Tema 2: Movimiento unidimensional

FíSICA I, 1º, Grado en Ingeniería Civil

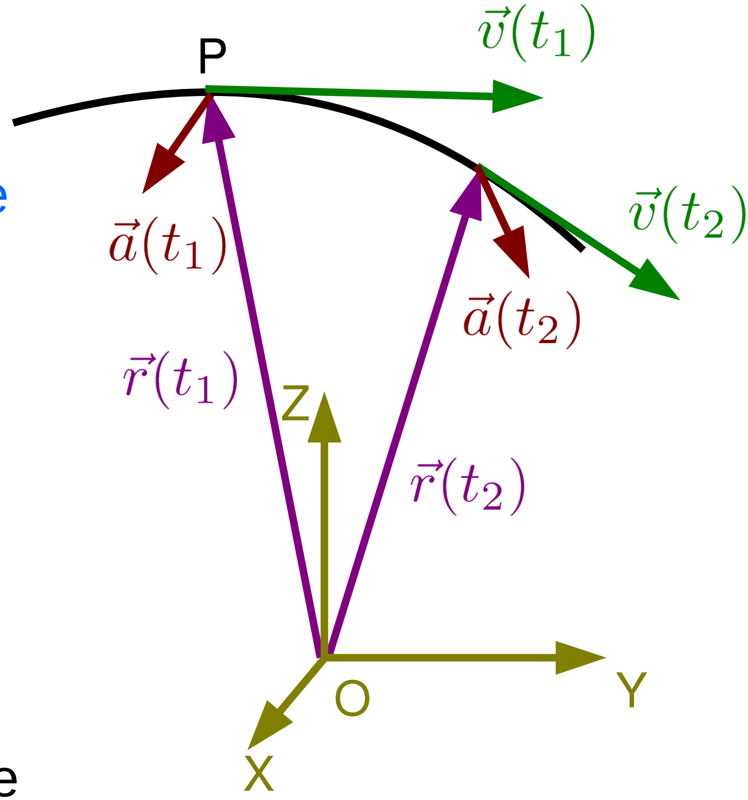
Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

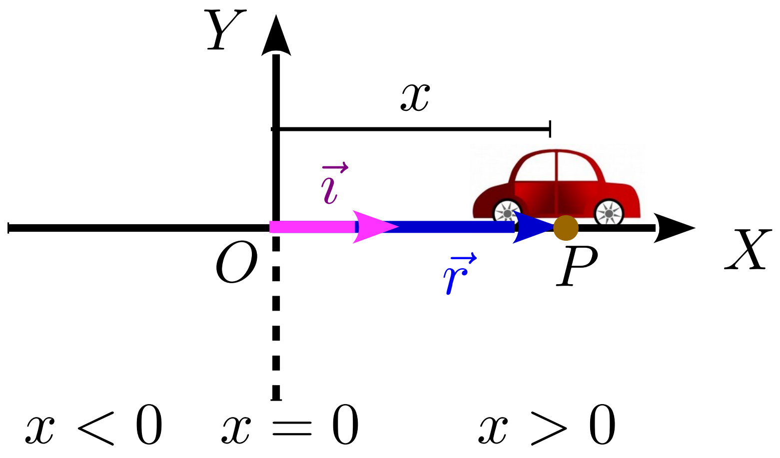
- Introducción
- Vector de posición
- Velocidad y aceleración
- Problemas con velocidad y aceleración dadas
- Distancia y desplazamiento
- Movimiento uniforme y uniformemente acelerado

- Punto material: la partícula es un punto sin dimensiones
- El movimiento se describe utlizando un sistema de coordenadas definido respecto a un sistema de referencia
- La posición en cada instante viene dada por el vector de posición $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$
  - El punto describe una curva en el espacio, la trayectoria
- La velocidad $\vec{v}$ da la tasa de variación de la posición
- La aceleración $\vec{a}$ da la tasa de variación de la velocidad
- El tiempo es el parámetro en función del que se describe el movimiento



Índice

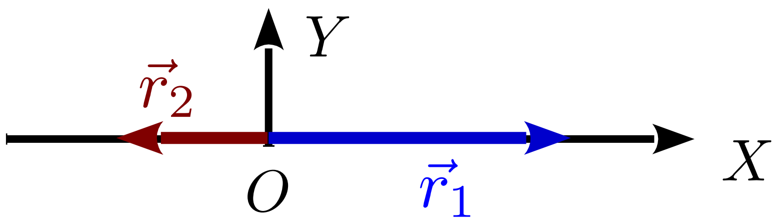
- El movimiento se produce a lo largo de una recta
- La posición en la recta se expresa usando el vector de posición

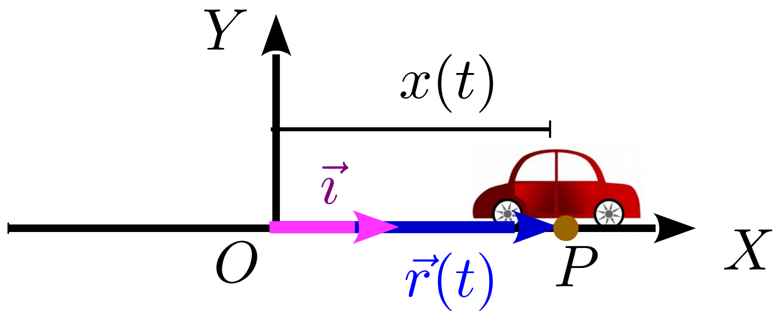


$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\,\vec{\imath}$$

- La posición del punto P se expresa respecto al origen de coordenadas O
- La coordenada x da la posición en el eje
  - Puede ser negativa o positiva
- El vector unitario $\vec{\imath}$ da la dirección de la recta y el sentido positivo
- En general, un vector tiene módulo, dirección y sentido
  - Los vectores NO TIENEN SIGNO, lo que tiene signo son las componentes del vector

$$\vec{r}_1 = 20\,\vec{\imath}\,(\mathrm{m})$$
$$\vec{r}_2 = -10\,\vec{\imath}\,(\mathrm{m})$$

