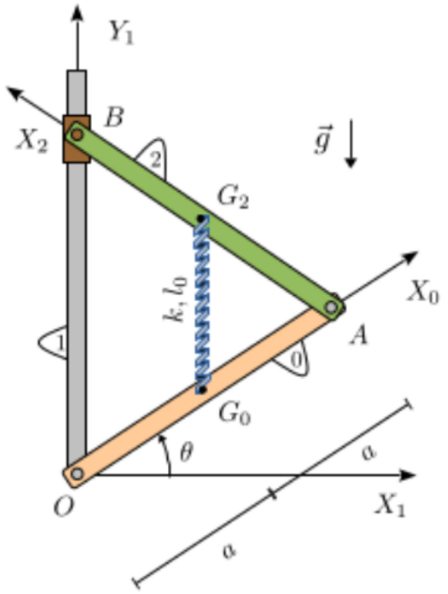
En el sistema de la figura, las dos barras homogéneas (sólidos "0" y "2") tienen longitud $2a$. La barra "0", de masa m, está articulada en O sobre una barra vertical fija (sólido "1"), de modo que ese punto es fijo. La barra "2", de masa m, está articulada sobre la barra "0" en el punto A, y sobre un deslizador en el punto B. De este modo, la barra puede rotar respecto a B y este punto deslizar sobre la barra fija vertical. Un muelle ideal de constante elástica k y longitud natural $l_0 = 2a$ une los centros de masas de las dos barras. El sistema está sometido a la acción de la gravedad, y en todo instante está contenido en el plano OX_1Y_1. Todos los contactos son lisos.



1. Determina gráfica y analíticamente los C.I.R. de los tres movimientos que pueden definirse. Razona la respuesta.

2. Si el punto B se mueve con velocidad constante, de módulo v_0, dirigida hacia arriba, encuentra las reducciónes cinemáticas de los movimientos $\{01\}$, $\{20\}$ y $\{21\}$, así como sus derivadas temporales. El resultado debe quedar en función de θ y los parámetros geométricos del sistema.

3. Supongamos ahora que el punto B es libre, es decir, no se cumple la situación del apartado 2. Calcula el momento cinético de las barras respecto a O.

4. Dibuja el diagrama de fuerzas y pares que actúan sobre las barras, indicando que componentes de las reacciones vinculares son no nulas a priori. ¿Cuáles son las incógnitas del problema dinámico?

5. A partir de ahora, y para todos los apartados posteriores, suponemos que la barra "2" no tiene masa. Encuentra la expresión de las energías cinética y potencial del sistema.

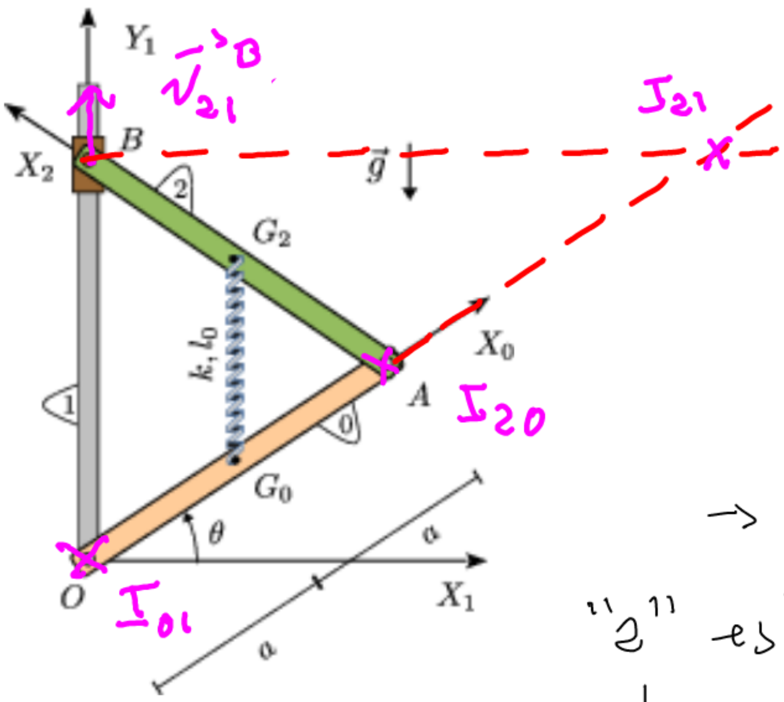
6. Encuentra la ecuación de Lagrange para θ.

