Tema 7: Dinámica del sólido rígido libre

Mecánica Racional, 2º, Grado en Ingeniería Civil

Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Índice

Campos de momentos en el sólido rígido

- Campo de velocidades

$$\vec{v}^{\,P} = \vec{v}^{\,O} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}$$

- Reducción cinemática

$$\{\vec{v}^{\,O}, \vec{\omega}\}$$

- Campo de momentos cinéticos

$$\vec{L}_P = \vec{L}_O + \vec{C} \times \overrightarrow{OP}$$

- Reducción cinética

$$\{\vec{L}_O, \vec{C}\}$$

- Campo de momentos de fuerzas externas

$$\vec{M}_P^{\text{ext}} = \vec{M}_O^{\text{ext}} + \vec{F}^{\text{ext}} \times \overrightarrow{OP}$$

- Reducción dinámica

$$\{\vec{M}_O^{\text{ext}}, \vec{F}^{\text{ext}}\}$$

- El sólido rígido libre tiene 6 grados de libertad
- En el problema dinámico la reducción dinámica es un dato y la cinemática es la incógnita

Índice

- Campos de momentos en el sólido rígido
- Teoremas generales
- Ecuaciones de Euler
- Sólido en caída libre

- Los teoremas T.C.M. y T.M.C. aportan las 6 ecuaciones diferenciales necesarias para determinar el movimiento de un sólido rígido libre

- T.C.M.: resuelve la traslación de *G*

$$\vec{F}^{\mathrm{ext}} = \dot{\vec{C}} = M\dot{\vec{v}}^{G}_{21} \Longrightarrow \vec{v}^{G}_{21}(t)$$

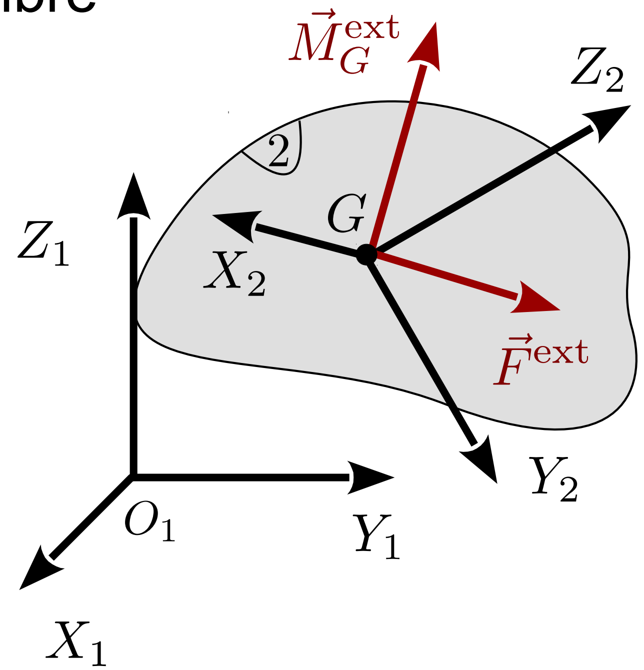
- T.M.C. aplicado en G: resuelve la rotación alrededor de *G*

$$\vec{M}^{\mathrm{ext}}_{G} = \dot{\vec{L}}_{G} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overset{\leftrightarrow}{I}_{G}\cdot\vec{\omega}_{21}\right) \Longrightarrow \vec{\omega}_{21}(t)$$

  - En ambos casos hay que aportar las condiciones iniciales
  - ESTÁTICA y sólidos de masa despreciable en movimiento

$$\vec{F}^{\mathrm{ext}} = \vec{0} \qquad \vec{M}^{\mathrm{ext}}_{A} = \vec{0} \qquad A \text{ arbitrario}$$

- Descripción del movimiento de un sólido rígido libre



- Reducción cinemática en *G*

$$\vec{v}_{21}^{G} = [v_x,\, v_y,\, v_z]_1 \qquad \vec{\omega}_{21} = [\omega_x,\, \omega_y,\, \omega_z]_2$$