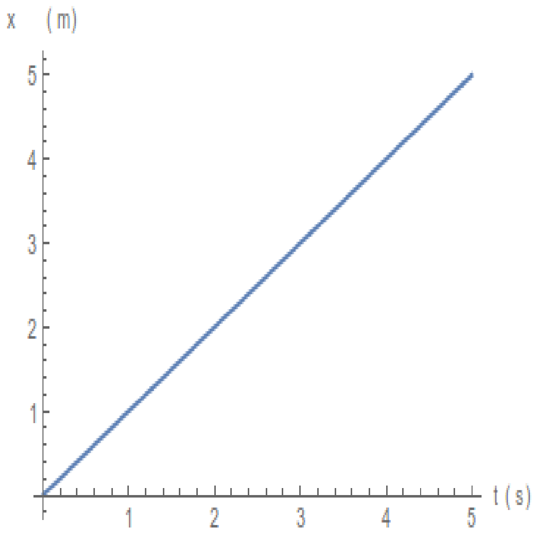


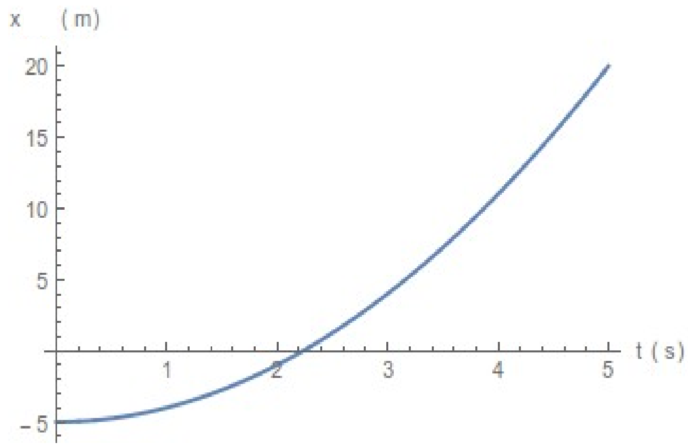


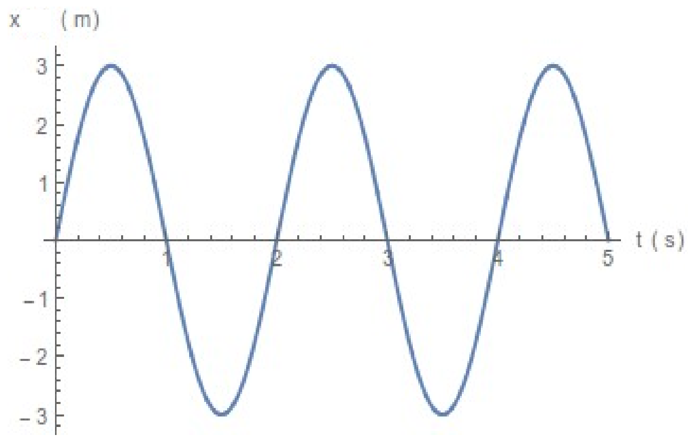
- Cuando hay movimiento, el valor de la coordenada cambia con el tiempo: el vector de posición es una función del tiempo

