

Tema 4: Movimiento en 2D y 3D

FISICA I, 1º Grado en Civil

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

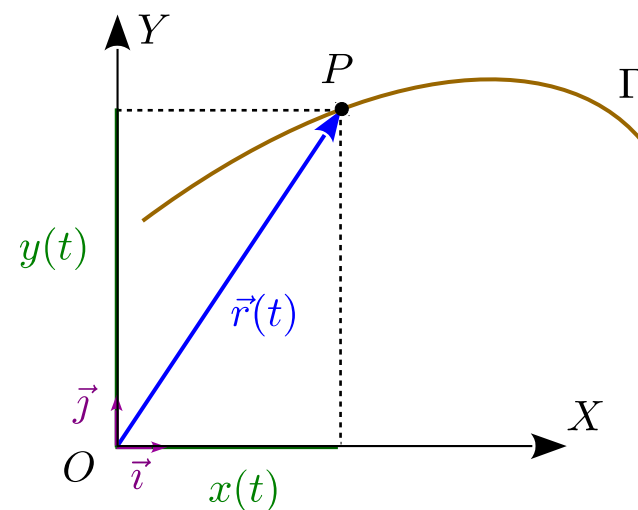
Universidad de Sevilla

- **Movimiento en 2D**
 - **Vector de posición**
 - **Vector velocidad**
 - **Vector aceleración**
 - **Componentes intrínsecas de la aceleración**
- **Movimiento en 3D**
- **Movimiento circular**
- **Geometría de curvas**

- El vector de posición sigue el movimiento de la partícula P

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j}$$

- Las componentes $x(t)$, $y(t)$ son función del tiempo
- El conjunto de puntos recorridos por el punto P es la **trayectoria: es una curva**



- Descripción matemática de una curva en 2D

$$\Gamma \equiv \vec{r}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j}$$

Vectorial

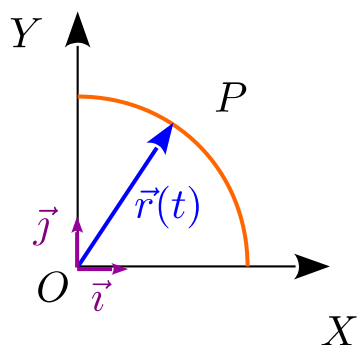
$$\Gamma \equiv \vec{r}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Paramétricas

$$\Gamma \equiv F(x, y) = 0$$

Implícita

Ejemplo



$$\Gamma \equiv \vec{r}(t) = R \cos(\omega t) \vec{i} + R \text{sen}(\omega t) \vec{j} \quad t \in [0, \pi/2\omega]$$

$$\Gamma \equiv \vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t) \\ y(t) = R \text{sen}(\omega t) \end{cases} \quad t \in [0, \pi/2\omega]$$

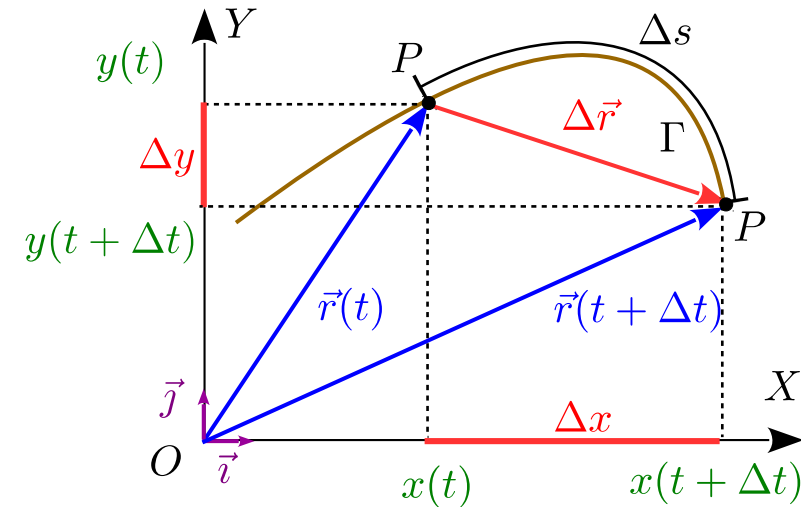
$$\Gamma \equiv F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$

- Movimiento en 2D
 - Vector de posición
 - Vector velocidad
 - Vector aceleración
 - Componentes intrínsecas de la aceleración
- Movimiento en 3D
- Movimiento circular
- Geometría de curvas