7. Se aplica una fuerza $\vec{F} = F_0\,\vec{\imath}_1$ sobre el punto A, con $F_0 > 0$. Encuentra la ecuación de movimiento para este caso.

8. Volvemos a la situación descrita en el apartado 5. Ahora queremos que el ángulo θ cumpla el vínculo $\dot{\theta} = \omega_0$, constante. Tenemos además $\theta(0) = 0$. ¿Que momento de fuerza hay que ejercer sobre la barra "0" para que esto ocurra?

9. Volvemos a la situación descrita en el apartado 5. Cuando el estado del sistema viene dado por $\theta(0) = \pi/4$ y $\dot{\theta}(0^-) = 0$, se aplica una percusión en el punto A dada por $\hat{\vec{F}} = \hat{F}_0\,(\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1)$. Encuentra el valor de $\dot{\theta}(0)^+$.

1. Determinación de los C.I.R.



→ La barra "0" está articulada en el punto O, por tanto $I_{01} \equiv O$

→ Las barras "0" y "2" están articuladas en el punto "A", por tanto

$$I_{20} \equiv A$$

→ Por el teorema de los tres centros el I_{21} debe estar en la línea $\overline{OA}$. Además, como $\vec{v}_{21}^{\,B}$ es paralela al eje OY_0, I_{21} debe estar en la línea perpendicular a OY_0 trazada por B

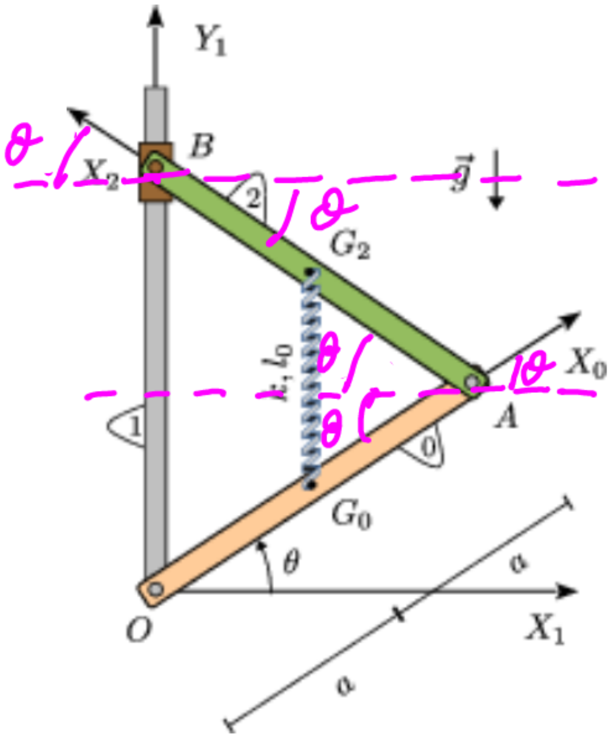
→ Los vectores de posición de los C.I.R. son

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{OI_{01}} &= \vec{OO} = \vec{0} \\ \vec{OI_{20}} &= \vec{OA} = 2a(\cos\theta\,\vec{i}_1 + \sin\theta\,\vec{j}_1) \\ \vec{OI_{21}} &= 4a(\cos\theta\,\vec{i}_1 + \sin\theta\,\vec{j}_1) \end{aligned}}$$

2. Velocidad de B fijada

En este apartado tenemos $\vec{v}_{21}^{B} = v_0 \vec{j}_1$, con v_0 constante.