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t) = x(t)\,\vec{\imath}$$

  - Ejemplos

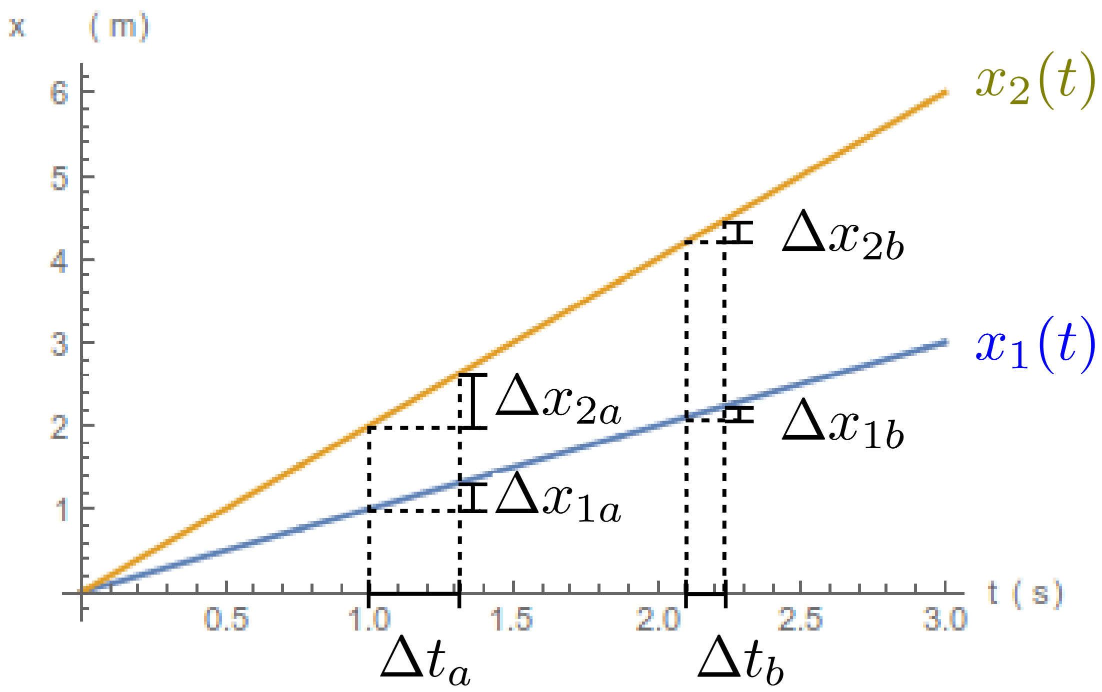


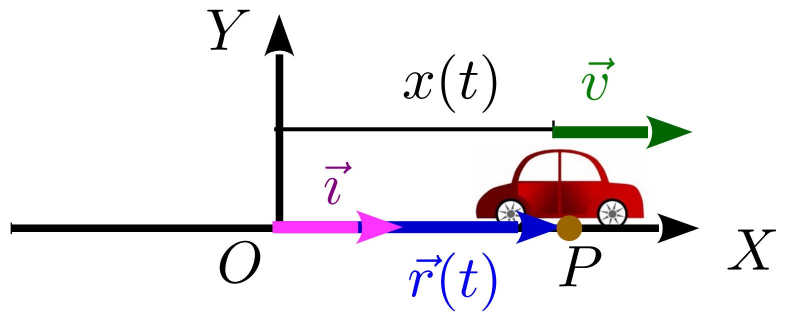




Índice

Velocidad uniforme





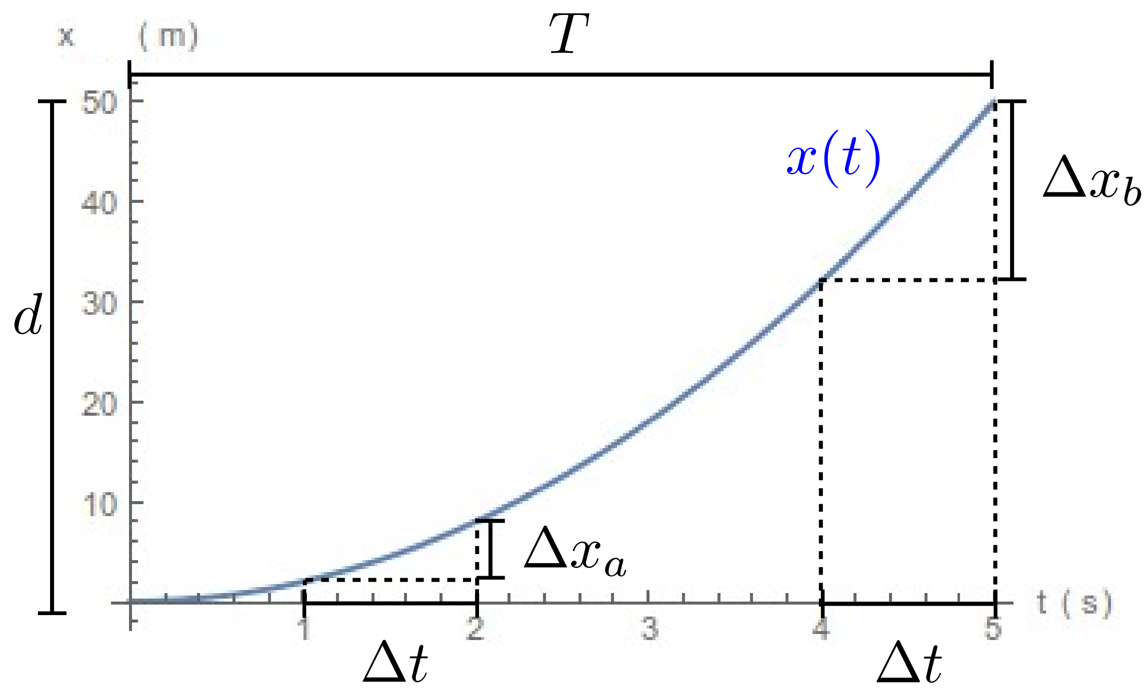
$$v_1 = \frac{\Delta x_{1a}}{\Delta t_a} = \frac{\Delta x_{1b}}{\Delta t_b}$$

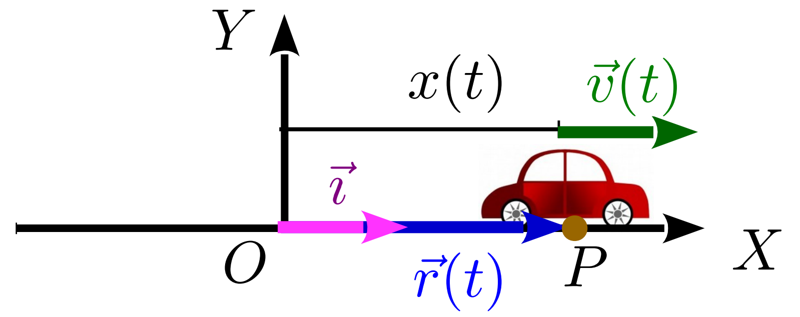
$$v_2 > v_1$$

$$v_2 = \frac{\Delta x_{2a}}{\Delta t_a} = \frac{\Delta x_{2b}}{\Delta t_b}$$

- La gráfica representa dos mov. rectilíneos uniformes (m.r.u.)
- Velocidad en el m.r.u. $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{d}{T}$
  - Es la pendiente de la recta x(t)
  - En el S.I. se mide en m/s
- Vector velocidad $\vec{v} = v\,\vec{\imath}$