- Vector desplazamiento

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}$$

- Intervalo de muestreo grande
- El módulo del desplazamiento no es la distancia recorrida



- Velocidad media

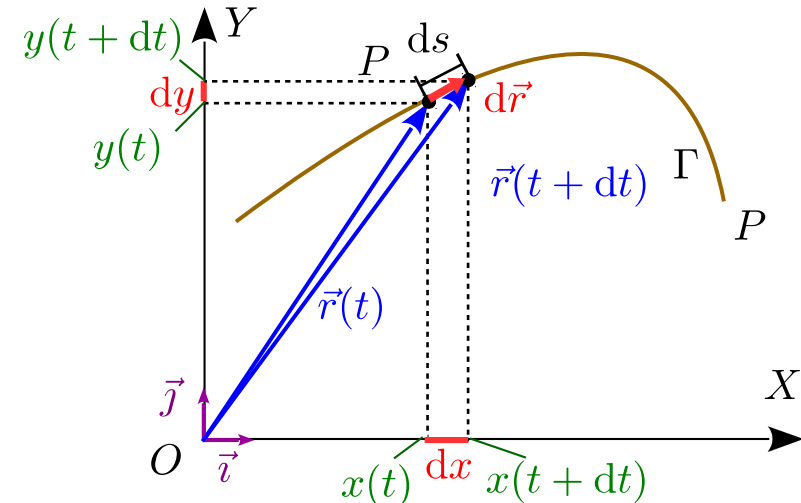
$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

- Descripción grosera del movimiento

- Velocidad instantánea

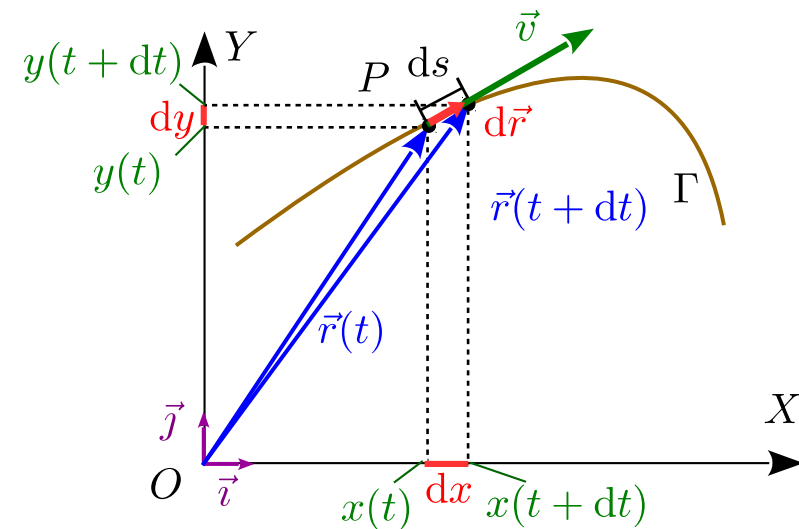
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

- Descripción precisa del movimiento
- El módulo se mide en m/s



$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j}$$

- En cada instante es **tangente** a la trayectoria
- Si conocemos $\mathbf{r}(t)$, derivamos respecto al tiempo para calcular la velocidad $\vec{r} \rightarrow \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}$



- Si conocemos $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{r}(t_0)$, podemos plantear 2 ecuaciones diferenciales para calcular $\mathbf{r}(t)$, una por componente

$$d\vec{r} = \vec{v}(t) dt \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x(t) & \rightarrow & x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(t) dt \\ \frac{dy}{dt} = v_y(t) & \rightarrow & y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t v_y(t) dt \end{cases}$$

- La **distancia** recorrida en un instante dt y en un intervalo Δt

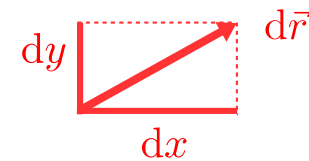
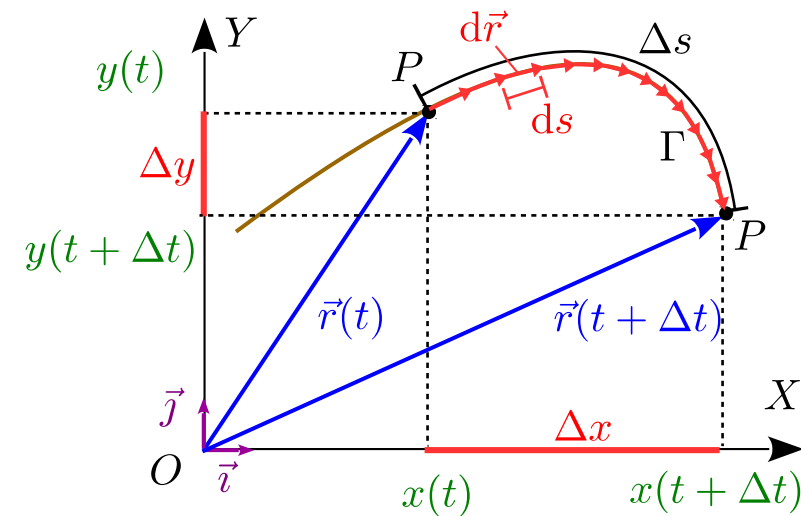
son

