) Pruebe que constituyen una base ortonormal dextrógira. ¿Cómo están situados estos vectores?

(b) Halle la transformación inversa, es decir, exprese $\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ como combinación de $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$.

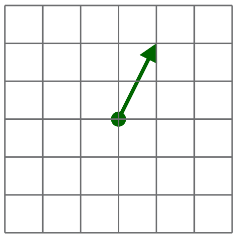
(c) Para el caso particular en que $\mathrm{tg}(\theta) = 3/4$, particularice las ecuaciones de transformación y exprese el vector $\vec{F} = 10\vec{\imath} - 15\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ en la nueva base.

T.1 Dados los vectores ligados de la figura, ¿cuánto vale su suma vectorial?

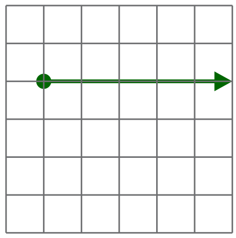




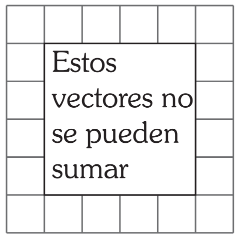
☐ **A**



☐ **B**



☐ **C**



☐ **D**

T.2 ¿Qué ángulo forman los vectores $\vec{A} = 24\vec{\imath} - 32\vec{k}$ y $\vec{B} = 16\vec{\jmath} + 12\vec{k}$?

☐ **A.** $0.00\,\mathrm{rad}$
☐ **B.** $1.07\,\mathrm{rad}$
☐ **C.** $1.57\,\mathrm{rad}$
☐ **D.** $2.07\,\mathrm{rad}$

T.3 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es necesariamente incorrecta? Los símbolos son los usuales en cinemática

☐ **A.** $\vec{r} = (\vec{v} - \vec{a}t)/|\vec{a} - \vec{v}t|$
☐ **B.** $\Delta t = (\Delta\vec{r})/\vec{v}$
☐ **C.** $R = |\vec{v}|^3/|\vec{v} \times \vec{a}|$
☐ **D.** $\vec{r} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v}$

T.4 Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son dos vectores unitarios, indique cuándo se cumple la igualdad

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A} \times \vec{B}$$

☐ **A.** Cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos.
☐ **B.** Cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son ortogonales.
☐ **C.** No se cumple nunca.
☐ **D.** Cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ forman un ángulo de 45°.

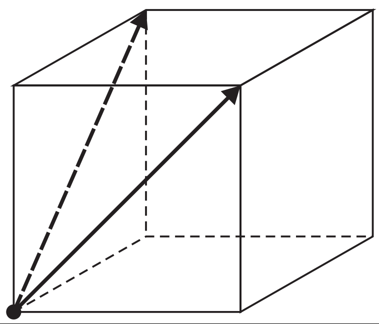
T.5 Sean $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ vectores arbitrarios no nulos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta siempre?

☐ **A.** $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
☐ **B.** $(\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} = \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$
☐ **C.** $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{A}$
☐ **D.** $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$

T.6 Dados tres puntos del espacio A, B y C, siendo O el origen de coordenadas, ¿cómo podemos hallar el área del triángulo que definen?

- ☐ **A.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
- ☐ **B.** $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})/2$
- ☐ **C.** $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|/2$
- ☐ **D.** $\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC})$

T.7 Se tienen dos vectores a lo largo de las diagonales de las caras de un cubo, con el mismo punto de aplicación. ¿Qué ángulo forman?



- ☐ **A.** $\pi/4$
- ☐ **B.** $\pi/6$
- ☐ **C.** $\pi/2$
- ☐ **D.** $\pi/3$

T.8 Dados dos vectores arbitrarios $\vec{a}$ y $\vec{b}$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta, en general?

- ☐ **A.** $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=0$
- ☐ **B.** $|\vec{a}||\vec{b}|=|\vec{a}\cdot\vec{b}|+|\vec{a}\times\vec{b}|$
- ☐ **C.** $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}=\vec{0}$
- ☐ **D.** $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}=|\vec{a}|^2\vec{b}$

T.9 Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son dos vectores unitarios, indique cuándo se cumple la igualdad

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}\times\vec{B}|$$

- ☐ **A.** Cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ forman un ángulo de 45°.
- ☐ **B.** Cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos.
- ☐ **C.** Cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son ortogonales.
- ☐ **D.** No se cumple nunca.

T.10 Los vectores $\vec{u}_1=0.60\vec{\imath}+0.80\vec{k}$ y $\vec{u}_2=-0.64\vec{\imath}+0.60\vec{\jmath}+0.48\vec{k}$ son los dos primeros vectores de un triedro ortonormal dextrógiro. ¿Cuál es el tercer vector?

- ☐ **A.** $\vec{u}_3=12\vec{\imath}+20\vec{\jmath}+9\vec{k}$
- ☐ **B.** $\vec{u}_3=0.48\vec{\imath}+0.80\vec{\jmath}-0.36\vec{k}$
- ☐ **C.** Es imposible saberlo.

☐ **D.** $\vec{u}_3 = -0.48\vec{\imath} - 0.80\vec{\jmath} + 0.36\vec{k}$

T.11 Dada la base anterior, ¿Cuál es la distancia del punto $\overrightarrow{OA} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ (m) al plano que pasa por el origen de coordenadas, O, y es normal al vector $\vec{u}_2$?

☐ **A.** 40 cm

☐ **B.** 1 m

☐ **C.** 56 cm

☐ **D.** 3 m

T.12 Dados dos vectores no nulos, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, ¿cuándo son perpendiculares su suma $\vec{a} + \vec{b}$ y su diferencia $\vec{a} - \vec{b}$?

☐ **A.** Cuando a y b tienen el mismo módulo.

☐ **B.** Nunca.

☐ **C.** Cuando a y b son paralelos.

☐ **D.** Cuando a y b son ortogonales.