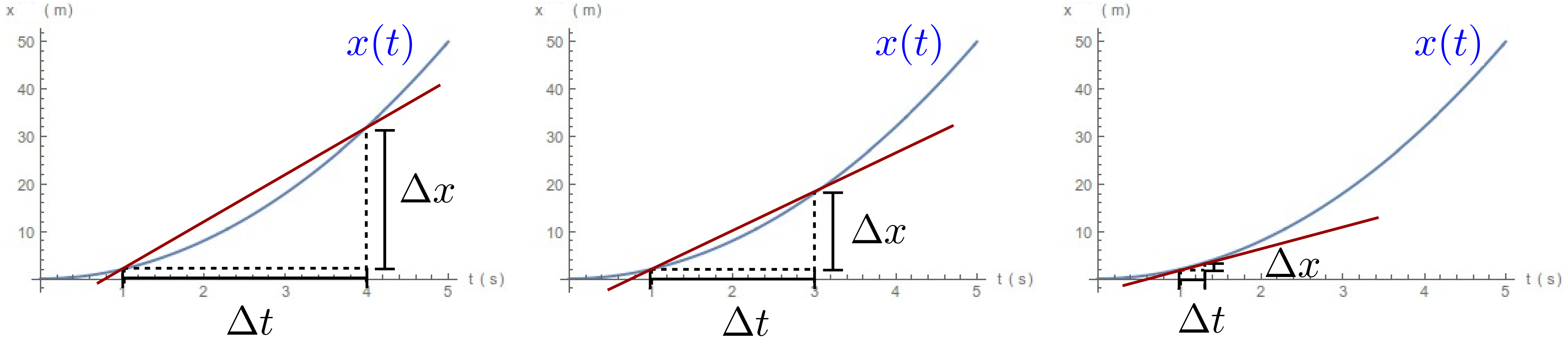
Velocidad instantánea





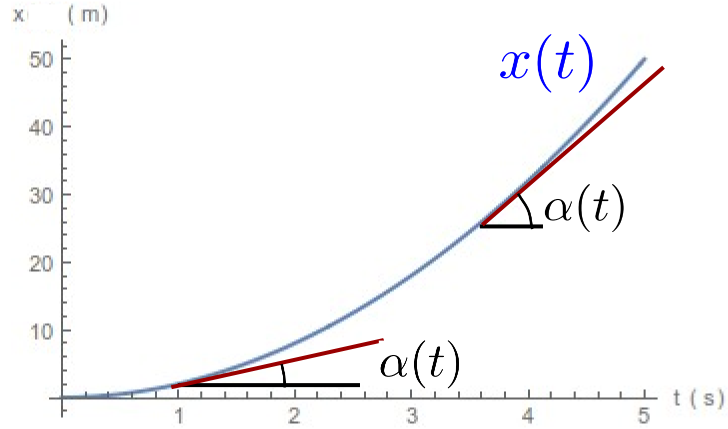
$$\frac{\Delta x_b}{\Delta t} \geq \frac{\Delta x_a}{\Delta t} \Longrightarrow v \neq \text{cte}$$

- La gráfica representa un movimiento no uniforme
- Velocidad media $\quad v_m = d/T$
  - No describe el movimiento con precisión
  - Necesitamos una magnitud que describa el cambio de velocidad en cada instante de tiempo
  - Esto se puede conseguir haciendo Δt muy pequeño



- Velocidad instantánea

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x'(t)$$



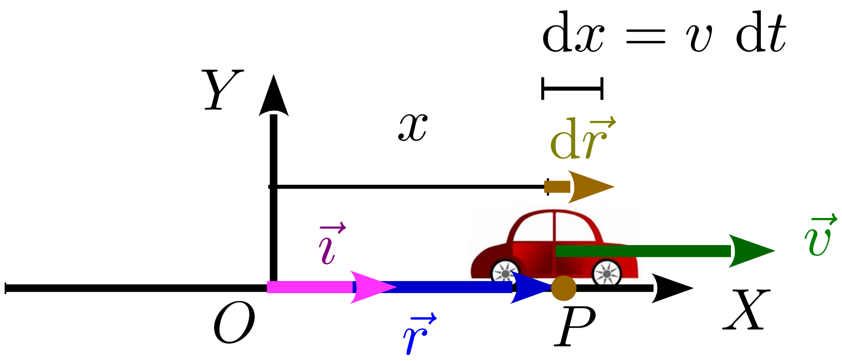
$$\tan\alpha = \mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t$$

- Es la tasa de variación de x(t) en cada instante
    - Es también la pendiente de la tangente a x(t)
- No hay que confundir diferencial con derivada

$$\mathrm{d}x = x'(t)\ \mathrm{d}t = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\ \mathrm{d}t$$

- En Física, un diferencial de una magnitud es una cantidad muy pequeña de esa magnitud

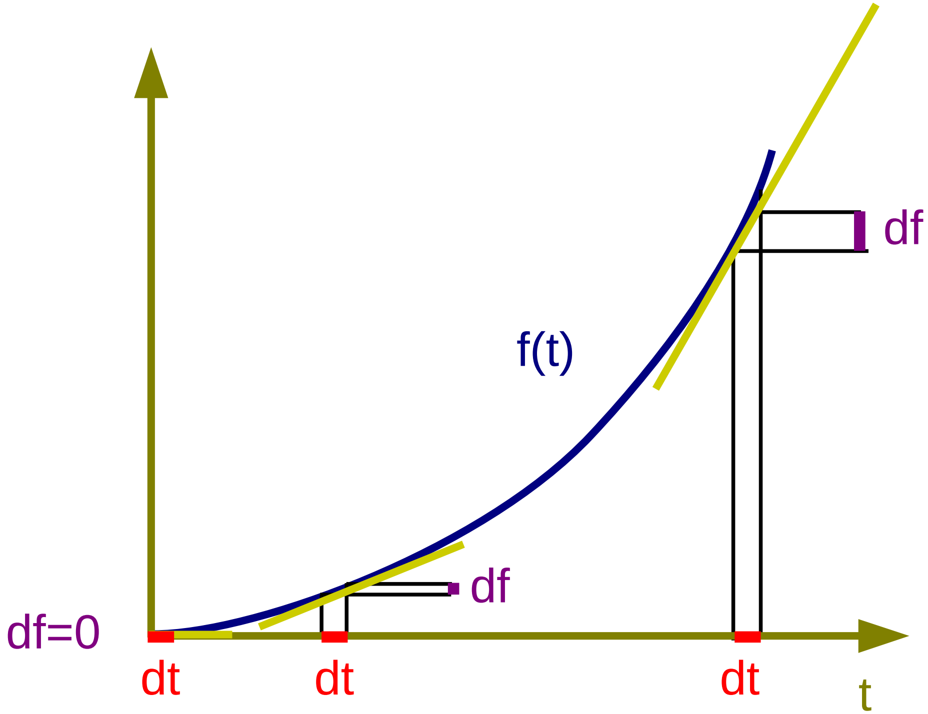
- dx es el desplazamiento de la partícula durante dt