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = |d\vec{r}| = |\vec{v}(t)| dt$$

$$\Delta s = \int_{t_0}^t |d\vec{r}| = \int_{t_0}^t |\vec{v}(t)| dt$$

$$\Delta x = \int_{t_0}^t |dx| = \int_{t_0}^t |v_x| dt$$

$$\Delta y = \int_{t_0}^t |dy| = \int_{t_0}^t |v_y| dt$$



- El módulo de la velocidad es la **celeridad** o **rapidez**

$$|\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt}$$

- Movimiento en 2D
 - Vector de posición
 - Vector velocidad
 - Vector aceleración
 - Componentes intrínsecas de la aceleración
- Movimiento en 3D
- Movimiento circular
- Geometría de curvas

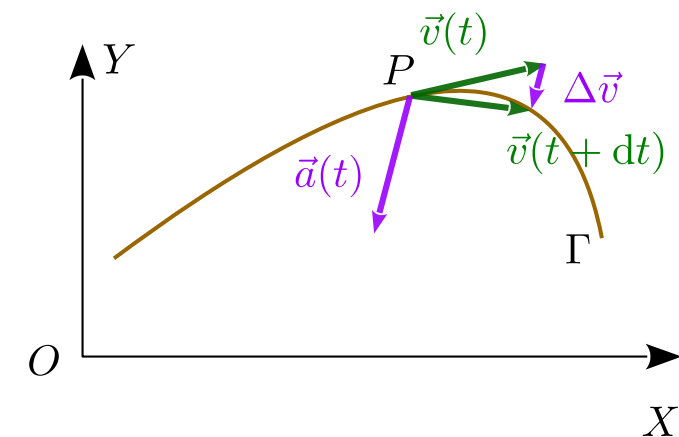
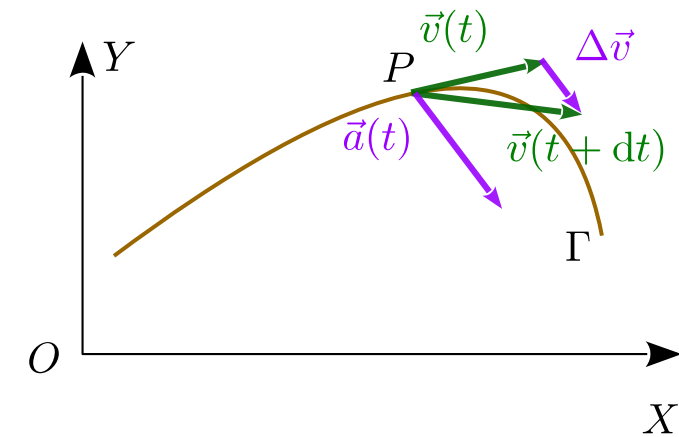
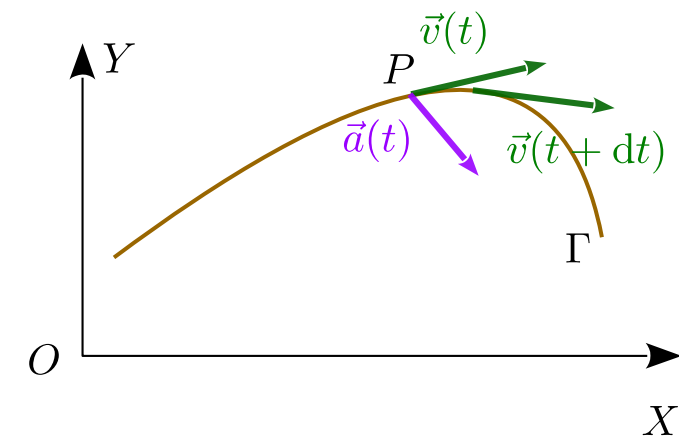
- Un vector puede cambiar porque lo haga su módulo o su dirección