Veamos las reducciones cinemáticas de los diferentes movimientos



Mov. {01}

$\vec{\omega}_{01} = \dot{\theta}\, \vec{k}_1$ $\qquad$ $\vec{\alpha}_{01} = \ddot{\theta}\, \vec{k}_1$

$\vec{v}_{01} = \vec{0}$ $\qquad$ $\vec{a}_{01}^{O} = \vec{0}$

Mov. {21}

$\vec{\omega}_{21} = -\dot{\theta}\, \vec{k}_1$ $\qquad$ $\vec{\alpha}_{21} = -\ddot{\theta}\, \vec{k}_1$

$\vec{v}_{21}^{B} = v_0\, \vec{j}_1$ $\qquad$ $\vec{a}_{21}^{B} = \vec{0}$

Mov. {20}

$\vec{\omega}_{20} = \vec{\omega}_{21} - \vec{\omega}_{01} = -2\dot{\theta}\, \vec{k}_1$ $\qquad$ $\vec{\alpha}_{20} = -\ddot{\theta}\, \vec{k}_1$

$\vec{v}_{20}^{A} = \vec{0}$ $\qquad$ $\vec{a}_{20}^{A} = \vec{0}$

Determinación de $\dot{\theta}$

Al ser un movimiento plano podemos usar vectores de posición derivables en el tiempo

$$\vec{OB} = \vec{r}_{21}^{B} = 4a \sin\theta\, \vec{j}_1$$

$$\vec{v}_{21}^{B} = \left.\frac{d\vec{r}_{21}^{B}}{dt}\right|_1 = 4a\dot{\theta}\cos\theta\, \vec{j}_1 = v_0\, \vec{j}_1$$

Por tanto $$\boxed{\dot{\theta} = \frac{v_0}{4a\cos\theta}}$$

Derivando respecto al tiempo

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{v_0}{4a}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\dot{\theta} = \frac{v_0^2}{16a^2}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta}$$

Las reducciones cinemáticas quedan

$$\vec{\omega}_{01} = \frac{v_0}{4a\cos\theta}\vec{k}_1 \qquad \vec{\alpha}_{01} = \frac{v_0^2}{16a^2}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta}$$

$$\vec{v}_{01}^{\,O} = \vec{0} \qquad \vec{a}_{01}^{\,O} = \vec{0}$$

$$\vec{\omega}_{21} = -\frac{v_0}{4a\cos\theta}\vec{k}_1 \qquad \vec{\alpha}_{21} = -\frac{v_0^2}{16a^2}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta}$$

$$\vec{v}_{21}^{\,B} = \vec{0} \qquad \vec{a}_{21}^{\,B} = \vec{0}$$

$$\vec{\omega}_{20} = -\frac{v_0}{2a\cos\theta}\vec{k}_1 \qquad \vec{\alpha}_{20} = -\frac{v_0^2}{8a^2}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta}$$

$$\vec{v}_{20}^{\,A} = \vec{0} \qquad \vec{a}_{20}^{\,A} = \vec{0}$$

3. Momento cinético de las barras respecto a O

Ahora el punto B es libre. El sistema tiene un grado de libertad: $\theta(t)$

Calculamos el momento angular de cada barra respecto a O

Barra "0"

Como el punto O es fijo, tenemos

$$\vec{L}_O^{\,"0"} = I_O^{"0"} \, \vec{\omega}_{01}$$

Tenemos $I_O^{"0"} = \frac{1}{3} m (2a)^2 = \frac{4}{3} m a^2$

$$\vec{\omega}_{01} = \dot{\theta} \, \vec{x}_1$$

Por tanto

$$\boxed{\vec{L}_O^{\,"0"} = \frac{4}{3} m a^2 \dot{\theta} \, \vec{x}_1}$$

Barra "2"

Lo más sencillo es calcular el momento angular respecto al centro de masas de la barra y después usar la ecuación del campo de momentos para trasladarlo a O.

