



Tema 6: Cinética de la partícula

FISICA I, 1º Grado, Ingeniería Energética, Robótica y
Mecatrónica

Departamento Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

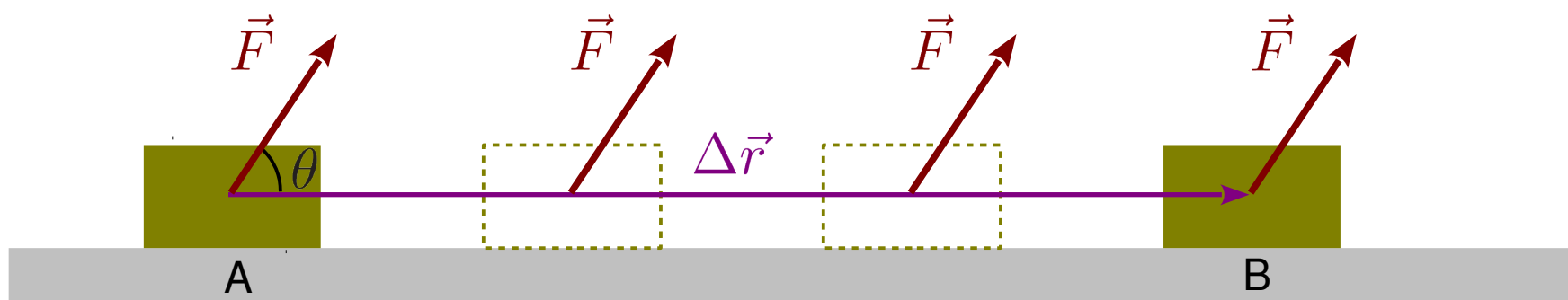
Universidad de Sevilla

- **Introducción**
- Trabajo mecánico
- Energía cinética
- Energía potencial
- Energía mecánica
- Cantidad de movimiento
- Momento cinético (o angular)

- Las **magnitudes cinéticas** combinan elementos de cinemática y de inercia
 - Trabajo
 - Energías cinética, potencial y mecánica
 - Cantidad de movimiento (o momento lineal)
 - Momento cinético respecto a un punto (o angular)
- Algunas de estas magnitudes se **conservan** durante el movimiento de una partícula
 - Se puede obtener información sin resolver todos los detalles
- Forma **alternativa** de estudiar la Dinámica
 - En algunos problemas se puede encontrar la velocidad sin tener que resolver una ecuación diferencial

- Introducción
- Trabajo mecánico
- Energía cinética
- Energía potencial
- Energía mecánica
- Cantidad de movimiento
- Momento cinético (o angular)

- La fuerza realiza un trabajo sobre el cuerpo durante su movimiento



$$W_A^B = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = |\vec{F}| |\Delta \vec{r}| \cos \theta$$

- El signo depende del sentido relativo

$$\theta < \pi/2 \Rightarrow W_A^B > 0$$

$$\theta > \pi/2 \Rightarrow W_A^B < 0$$

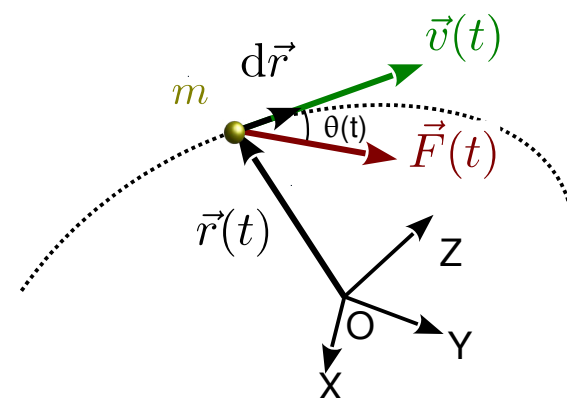
$$\theta = \pi/2 \Rightarrow W_A^B = 0 \quad \rightarrow \text{si } \mathbf{F} \perp \mathbf{dr} \text{ no hay trabajo mecánico}$$