- El vector desplazamiento durante dt es un vector diferencial, es decir, de módulo muy pequeño $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,\vec{\imath} = v\,\mathrm{d}t\,\vec{\imath}$

- Ejemplo $f(t) = \frac{1}{2}t^2$
  - Derivada de la función

$$f'(t) = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right) = t$$



  - Diferencial de la función

$$\mathrm{d}f = f'(t)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t = t\ \mathrm{d}t$$

  - El mismo dt produce df distintos según en que punto de la curva nos encontremos

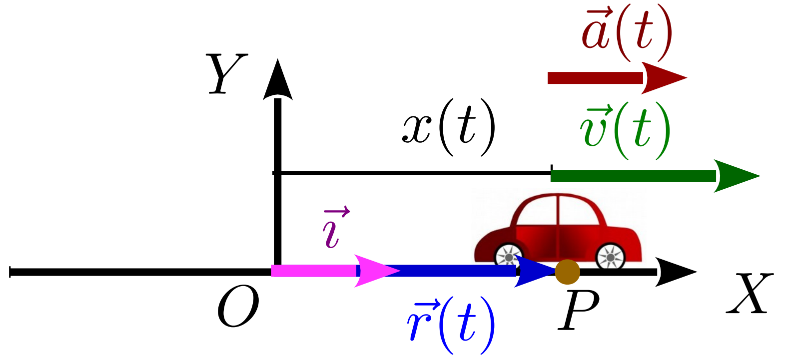
$$\mathrm{t} = 0. \rightarrow \mathrm{d}f = 0.\,\mathrm{d}t \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0.} = 0. \qquad (\,\mathrm{d}t = 0.01 \rightarrow \mathrm{d}f = 0.00)$$

$$\mathrm{t} = 0.1 \rightarrow \mathrm{d}f = 0.1\,\mathrm{d}t \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0.1} = 0.1 \qquad (\,\mathrm{d}t = 0.01 \rightarrow \mathrm{d}f = 0.001)$$

$$\mathrm{t}= 2 \rightarrow \mathrm{d}f = 2\,\mathrm{d}t \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)_{t=2} = 2 \qquad (\,\mathrm{d}t = 0.01 \rightarrow \mathrm{d}f = 0.02)$$

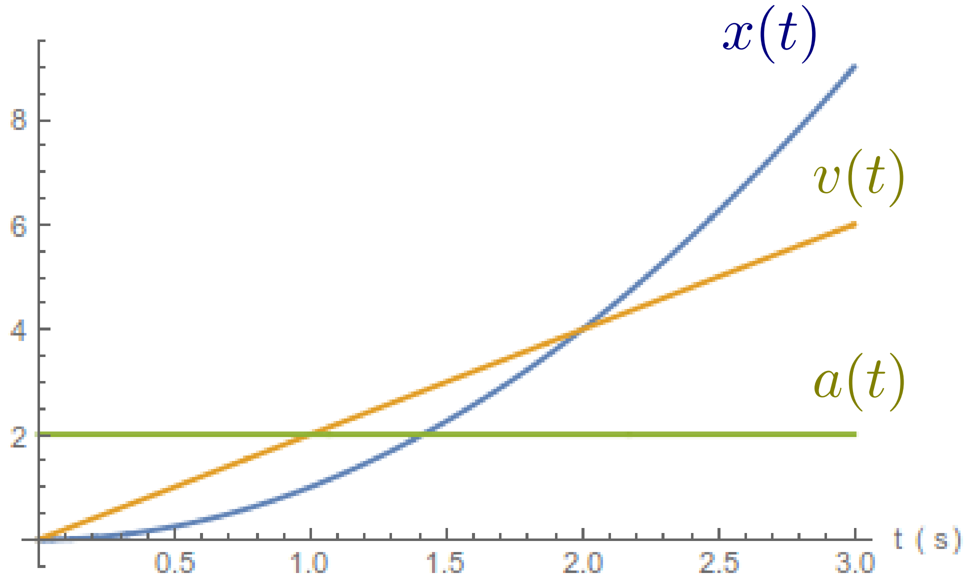
- Aceleración instantánea

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v'(t) \qquad \vec{a}(t) = a(t)\,\vec{\imath}$$



  - Es la tasa de variación de v(t) en cada instante
    - Está relacionada con la concavidad de x(t)
  - Se mide en m/s^2 (SI)
  - Relación con x(t)

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$



  - Notación en Mecánica para la derivada respecto al tiempo

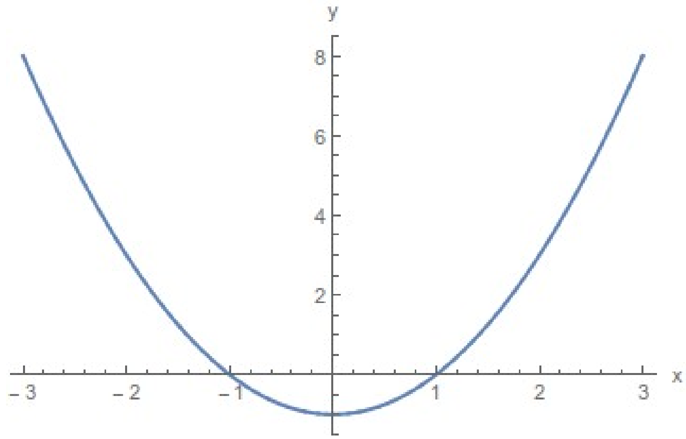
$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} \qquad a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} = \ddot{x}$$