Respecto al centro de masas G_2

$$\vec{L}_{G_2}^{\,"2"} = I_{G_2} \, \vec{\omega}_{21}$$

$$I_{G_2} = \frac{1}{12} m (2a)^2 = \frac{1}{3} m a^2$$

$$\vec{\omega}_{21} = -\dot{\theta} \, \vec{x}_1$$

$$\longrightarrow \vec{L}_{G_2}^{\,"2"} = -\frac{1}{3} m a^2 \dot{\theta} \, \vec{x}_1$$

Por otro lado

$$\vec{L}_O^{\,"2"} = \vec{L}_{G_2}^{\,"2"} + \vec{C}^{\,"2"} \times \overrightarrow{G_2 O}$$

- Cantidad de movimiento

$$\vec{C}^{\,"2"} = m\,\vec{v}_{21}^{\,G_2} = -m\,a\,\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{i}_1 + 3a\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{j}_1$$

$$\vec{v}_{21}^{\,G_2} = \vec{v}_{21}^{\,B} + \vec{\omega}_{21}\times\vec{BG_2}$$

$$\vec{v}_{21}^{\,B} = 4a\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{j}_1$$

$$\vec{BG_2} = a\cos\theta\,\vec{i}_1 - a\sin\theta\,\vec{j}_1$$

$$\vec{\omega}_{21}\times\vec{BG_2} = -a\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{i}_1 - a\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{j}_1$$