- En el SI internacional la unidad base es el Julio

$$J = N \cdot m = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$$

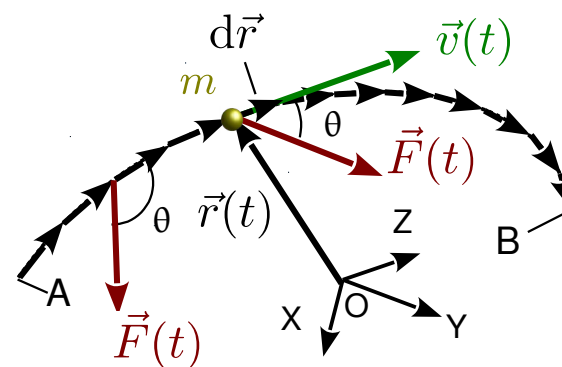
- Se divide el trayecto en **segmentos infinitesimales**
- Trabajo de la fuerza sobre la partícula cuando esta se desplaza un $d\vec{r}$

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \theta$$



- En un recorrido **finito** el trabajo total es la **suma** de los trabajos infinitesimales

$$W_A^B = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

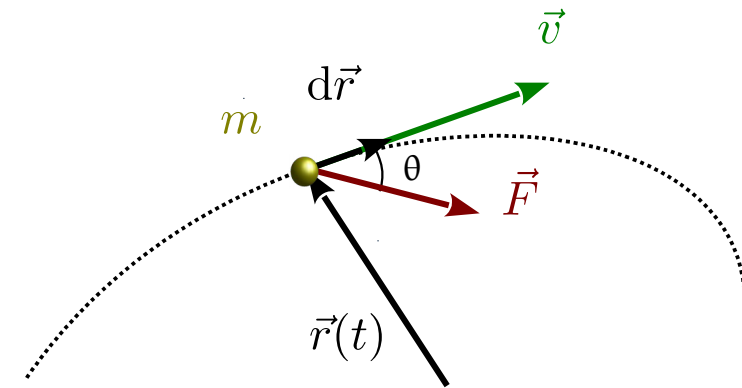


- Teniendo en cuenta la definición de velocidad y la Segunda Ley de Newton

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = m \vec{a} \cdot \vec{v} dt = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt$$

$$= m \vec{v} \cdot d\vec{v} = m d \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = m d \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$$

$$\delta W = d \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$



- Puede interpretarse diciendo que, al realizar trabajo sobre la partícula, la fuerza le transfiere la cantidad $d(mv^2/2)$ en el trayecto $d\vec{r}$

- Introducción
- Trabajo mecánico
- Energía cinética
- Energía potencial
- Energía mecánica
- Cantidad de movimiento
- Momento cinético (o angular)

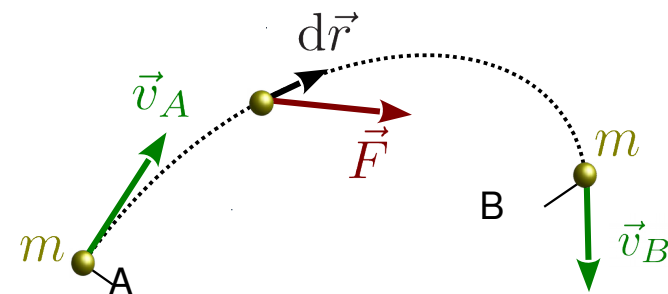
■ Definición

$$T = K = \frac{1}{2} m v^2$$

- Es un escalar
- Está relacionada con la capacidad de la partícula de realizar trabajo
- Se mide en Julios
- Depende de las propiedades de la partícula: masa y velocidad
 - Combina la inercia (m) con la cinemática (v)
 - No es igual que caiga en el pie una pluma que una bola de plomo, aunque tengan la misma velocidad

- Trabajo total de una fuerza sobre una partícula en el trayecto A - B

$$W_A^B = \int_A^B \delta W = \int_A^B d \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$