- Reducción dinámica en *G*

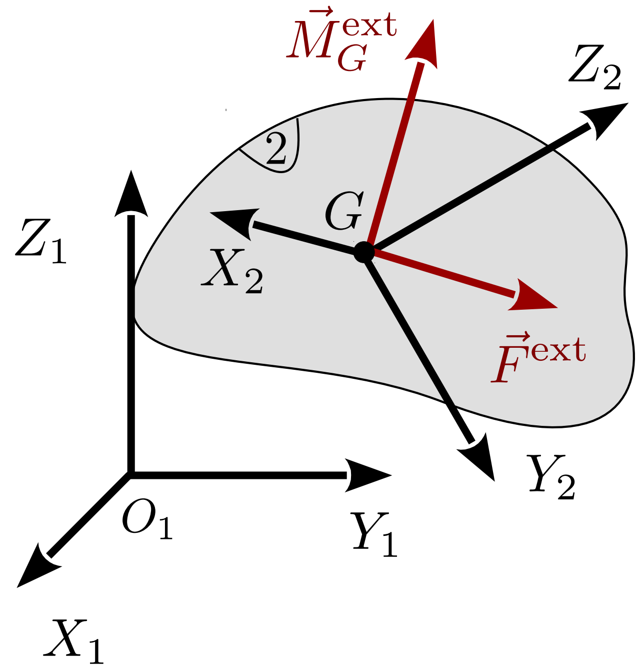
$$\vec{F}^{\rm ext} = [F_x,\, F_y,\, F_z]_1 \qquad \vec{M}_A^{\rm ext} = [M_x,\, M_y,\, M_z]_2$$

- T.C.M.

$$\dot{\vec{C}} = M\dot{\vec{v}}_{21}^{G} = \vec{F}^{\rm ext} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} M\dot{v}_x = F_x \\ M\dot{v}_y = F_y \\ M\dot{v}_z = F_z \end{array} \right.$$

- T.M.C. en G

$$\dot{\vec{L}}_G = \vec{M}_G^{\text{ext}} = [M_x,\, M_y,\, M_z]_2$$



$$\vec{L}_G = \overset{\leftrightarrow}{I}_G \cdot \vec{\omega}_{21} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_2$$

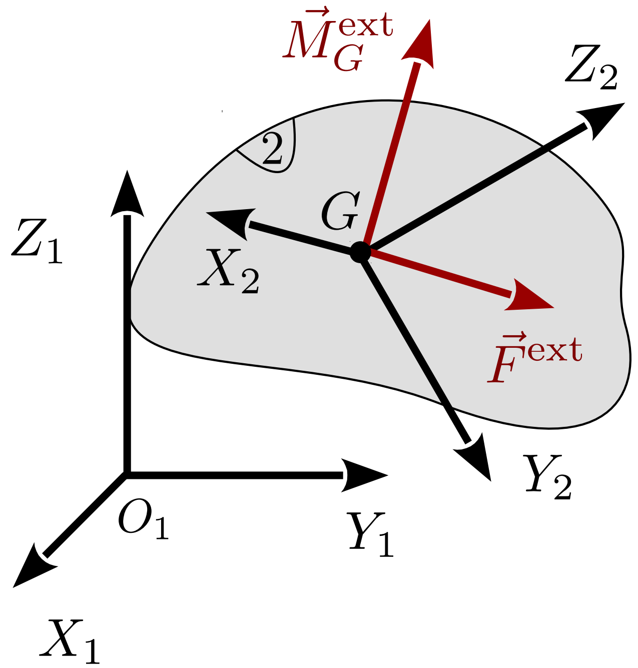
$$= I_{xx}\omega_x\,\vec{\imath}_2 + I_{yy}\omega_y\,\vec{\jmath}_2 + I_{zz}\omega_z\,\vec{k}_2$$

$$\dot{\vec{L}}_G = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{L}_G}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{L}_G}{\mathrm{d}t}\right|_2 + \vec{\omega}_{21} \times \vec{L}_G$$

$$= I_{xx}\dot{\omega}_1\,\vec{\imath}_2 + I_{yy}\dot{\omega}_2\,\vec{\jmath}_2 + I_{zz}\dot{\omega}_3\,\vec{k}_2 + \begin{vmatrix} \vec{\imath}_2 & \vec{\jmath}_2 & \vec{k}_2 \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ I_{xx}\omega_x & I_{yy}\omega_y & I_{zz}\omega_z \end{vmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} M\dot{v}_x = F_x \\ M\dot{v}_y = F_y \\ M\dot{v}_z = F_z \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} I_{xx}\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z(I_{zz} - I_{yy}) = M_x \\ I_{yy}\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x(I_{xx} - I_{zz}) = M_y \\ I_{zz}\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y(I_{yy} - I_{xx}) = M_z \end{array}\right.$$