$$\vec{G_2O} = -a\cos\theta\,\vec{i}_1 - 3a\sin\theta\,\vec{j}_1$$

$$\vec{C}^{\,"2"}\times\vec{G_2O} = 3ma^2\dot{\theta}\,\vec{k}_1$$

Por tanto

$$\boxed{\vec{L}_O^{\,"2"} = \frac{8}{3}ma^2\dot{\theta}\,\vec{k}_1}$$

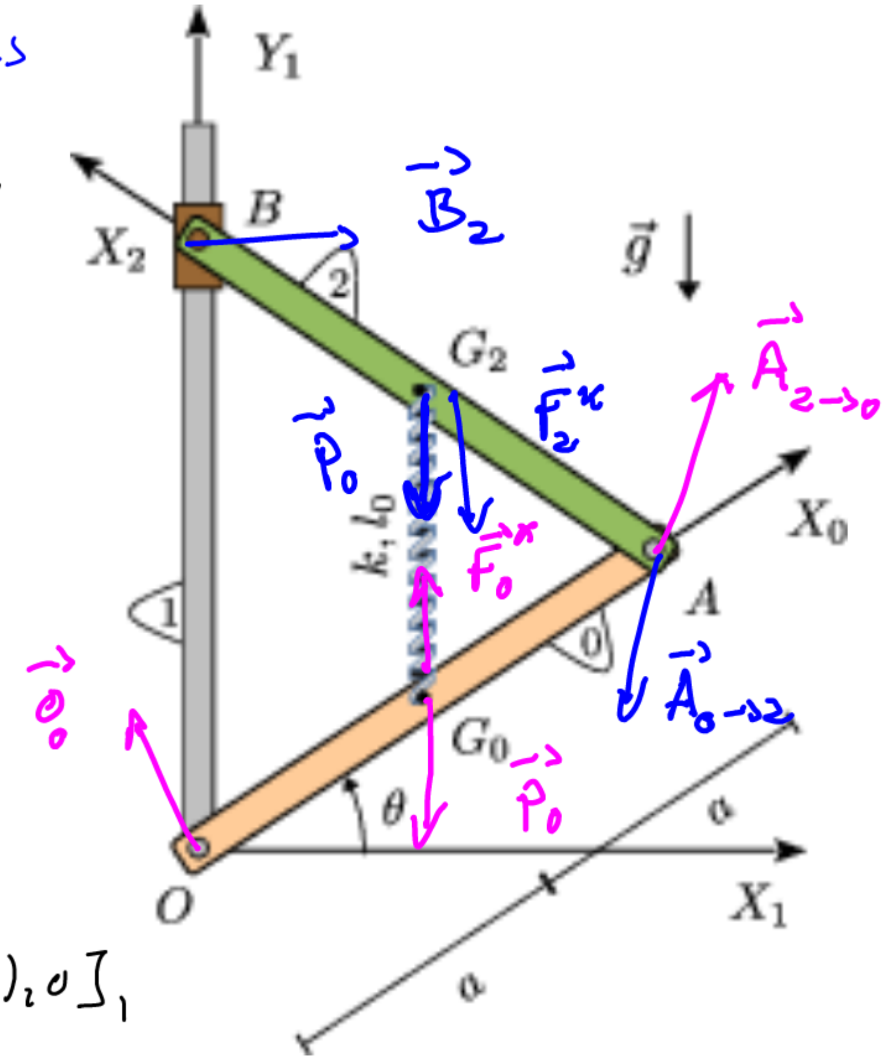
Otra forma es usar la expresión

$$\vec{L}_O^{\,"2"} = I_O^{"2"}\,\vec{\omega}_{21} + m\,\vec{OG_2}\times\vec{v}_{21}^{\,O}$$

Hay que tener cuidado, pues $\vec{v}_{21}^{\,O}\neq\vec{0}$. No se puede ignorar el segundo término.

4. Diagrama de fuerzas

Al ser un problema plano ignoramos la dimensión sobre el eje OZ_1.



Barra "0"

$\vec{P}_0 = [0, -mg, 0]_1$

$\vec{F}_0^{k} = [0, k(2a\sin\theta - 2a), 0]_1$

$\vec{O}_0 = [O_x, O_y, 0]_1$

$\vec{A}_{2\to0} = [A_x, A_y, 0]$

Las fuerzas $\vec{P}_0$, $\vec{F}_0^{k}$ son activas. Las fuerzas $\vec{O}_0$, $\vec{A}_{2\to0}$ son vinculares.

Barra "2"

$\vec{P}_2 = [0, -mg, 0]_1$

$\vec{F}_2^{k} = -\vec{F}_0^{k} = [0, -k(2a\sin\theta - 2a), 0]_1$

$\vec{A}_{0\to2} = -\vec{A}_{2\to0} = [-A_x, -A_y, 0]_1$

$\vec{B}_2 = [B_x, 0, 0]_1$

Las fuerzas $\vec{P}_2$, $\vec{F}_2^*$ son activas las fuerzas $\vec{A}_{o\to2}$, $\vec{B}_2$ son vinculares.

Incógnitas del problema

Tenemos 6 incógnitas: $\{\theta,\ O_x,\ O_y,\ A_x,\ A_y,\ B_x\}$

Al ser un problema plano tenemos 6 ecuaciones, 3 por cada sólido.

5.- Energías cinética y potencial

A partir de ahora la barra "2" no tiene masa. Por tanto no tiene ni energía cinética ni potencial.

Energía cinética de "o"

Al ser o un punto fijo tenemos

$$\boxed{T^{\text{"o"}} = \frac{1}{2} I_o |\vec{\omega}_{01}|^2 = \frac{2}{3} m a^2 \dot{\theta}^2}$$

Energía potencial de "o"

Escogemos $y=0$ como origen de la energía potencial gravitatoria

$$U_g = m g a \sin\theta$$

Para la energía potencial elástica tenemos

$$U_k = \frac{1}{2} k (\overline{G_0 G_2} - 2a)^2 = 2 k a^2 (1 - \sin\theta)^2$$

Por tanto

$$\boxed{U = U_g + U_k = mga\,\operatorname{sen}\theta + 2ka^2(1-\operatorname{sen}\theta)^2}$$

6. Ecuación de Lagrange

La Lagrangiana es

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{2}{3}ma^2 - mga\,\operatorname{sen}\theta - 2ka^2(1-\operatorname{sen}\theta)^2$$