- El cambio del módulo está relacionado con la celeridad
- El cambio en la dirección está relacionado con como se curva la trayectoria

- La aceleración es la tasa de **variación** de la velocidad

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}_x \vec{i} + \dot{v}_y \vec{j}$$

- Apunta siempre hacia la parte **cóncava** de la trayectoria
- El módulo se mide en m/s^2 (SI)



- Si conocemos $\mathbf{r}(t)$, derivamos respecto al tiempo para calcular la velocidad y la aceleración

$$\vec{r} \rightarrow \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} \rightarrow \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

- Si conocemos $\mathbf{a}(t)$ y $\mathbf{v}(t_0)$, podemos plantear 2 ecuaciones diferenciales para $\mathbf{v}(t)$, una por componente

$$d\vec{v} = \vec{a}(t) dt \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x(t) & \rightarrow & v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^t a_x(t) dt \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y(t) & \rightarrow & v_y(t) = v_y(t_0) + \int_{t_0}^t a_y(t) dt \end{cases}$$

- A partir de $\mathbf{v}(t)$ y conociendo $\mathbf{r}(t_0)$, podemos plantear 2 ecuaciones diferenciales para calcular $\mathbf{r}(t)$,

una por componente

$$d\vec{r} = \vec{v}(t) dt \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x(t) & \rightarrow & x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(t) dt \\ \frac{dy}{dt} = v_y(t) & \rightarrow & y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t v_y(t) dt \end{cases}$$

- Movimiento en 2D
 - Vector de posición
 - Vector velocidad
 - Vector aceleración
 - Componentes intrínsecas de la aceleración
- Movimiento en 3D
- Movimiento circular
- Geometría de curvas

- La aceleración tangencial es la proyección de la aceleración sobre la dirección de la velocidad

$$a_T = \vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

- La aceleración normal es la parte perpendicular de la proyección

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \left| \vec{a} \times \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right| = \left| \frac{\vec{a} \times \vec{v}}{|\vec{v}|} \right|$$

- Vectores **tangente** y **normal**

- El vector **tangente** es el vector unitario con la dirección de la velocidad

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$a_T = \vec{a} \cdot \vec{T}$$

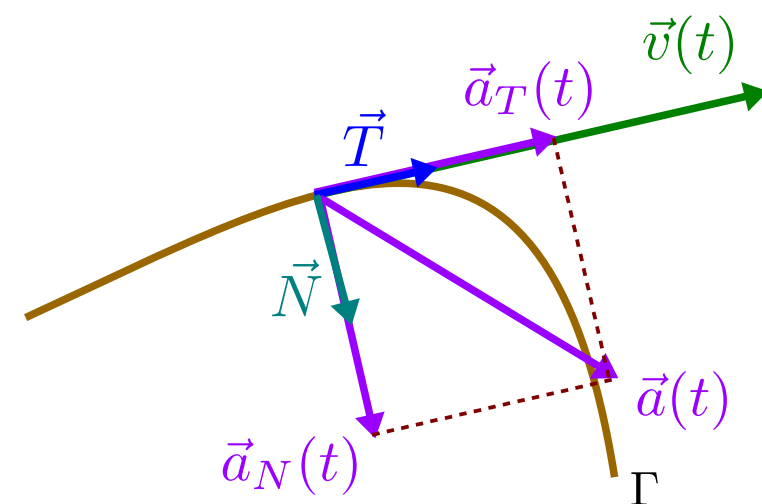
$$\vec{a}_T = a_T \vec{T}$$

- El vector **normal** es el perpendicular a **T** y contenido en el plano de **v** y **a**