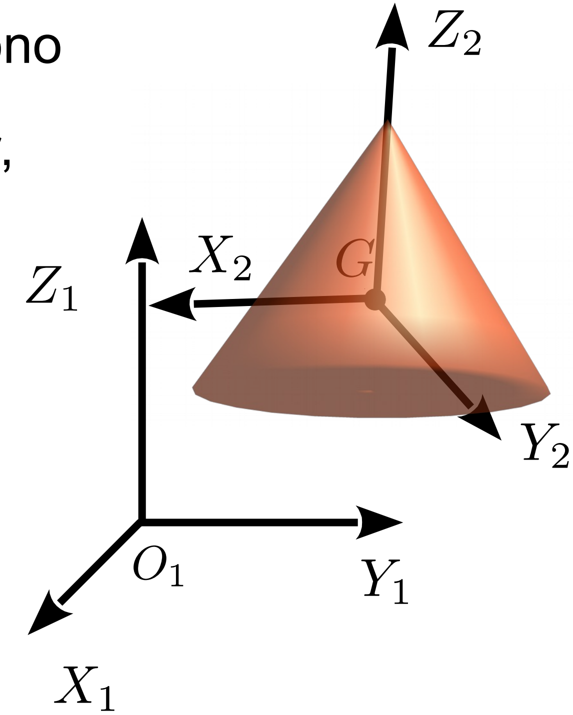


- El CM se mueve como una partícula de masa *M* concentrada en *G* sometida a la acción de la fuerza externa neta
- El sólido rota alrededor del CM sometido al momento neto de las fuerzas externas

- En estos sólidos $I_{xx}=I_{yy}$ (sólido de revolución o polígono regular, prisma o pirámide de base poligonal regular, etc)

$$I_{zz}\dot{\omega}_z = M_z$$

$$M_z = 0 \Longrightarrow I_{zz}\omega_z = L_G^{Z_2} = cte$$

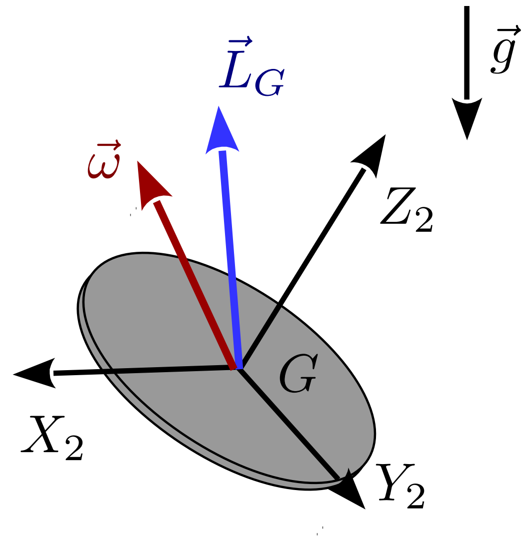


- Si las fuerzas externas son paralelas y/o cortan a un eje que pase por *G*, la componente del momento cinético respecto a ese eje se conserva

Índice

- Campos de momentos en el sólido rígido
- Teoremas generales
- Ecuaciones de Euler
- Sólido en caída libre

- Suponemos $I_{xx}=I_{yy}$ sometido sólo a la gravedad
- El CM describe un movimiento parabólico



$$\vec{F}^{\text{ext}} = -P\,\vec{k}_1 \Longrightarrow \dot{v}_z = \begin{cases} \dot{v}_x = 0 \\ \dot{v}_y = 0 \\ \dot{v}_z = -(P/M)\,\vec{k}_1 \end{cases}$$

- La energía mecánica se conserva

$$E = \frac{1}{2}M|\vec{v}_G(0)|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}(0)\cdot\overset{\leftrightarrow}{I}_G\cdot\vec{\omega}(0) + Mgh(0)$$

$$= \frac{1}{2}M|\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\overset{\leftrightarrow}{I}_G\cdot\vec{\omega} + Mgz$$

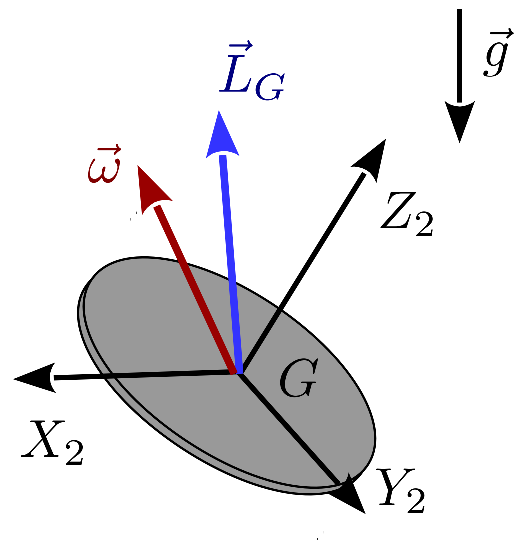
- La componente del vector rotación sobre Z_2 se conserva

$$I_{xx} = I_{yy} \Longrightarrow I_{zz}\dot{\omega}_z = 0 \Longrightarrow \omega_z = \text{cte}$$

- El momento cinético respecto a G se conserva

$$\vec{M}_G^{\text{ext}} = \overrightarrow{GG} \times \vec{P} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{L}_G = \vec{\text{cte}}$$

  - Da una dirección fija durante el movimiento



- El módulo del vector rotación se conserva

$$|\vec{L}_G|^2 = I_{xx}^2\omega_x^2 + I_{yy}^2\omega_y^2 + I_{zz}^2\omega_z^2 =$$