- Teorema de las fuerzas vivas o de la energía cinética

$$W_A^B = \Delta T = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

Versión finita

$$\delta W = dT$$

Versión local

- El trabajo modifica el valor de la energía cinética de la partícula
- Es válido para cualquier tipo de fuerza
- Si hay varias fuerzas actuando

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = W_{\text{neto}} \Big|_A^B$$

- Potencia instantánea

$$P_W = \frac{dW}{dt}$$

- Mide la tasa con la que se realiza trabajo

- Se mide en Watios $W = J/s = kg\ m^2s^{-3}$

- Trabajo a partir de la potencia: $dW = P_W dt$

- Potencia transferida por una fuerza sobre una partícula en movimiento

$$P_W = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

- Versión instantánea del teorema de las fuerzas vivas

$$P_W = \frac{dT}{dt} \qquad dT = P_W dt$$

Si la fuerza neta que actúa sobre un punto material es nula o perpendicular a su trayectoria, su energía cinética se conserva constante a lo largo del tiempo

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F}_T = \vec{0} \\ \vec{F}_T \perp d\vec{r} \end{array} \right| \longrightarrow \delta W_T = \vec{F}_T \cdot d\vec{r} = 0 \longrightarrow dT = 0 \longrightarrow T = \text{cte}$$

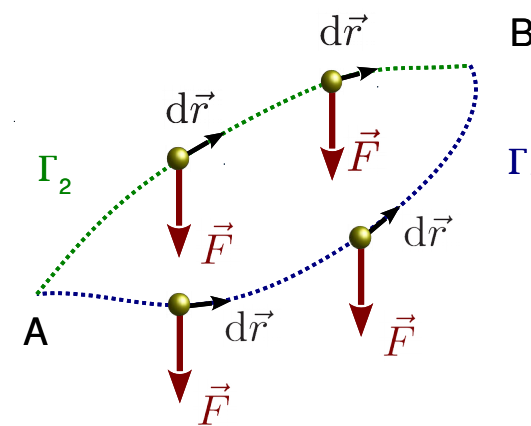
■ Ejemplos

- Partícula libre
- Movimiento de un satélite artificial alrededor de la Tierra
- Movimiento de la Tierra respecto al Sol (considerando la órbita circular)
- Movimiento de una carga eléctrica en el seno de un campo magnético

- Introducción
- Trabajo mecánico
- Energía cinética
- **Energía potencial**
- Energía mecánica
- Cantidad de movimiento
- Momento cinético (o angular)

Una fuerza es conservativa si el trabajo que realiza sobre un punto material que se desplaza entre dos puntos no depende de la trayectoria seguida

$$\left. \begin{aligned} W_{A,\Gamma_1}^B &= \int_{A,\Gamma_1}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ W_{A,\Gamma_2}^B &= \int_{A,\Gamma_2}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{aligned} \right| \quad W_{A,\Gamma_1}^B = W_{A,\Gamma_2}^B \iff \vec{F} = \vec{F}^C$$



- La **diferencia de energía potencial** entre dos puntos es el trabajo realizado por la fuerza conservativa cuando la partícula se mueve entre esos dos puntos, cambiando el signo

$$U_B - U_A = -W_A^B = - \int_A^B \vec{F}^C \cdot d\vec{r} \quad W_A^B = -\Delta U$$