$$\vec{N} = \frac{1}{|\vec{a}|} (\vec{a} - \vec{a}_T)$$

$$a_N = \vec{a} \cdot \vec{N} = |\vec{a} \times \vec{T}|$$

$$\vec{a}_N = a_N \vec{N}$$



$$\vec{a}(t) = \vec{a}_T(t) + \vec{a}_N(t)$$

- La aceleración tangencial da la tasa de cambio del módulo de la velocidad

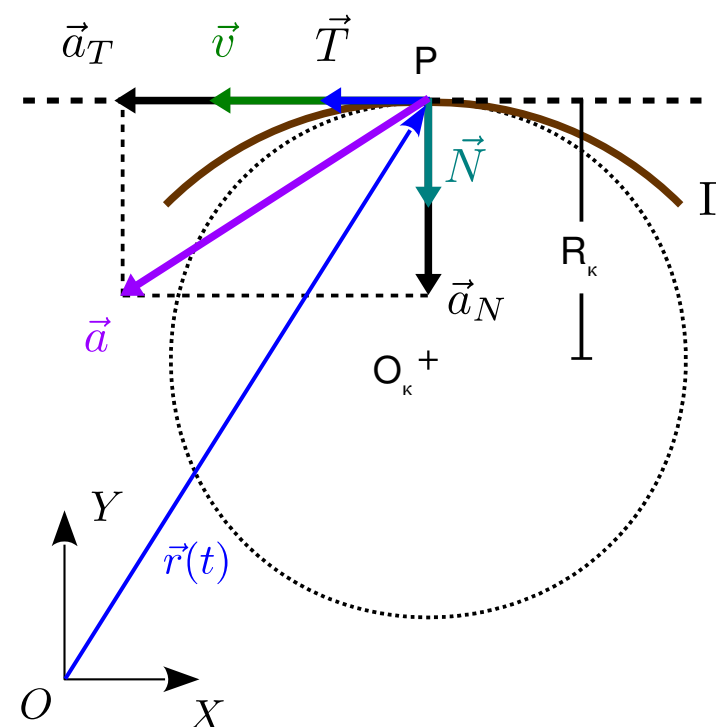
$$a_T = \vec{a} \cdot \vec{T} = \vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{|\vec{v}|} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) = \frac{1}{|\vec{v}|} \frac{d}{dt} \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}|} \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

- La aceleración normal indica como cambia la dirección de la velocidad, es decir, está relacionado con la curvatura de la trayectoria

- Radio de curvatura** $R_\kappa = \frac{v^2}{a_N}$

- Curvatura** $\kappa = \frac{1}{R_\kappa}$

- Centro de curvatura** $\vec{r}_{O_\kappa} = \vec{r} + R_\kappa \vec{N}$



- Movimiento en 2D
 - Vector de posición
 - Vector velocidad
 - Vector aceleración
 - Componentes intrínsecas de la aceleración
- Movimiento en 3D
- Movimiento circular
- Geometría de curvas

- Vector de posición

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}$$

- Vector velocidad

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= v_x(t) \vec{i} + v_y(t) \vec{j} + v_z(t) \vec{k} \\ &= \dot{\vec{r}} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k} \end{aligned}$$

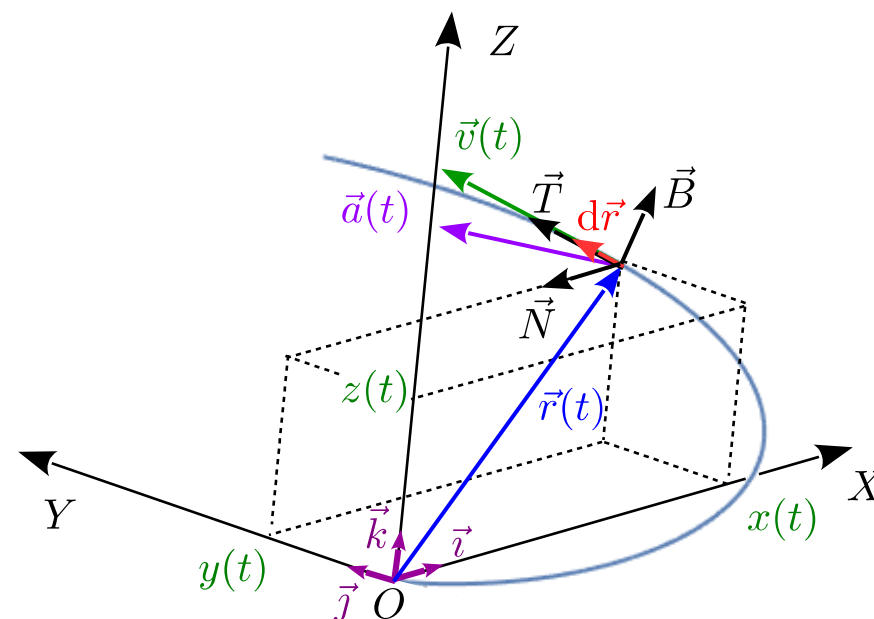
- Vector aceleración

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= a_x(t) \vec{i} + a_y(t) \vec{j} + a_z(t) \vec{k} \\ &= \dot{\vec{v}} = \dot{v}_x \vec{i} + \dot{v}_y \vec{j} + \dot{v}_z \vec{k} \\ &= \ddot{\vec{r}} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k} \end{aligned}$$