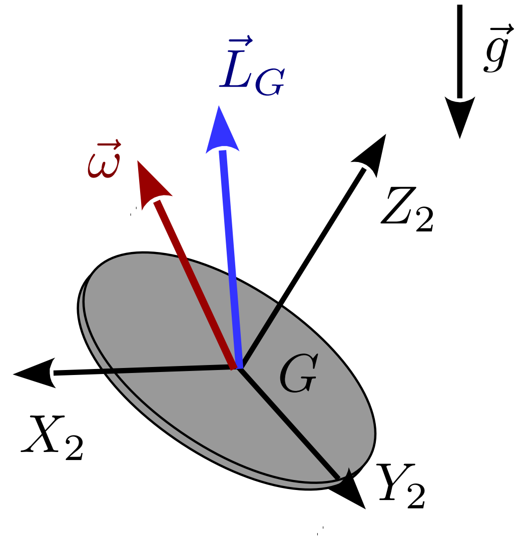
$$= I_{xx}^2\underbrace{(\omega_x^2 + \omega_y^2)}_{\text{cte}} + I_{zz}^2\underbrace{\omega_z^2}_{\text{cte}} = \text{cte}$$

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = |\vec{\omega}|^2 = \text{cte}$$

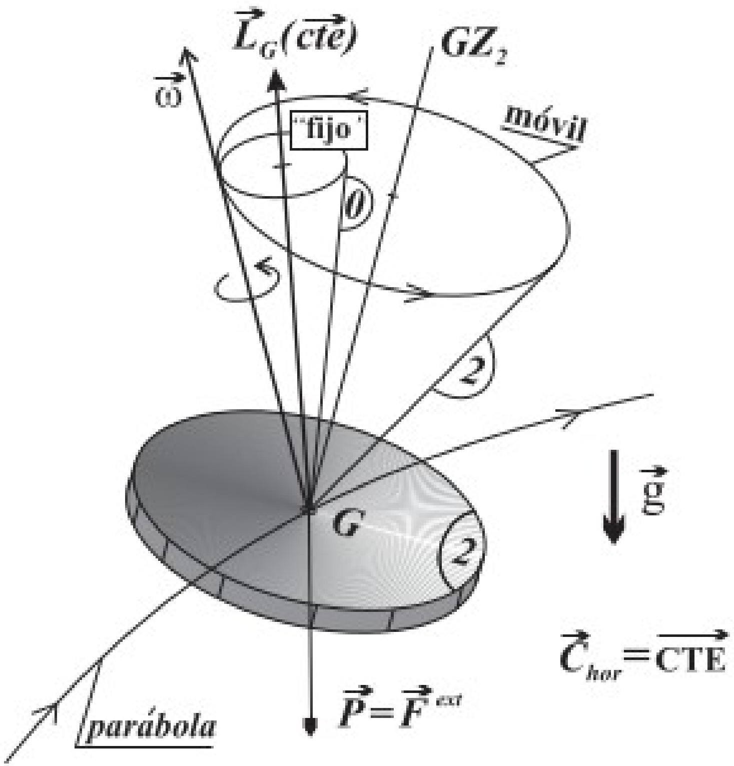
- El ángulo de ***L***$_G$ y ***w*** se conserva

$$\cos\beta = \frac{\vec{L}_G\cdot\vec{\omega}}{|\vec{L}_G||\vec{\omega}|} = \frac{I_{xx}(\omega_x^2+\omega_y^2) + I_{zz}\omega_z^2}{|\vec{L}_G||\vec{\omega}|} = \frac{\text{cte}}{\text{cte}\,\text{cte}} = \text{cte}$$

- El movimiento tiene estas características
  - El vector $\boldsymbol{L}_G$ es constante
  - El vector $\boldsymbol{w}$ describe un cono alrededor de la dirección del momento cinético (precesa), a ritmo constante
  - El eje GZ_2 describe otro cono distinto alrededor de la dirección del momento cinético (precesa), a ritmo constante
  - La rotación del sólido alrededor del eje GZ_2 es constante



- El sólido se mueve con tres movimientos elementales
  - TRASLACIÓN de su CM con velocidad $\boldsymbol{v}_G$ siguiendo una trayectoria parabólica
  - ROTACIÓN uniforme del sólido alrededor de GZ_2
  - ROTACIÓN uniforme del eje GZ_2 alrededor de la dirección fija marcada por $\boldsymbol{L}_G$



$$I_{zz} > I_{xx} = I_{yy}$$

- El sólido rota como si estuviera soldado a un cono móvil que rueda sin deslizar respecto a un cono fijo, que a su vez se traslada en una trayectoria parabólica