Índice

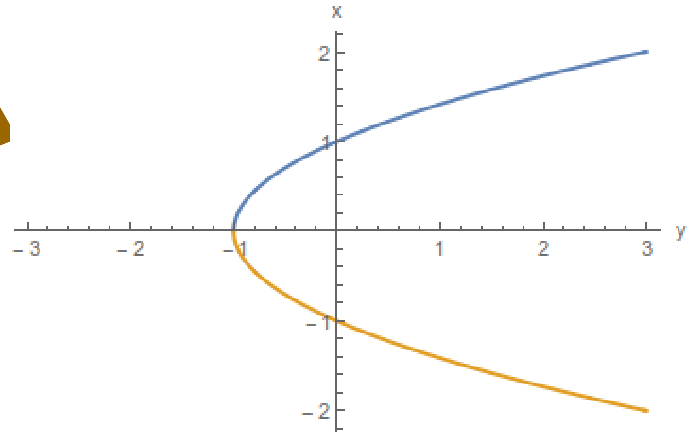
- Ecuación escalar: la incógnita es un número

$$x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -2$$

- Ecuación funcional algebraica: la incógnita es una función



$$y - x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} y(x) = x^2 - 1 \\ \\ x(y) = \pm\sqrt{1+y} \end{array} \right.$$

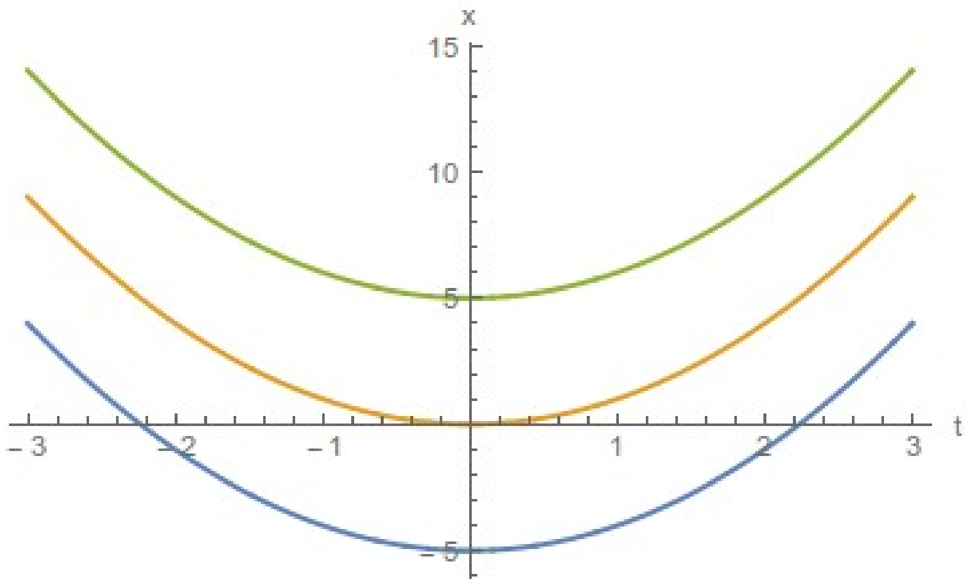


- La incógnita es una función y la ecuación contiene derivadas de la función
- Ecuación diferencial de primer orden $x' - 2t = 0$
  - La solución es una función x(t) cuya derivada sea 2t

$$x = t^2$$
$$x = t^2 + 1$$
$$x = t^2 - 1$$
$$x = t^2 + \sqrt{234}$$
$$x = t^2 + \ln(\operatorname{sen}(\sqrt{119}))$$

$$\Rightarrow \quad x = t^2 + C$$

- La solución está indeterminada por una constante arbitraria
  - Ocurre siempre en las ecuaciones diferenciales de primer orden

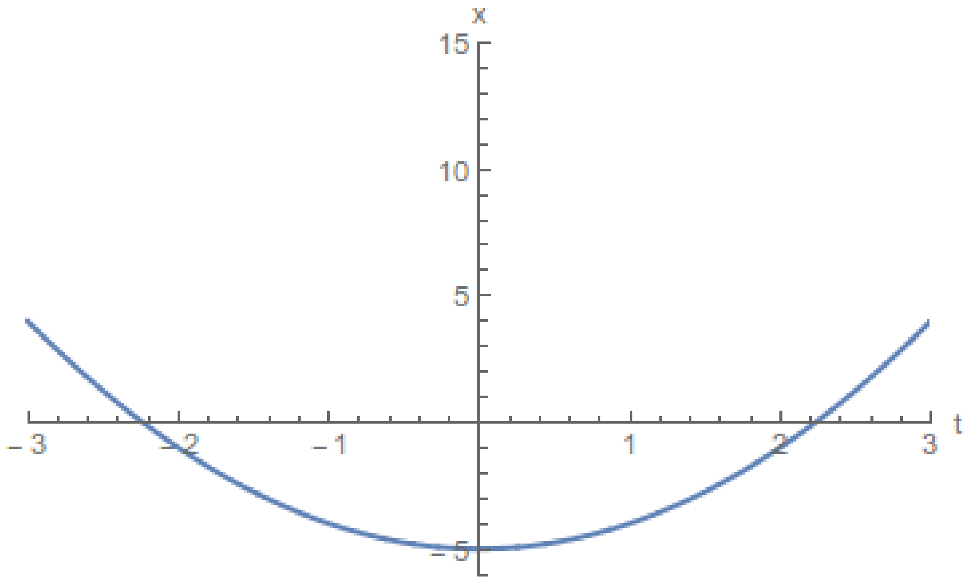


- Notación de Leibniz

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2t = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}x = 2t\ \mathrm{d}t$$