- Desplazamiento diferencial

$$d\vec{r} = \vec{v}(t) dt$$

$$ds = |d\vec{r}| = |\vec{v}(t)| dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$



- Movimiento en 2D
 - Vector de posición
 - Vector velocidad
 - Vector aceleración
 - Componentes intrínsecas de la aceleración
- Movimiento en 3D
- **Movimiento circular**
- Geometría de curvas

- La trayectoria es una circunferencia

$$R_{\kappa} = R(\text{cte}) \quad \kappa = \frac{1}{R}(\text{cte})$$

- Velocidad angular $\dot{\theta} = \omega$

- Aceleración angular $\ddot{\theta} = \dot{\omega} = \alpha$

- Posición

$$\vec{r} = R \cos \theta \vec{i} + R \sin \theta \vec{j}$$

- Velocidad

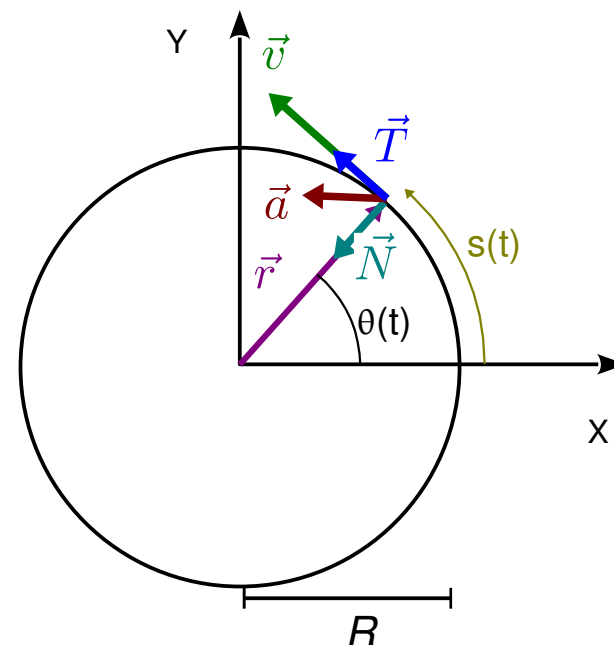
$$\vec{v}(t) = R\dot{\theta} (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})$$

- Aceleración

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}} = R\ddot{\theta} \begin{matrix} \vec{T} \\ (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \end{matrix} + R\dot{\theta}^2 \begin{matrix} \vec{N} \\ (-\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) \end{matrix}$$

- Relación entre magnitudes lineales y circulares

$$s = R\theta \quad \left| \quad v = R\dot{\theta} \quad \left| \quad a_T = \vec{a} \cdot \vec{T} = R\ddot{\theta} \quad \left| \quad a_N = \vec{a} \cdot \vec{N} = R\dot{\theta}^2 \right. \right. \\ = R\omega \quad \quad \quad = R\alpha \quad \quad \quad = R\omega^2$$



$$\begin{aligned} \vec{T} &= [-\sin \theta, \cos \theta, 0] \\ \vec{N} &= [-\cos \theta, -\sin \theta, 0] \\ \vec{B} &= [0, 0, 1] \end{aligned}$$

- La aceleración angular es cero

$$\alpha = \dot{\omega} = 0$$

- Velocidad angular $\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$

- Ángulo barrido $\theta = \theta(t_0) + \omega t$

- Variables cinemáticas

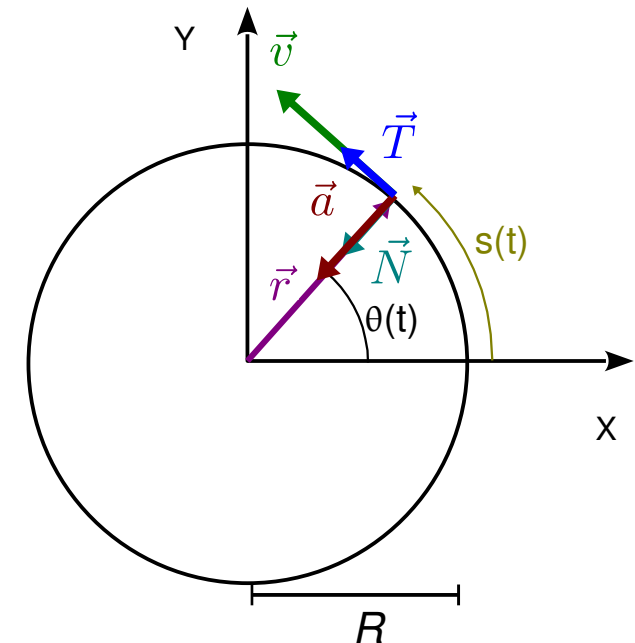
$$s(t) = R\theta(t) = R(\theta(t_0) + \omega t)$$