- El origen de la energía potencial es arbitrario
- La energía potencial de una partícula depende de su posición en un campo de fuerzas

conservativo

- Fuerza gravitatoria cerca de la superficie

$$\vec{F}_g = m \vec{g} = -m g \vec{k}$$

- Trabajo realizado por $\vec{F}_g$ en un desplazamiento infinitesimal

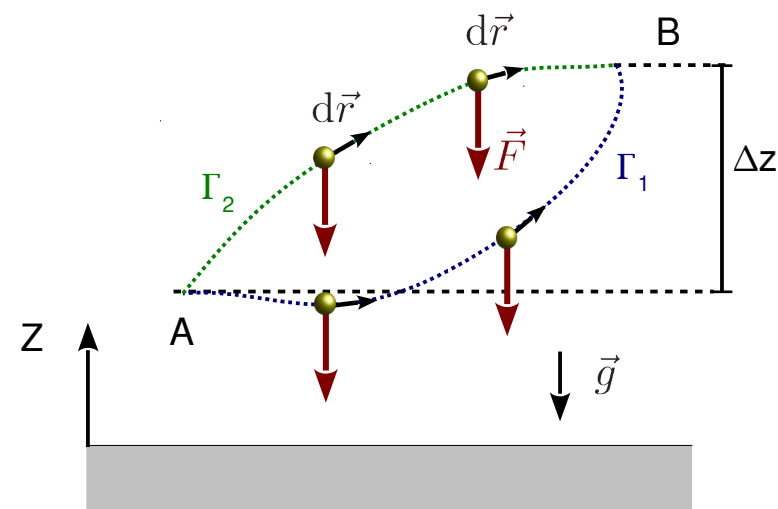
$$\delta W = \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = m\vec{g} \cdot d\vec{r} = -mg dz = -dU$$

- Diferencia de energía potencial entre dos puntos

$$U_B - U_A = \int_A^B dU = - \int_A^B \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = \int_{z_A}^{z_B} mg dz = mg \int_{z_A}^{z_B} dz = mg(z_B - z_A) = mg\Delta z$$

- Energía potencial gravitatoria (con una referencia arbitraria en $z=0$)

$$U(z) = U(0) + mgz$$



$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

$$m\vec{g} \cdot d\vec{r} = -mg dz$$

- Energía potencial gravitatoria para una masa puntual

$$\vec{F}_g = -G M m \frac{\vec{r}}{r^3}$$

- La masa m viene desde el infinito
- El trabajo realizado en un desplazamiento

infinitesimal es

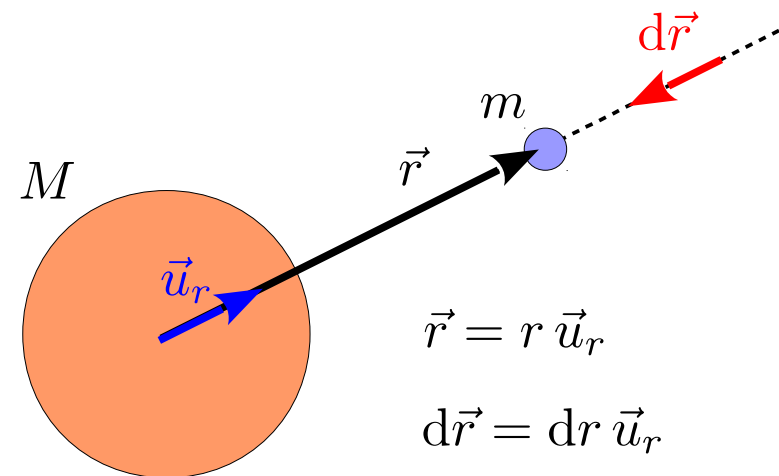
$$\delta W = \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -\frac{GMm}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} = -GMm \frac{dr}{r^2} = -dU$$

- Diferencia de energía potencial entre el infinito y P

$$U_A - U_\infty = \int_\infty^A dU = - \int_\infty^A \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = \int_\infty^{r_A} GMm \frac{dr}{r^2} = \left[-GMm \frac{1}{r} \right]_\infty^{r_A} = -\frac{GMm}{r_A}$$

- Energía potencial gravitatoria (tomando energía potencial cero en el infinito)