No hay fuerzas activas no conservativas. Entonces la ecuación de Lagrange para θ es

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$$

Tenemos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = \frac{4}{3}ma^2\dot\theta \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right) = \frac{4}{3}ma^2\ddot\theta$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -mga\cos\theta + 4ka^2\cos\theta(1-\operatorname{sen}\theta)$$

La ecuación es

$$\boxed{\frac{4}{3}ma^2\ddot\theta + mga\cos\theta - 4ka^2\cos\theta(1-\operatorname{sen}\theta) = 0}$$

7. Fuerza aplicada en A

Aplicamos una fuerza $\vec{F} = F_0 \vec{i}_1$ en A. La ecuación de Lagrange encontrada en 6 se escribe ahora

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = Q_\theta^{NC}$$

La fuerza generalizada no conservativa es

$$Q_\theta^{NC} = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{v}_{01}^{\,A}}{\partial \dot{\theta}}$$

Tenemos $\vec{OA} = \vec{r}_{01}^{\,A} = 2a\cos\theta\,\vec{i}_1 + 2a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{j}_1$

y $\vec{v}_{01}^{\,A} = \left.\frac{d\vec{r}_{1}^{\,A}}{dt}\right|_1 = -2a\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{i}_1 + 2a\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{j}_1$

Entonces

$$Q_\theta^{NC} = (F_0\,\vec{i}_1)\cdot(-2a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{i}_1 + 2a\cos\theta\,\vec{j}_1) = -2aF_0\,\mathrm{sen}\,\theta$$

La ecuación de movimiento es

$$\boxed{\frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta} + mga\cos\theta - 4ka^2\cos\theta(1-\mathrm{sen}\,\theta) = -2aF_0\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

8. Vínculo restringido cinemático

Si queremos que se cumpla el vínculo $\dot{\theta} = \omega_0$, tenemos que aplicar sobre "C" un par $\vec{\tau} = \tau_0 \vec{\imath}_1$. Este par produce una fuerza generalizada

$$Q_\theta^{NC} = \vec{\tau} \cdot \frac{\partial \vec{\omega}_{01}}{\partial \dot{\theta}} = \tau_0$$

La ecuación de Lagrange quedaría

$$\frac{4}{3} m a^2 \ddot{\theta} + mga \cos\theta - 4ka^2 \cos\theta (1 - \operatorname{sen}\theta) = \tau_0$$

Aplicamos ahora el vínculo

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\theta} = \omega_0 \\ \theta(0) = 0 \end{array}\right| \longrightarrow \begin{array}{l} \theta(t) = \omega_0 t \\ \ddot{\theta} = 0 \end{array}$$

Entonces el par es

$$\tau_0 = mga \cos(\omega_0 t) - 4ka^2 \cos(\omega_0 t) (1 - \operatorname{sen}(\omega_0 t))$$

9. Percusión

Antes de la percusión tenemos

$$\theta(0) = \frac{\pi}{4} \qquad \dot{\theta}^- = 0$$

La percusión es $\vec{\hat{F}} = \hat{F}_0 (\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1)$

La ecuación de Lagrange percusiva es

$$\Delta p_\theta = \hat{Q}_\theta^{NC}$$

Tenemos

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3} ma^2 \dot{\theta}$$

y

$$\Delta p_\theta = \frac{4}{3} ma^2 (\dot{\theta}^+ - \dot{\theta}^-) = \frac{4}{3} ma^2 \dot{\theta}^+$$

La percusión generalizada es

$$\hat{Q}_\theta^{NC} = \vec{\hat{F}} \cdot \frac{\partial \vec{v}_{01}^{\,A}}{\partial \dot{\theta}} = \hat{F}_0 \, 2a \left(-\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\right)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = 0$$

Por tanto

$$\boxed{\dot{\theta}^+ = 0}$$

La percusión tiene la misma dirección que la barra "0", por eso no produce movimiento.