$$v = R\omega = \text{cte}$$

$$|\vec{a}| = a_N = R\omega^2 = \text{cte}$$

- El movimiento es periódico

$$\left. \begin{aligned} \theta(T) &= \theta(t_0) + 2\pi \\ \theta(T) &= \theta(t_0) + \omega T \end{aligned} \right| \implies T = \frac{2\pi}{\omega}$$



La velocidad no es constante

La celeridad sí es constante

- La aceleración angular es constante $\alpha = \dot{\omega} = \alpha_0$

- Velocidad angular $\dot{\theta} = \omega = \dot{\theta}(t_0) + \alpha_0 t$

- Ángulo barrido $\theta = \theta(t_0) + \dot{\theta}(t_0) t + \frac{1}{2} \alpha_0 t^2$

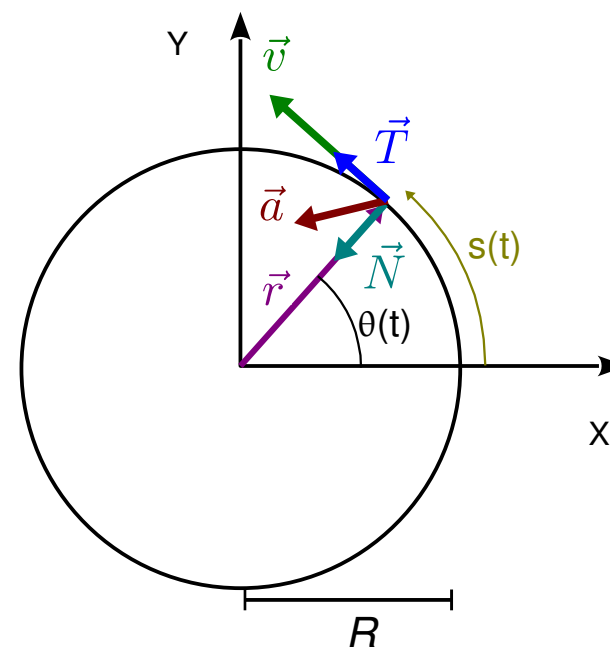
- Variables cinemáticas

$$s(t) = R\theta(t) = R(\theta(t_0) + \omega t)$$

$$v(t) = R\omega = v(t_0) + R\alpha_0 t$$

$$a_N = R\omega^2 = R(\dot{\theta}(t_0) + \alpha_0 t)^2$$

$$a_T = R\alpha_0$$



- El movimiento no es periódico

- Se define el vector velocidad angular $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{n}$
 - Rapidez de giro: $\dot{\theta}$
 - Recta soporte: eje de giro, perpendicular a la circ.
 - Sentido: regla del tornillo

- Se define el vector aceleración angular $\vec{\alpha}$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

- Velocidad y aceleración

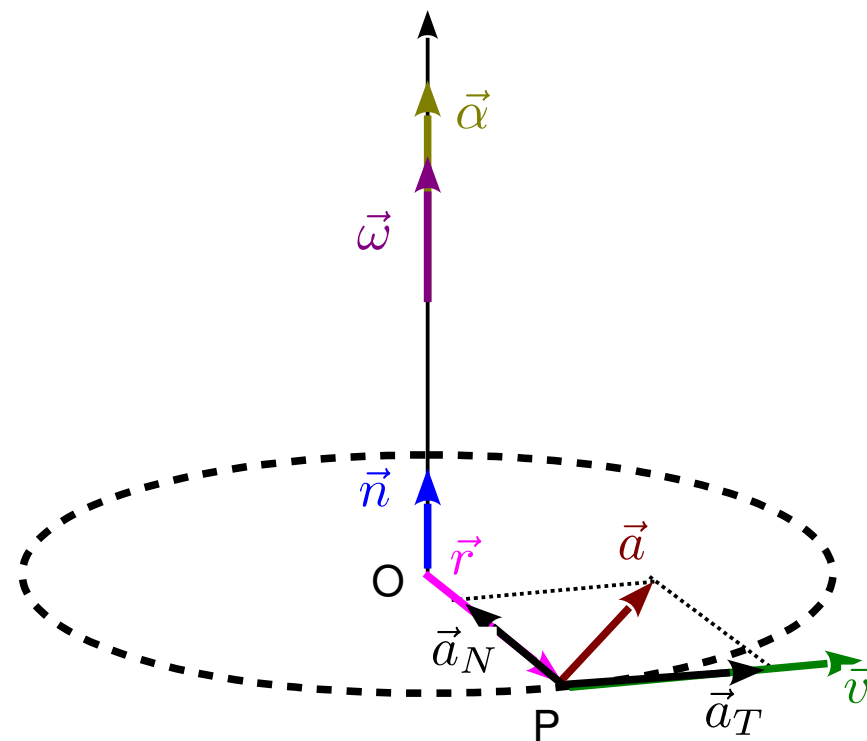
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