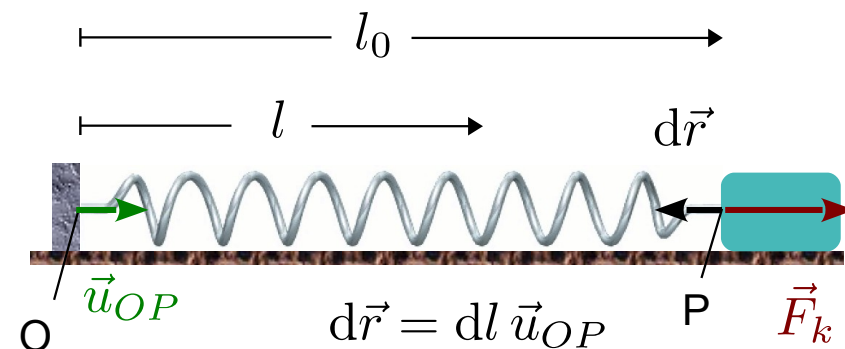
$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$



- Fuerza del muelle

$$\vec{F}_k = -k(l - l_0)\vec{u}_{OP}$$

- Trabajo realizado por $\vec{F}_k$ en un desplazamiento infinitesimal



$$\delta W = \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = [-k(l - l_0)\vec{u}_{OP}] \cdot [dl \vec{u}_{OP}] = -k(l - l_0) dl = -dU$$

- Energía potencial elástica (con referencia de potencial en l_0)

$$U(l) = U(l_0) - \int_{l_0}^l \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = U(l_0) + \int_{l_0}^l k(l - l_0) dl$$

$$U(l) = U(l_0) + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

- Introducción
- Trabajo mecánico
- Energía cinética
- Energía potencial
- **Energía mecánica**
- Cantidad de movimiento
- Momento cinético (o angular)

- Se define como la suma de la energía cinética y la energía potencial total (una energía potencial por cada fuerza conservativa)

$$E = T + U$$

Si todas las fuerzas que realizan trabajo sobre una partícula son conservativas su energía mecánica se conserva

- Demostración

$$\delta W = \vec{F}_T^C \cdot d\vec{r} = \left| \begin{array}{l} -dU \\ dT \end{array} \right. \longrightarrow dT + dU = 0 \longrightarrow d(T + U) = 0 \longrightarrow E = T + U = \text{cte}$$

- Si hay fuerzas no conservativas el trabajo que realizan varía la energía mecánica

$$\delta W = \vec{F}_T^C \cdot d\vec{r} + \vec{F}^{NC} \cdot d\vec{r} = \left| \begin{array}{l} -dU + \delta W^{NC} \\ dT \end{array} \right. \longrightarrow \delta W^{NC} = dT + dU = dE \longrightarrow W^{NC} = \Delta E$$

- Introducción
- Trabajo mecánico
- Energía cinética
- Energía potencial
- Energía mecánica
- Cantidad de movimiento
- Momento cinético (o angular)

- La cantidad de movimiento o momento lineal de una partícula es el producto de su masa por su velocidad

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

$$[\mathbf{p}] = \text{kg m s}^{-1}$$

- Teorema de la cantidad de movimiento

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

- Es un enunciado alternativo de la Segunda Ley de Newton
- Impulso mecánico (Teorema de la cantidad de movimiento en forma elemental y finita)

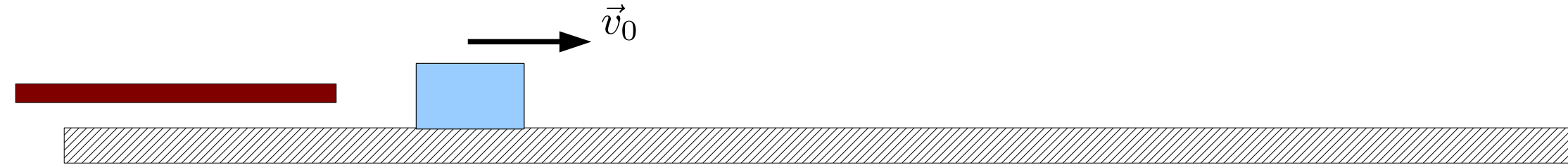
$$d\vec{p} = \vec{F} dt \longrightarrow \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_B) - \vec{p}(t_A) = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} dt$$