  - Cuando se puede separar de modo que la incógnita y la variable no aparezcan mezcladas se dice que es de variables separables

$$\int \mathrm{d}x = \int 2t\ \mathrm{d}t \quad \rightarrow \quad x = t^2 + C$$



  - Se necesita una condición inicial para elegir una de las soluciones

$$x(0) = -5 \quad \rightarrow \quad x = t^2 - 5$$

Velocidad dada

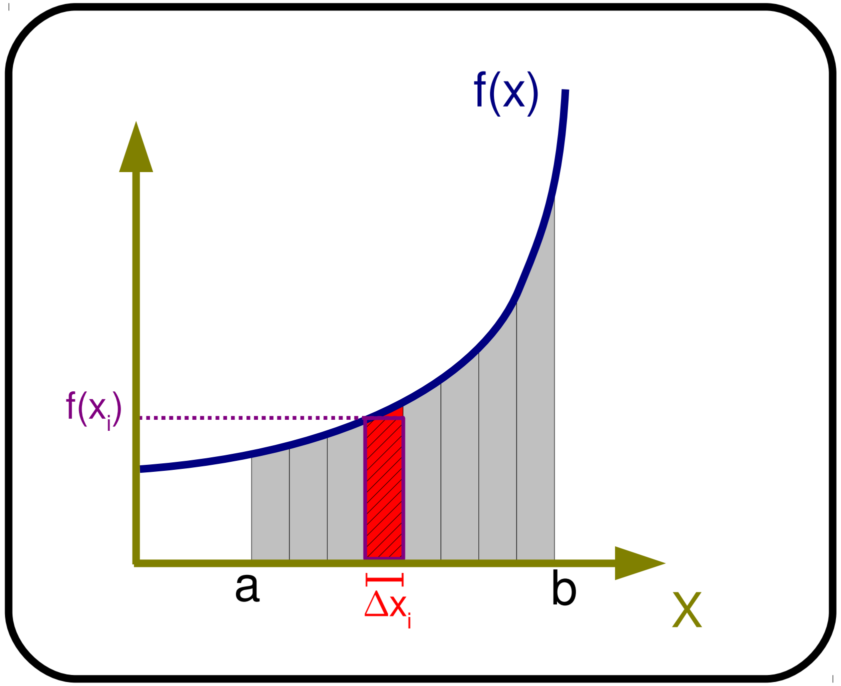
- El dato es v(t) y $x(t_0)=x_0$ y hay que encontrar x(t)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(t) \rightarrow \mathrm{d}x = v(t)\ \mathrm{d}t \rightarrow \int \mathrm{d}x = \int v(t)\ \mathrm{d}t \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x(t) = \int v(t)\ \mathrm{d}t + C \\ x(t_0) = x_0 \end{array}}$$

- Otra forma de escribirlo es usando la regla de Barrow, poniendo la condición inicial en los limites de las integrales

$$\int_{x_0}^{x(t)} \mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t} v(t)\ \mathrm{d}t \rightarrow \boxed{x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)\ \mathrm{d}t}$$

- Para conocer la posición de una partícula no basta con saber su velocidad, hace falta saber donde se encuentra en un instante dado



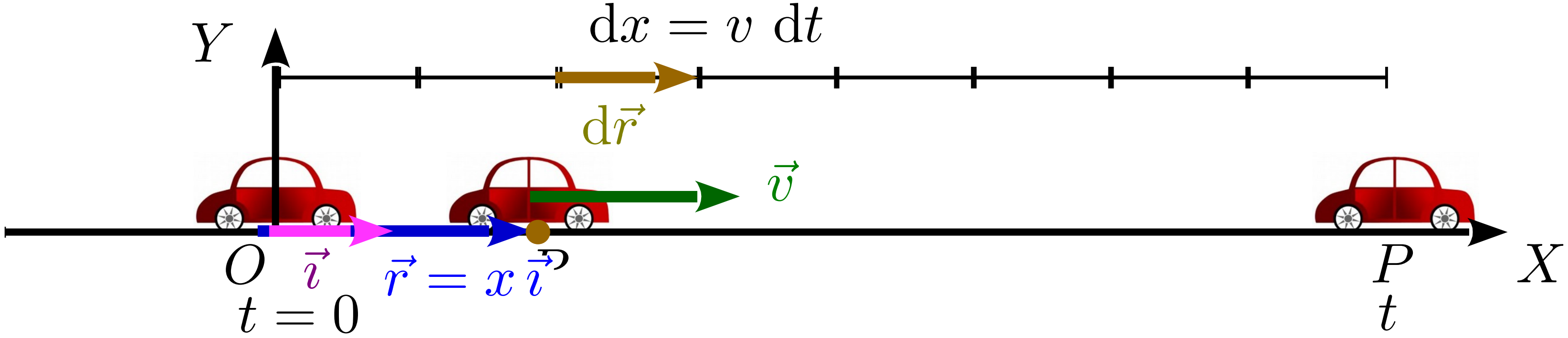
$$\text{Área}[a,b] \simeq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

$$\Delta x \to 0$$
$$n \to \infty$$

$$\text{Área}[a,b] = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x_i)\mathrm{d}x$$

- En Física, una integral definida es una suma de cosas muy pequeñas
- Se puede sumar cualquier objeto matemático: vectores, áreas, volúmenes, productos escalares....

- Resolver la ecuación diferencial para x(t) puede interpretarse como sumar los desplazamientos realizados para un tiempo t dado



$$\overline{OP} = \int_O^P \mathrm{d}x = \int_0^t v(t)\ \mathrm{d}t$$

- El vector desplazamiento es la suma vectorial de los desplazamientos vectoriales infinitesimales

$$\overrightarrow{OP} = \int_O^P \mathrm{d}\vec{r} = \int_O^P \mathrm{d}x\,\vec{\imath} = \vec{\imath}\int_0^t v(t)\ \mathrm{d}t$$

Aceleración dada

- Datos $a(t), v(t_0) = v_0, x(t_0) = x_0$ Incógnitas $v(t), x(t)$

$$\frac{dv}{dt} = a(t) \rightarrow dv = a(t)\ dt \rightarrow \int dv = \int a(t)\ dt \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} v(t) = \int a(t)\ dt + C \\ v(t_0) = v_0 \end{array}}$$