- Es útil cuando la partícula sufre una fuerza en un intervalo de tiempo pequeño

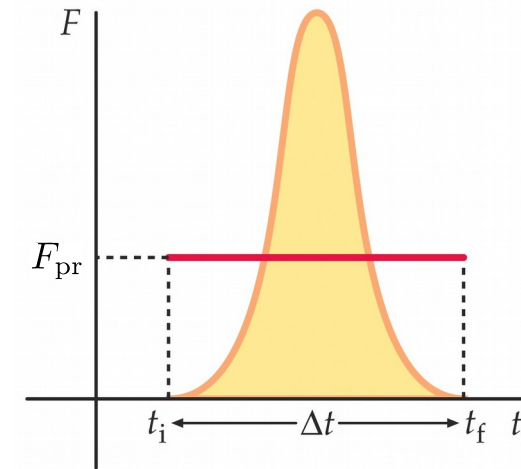
$$\vec{F}_{media} \simeq \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

■ Percusión sobre una partícula

- Una fuerza actúa sobre un tiempo muy corto



- Si Δt es muy pequeño se puede despreciar el movimiento de la partícula durante la colisión y considerar la fuerza media ejercida sobre la partícula
- El problema después de la percusión se puede tratar como una partícula con velocidad inicial $\mathbf{v}_0$
- La velocidad después de la percusión se calcula con el **impulso mecánico**



$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_0 - \vec{0} = \int_{t_f}^{t_i} \vec{F} dt = \vec{I} \quad \longrightarrow \quad \vec{v}_0 = \frac{1}{m} \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt \simeq \frac{1}{m} \vec{F}_{pr} \Delta t = \frac{\vec{I}}{m}$$

Si la fuerza neta que actúa sobre un punto material es nula se conserva su cantidad de movimiento

■ Demostración

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{F} = 0 \longrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \longrightarrow \vec{p} = \text{cte}$$

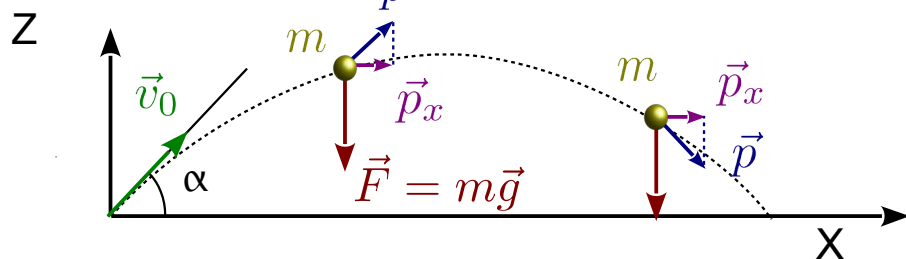
- Si la dirección de la fuerza es constante, se conserva la cantidad de movimiento en las direcciones perpendiculares a la fuerza

$$\vec{F} \perp \vec{n} \longrightarrow \vec{F} \cdot \vec{n} = 0 \longrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{n} = 0 \longrightarrow \frac{d(\vec{p} \cdot \vec{n})}{dt} = 0 \longrightarrow \vec{p} \cdot \vec{n} = \text{cte}$$

■ Ejemplo

$$\vec{F} \perp \vec{u}_x \longrightarrow \vec{p} \cdot \vec{u}_x = \text{cte} \longrightarrow p_x = \text{cte} \longrightarrow v_x = \text{cte}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_z = (v_0 \sin \alpha - gt) \end{cases}$$

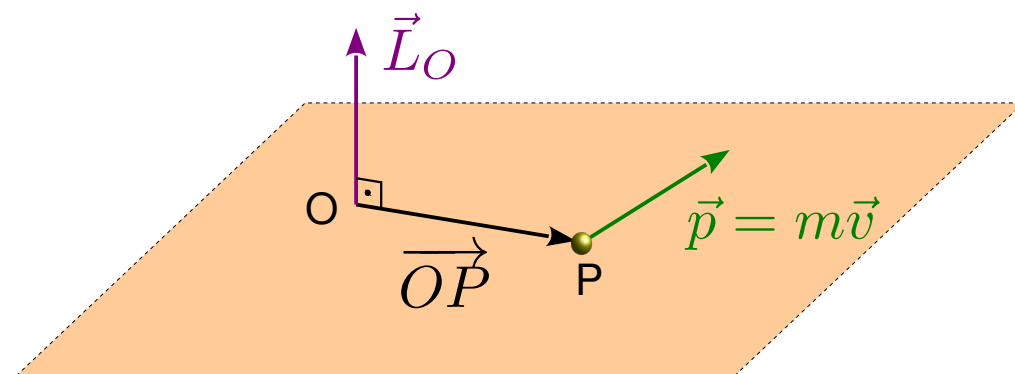


- Introducción
- Trabajo mecánico
- Energía cinética
- Energía potencial
- Energía mecánica
- Cantidad de movimiento
- **Momento cinético (o angular)**

- El momento cinético de un punto material respecto a un punto O es el producto vectorial

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{p} = \overrightarrow{OP} \times (m\vec{v})$$

$$[\mathbf{L}] = \text{kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$



- Teorema del Momento Cinético

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} \times \vec{p} + \overrightarrow{OP} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times (m\vec{v}) + \overrightarrow{OP} \times \vec{F} = \vec{M}_O$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

- Momento de una fuerza respecto a O: $\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}$

Si el momento respecto a un punto O de la fuerza neta que actúa sobre una partícula es nulo, el momento cinético de la partícula respecto a O es constante

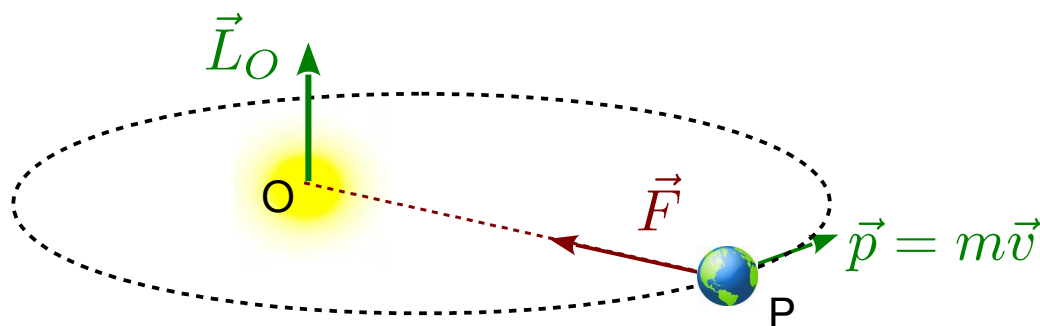
- Ejemplo: **movimiento central**. La dirección de la fuerza neta pasa siempre por O

$$\vec{F} \parallel \overrightarrow{OP} \longrightarrow \vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{F} = \vec{0} \longrightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} \longrightarrow \vec{L}_O = \text{cte}$$

- Conservación parcial: Si el momento de la fuerza es perpendicular a un vector **n** fijo, se conserva la proyección del momento cinético sobre **n**

$$\vec{M}_O \perp \vec{n} \longrightarrow \vec{M}_O \cdot \vec{n} = 0 \longrightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \vec{n} = 0 \longrightarrow \frac{d(\vec{L}_O \cdot \vec{n})}{dt} = 0 \longrightarrow \vec{L}_O \cdot \vec{n} = \text{cte}$$

- Ejemplo: movimiento de traslación de la Tierra



$$\vec{F} \parallel \overrightarrow{OP} \longrightarrow \vec{M}_O = \vec{0} \longrightarrow \vec{L}_O = \text{cte}$$