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \rightarrow dx = v(t)\ dt \rightarrow \int dx = \int v(t)\ dt \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x(t) = \int v(t)\ dt + C \\ x(t_0) = x_0 \end{array}}$$

- Con la regla de Barrow

$$\boxed{v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)\ dt} \qquad \boxed{x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)\ dt}$$

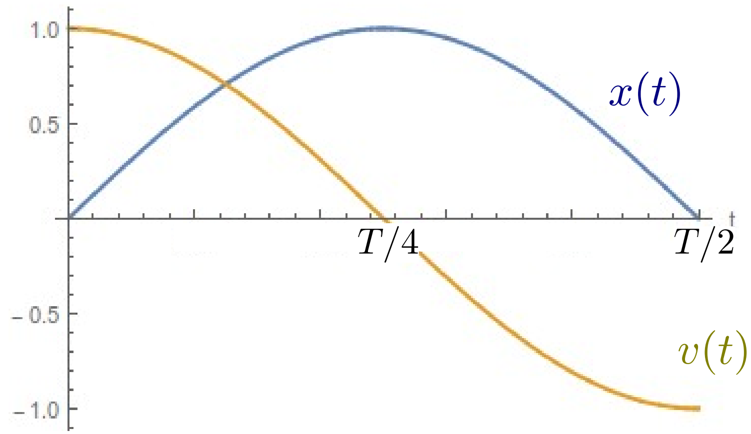
Índice

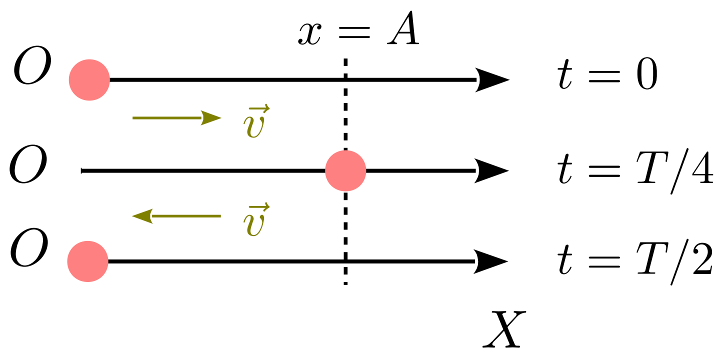
- Introducción
- Vector de posición
- Velocidad y aceleración
- Problemas con velocidad y aceleración dadas
- Distancia y desplazamiento
- Movimiento uniforme y uniformemente acelerado

- La distancia recorrida es la suma de los módulos de los desplazamientos

$$\mathrm{d}s = |\,\mathrm{d}\vec{r}| = |\,\mathrm{d}x| = |\vec{v}|\ \mathrm{d}t$$

  - Ejemplo





$$x(t) = A\,\mathrm{sen}\,(2\pi t/T) \qquad v(t) = \frac{2\pi A}{T}\cos(2\pi t/T)$$

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\,\mathrm{d}t = v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi A}{T}\cos(2\pi t/T)\ \mathrm{d}t$$

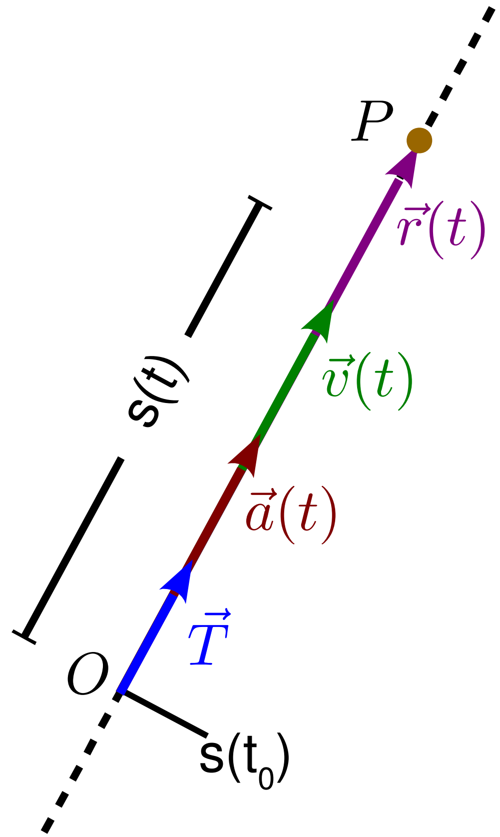
$$\mathrm{d}s = |\,\mathrm{d}x| = |v(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi A}{T}|\cos(2\pi t/T)|\,\mathrm{d}t$$

$$\Delta x = \int_0^{T/2} \mathrm{d}x = \int_0^{T/2} \frac{2\pi A}{T}\cos(2\pi t/T)\ \mathrm{d}t = A\,\mathrm{sen}\,(2\pi t/T)\Big|_0^{T/2} = 0$$

$$\Delta s = \int_0^{T/2} \mathrm{d}s = \int_0^{T/2} |\vec{v}|\,\mathrm{d}t = \int_0^{T/4} \frac{2\pi A}{T}\cos(2\pi t/T)\ \mathrm{d}t + \int_{T/4}^{T/2}\left(-\frac{2\pi A}{T}\cos(2\pi t/T)\right)\ \mathrm{d}t = 2A$$

Índice

- Movimiento rectilíneo uniforme (m.r.u.)
  - Aceleración $\vec{a}(t) = 0$
  - Velocidad $\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) = \vec{\text{cte}} = v_0\,\vec{T}$
  - Posición $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t) = s(t)\vec{T} = \big(s(t_0) + v_0 t\big)\,\vec{T}$



- Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.)
  - Aceleración $\vec{a}(t) = \vec{\text{cte}} = a_0\,\vec{T}$
  - Velocidad $\vec{v}(t) = (v(t_0) + a_0 t)\,\vec{T}$
  - Posición $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t) = \left(s(t_0) + v(t_0)t + \dfrac{1}{2}a_0 t^2\right)\,\vec{T}$