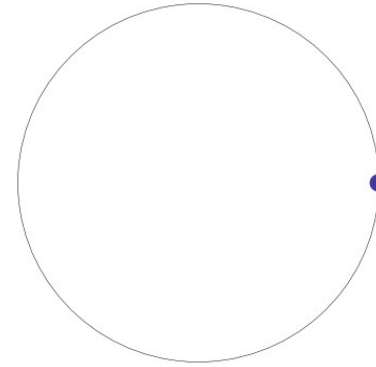
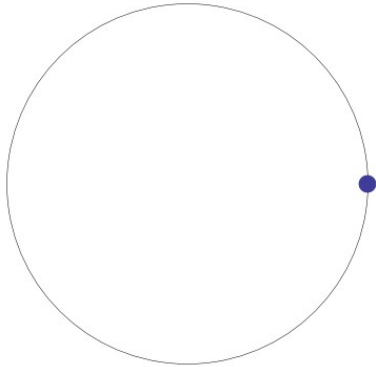
$$\vec{a}_N = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

- Los vectores $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ son vectores deslizantes



- Movimiento en 2D
 - Vector de posición
 - Vector velocidad
 - Vector aceleración
 - Componentes intrínsecas de la aceleración
- Movimiento en 3D
- Movimiento circular
- Geometría de curvas

- Una misma trayectoria puede ser recorrida con diferentes velocidades



- La geometría de la trayectoria es independiente de como se recorra
 - Una curva se puede parametrizar de muchas maneras
 - El triedro intrínseco en cada punto es independiente del parámetro que se utilice

- Descripción matemática de una curva en 3D

- Vectorial** $\Gamma \equiv \vec{r}(\lambda) = x(\lambda) \vec{i} + y(\lambda) \vec{j} + z(\lambda) \vec{k} \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$

- Paramétricas** $\Gamma \equiv \vec{r}(\lambda) = \begin{cases} x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda) \\ z = z(\lambda) \end{cases} \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$

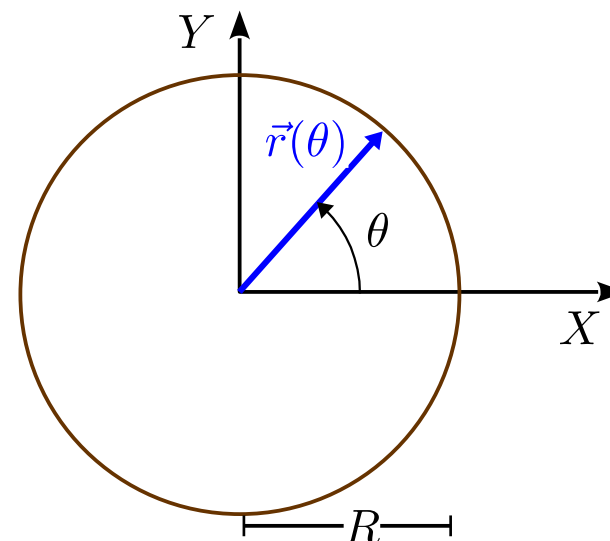
- Implícitas** $\Gamma \equiv \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad x \in [x_1, x_2] \quad y \in [y_1, y_2] \quad z \in [z_1, z_2]$

- Ejemplo: circunferencia de radio R, centro en el eje OZ y en el plano z=0

$$\Gamma \equiv \vec{r}(t) = R \cos \theta \vec{i} + R \operatorname{sen} \theta \vec{j} \quad \lambda \in [0, 2\pi)$$

$$\Gamma \equiv \vec{r}(t) = \begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \operatorname{sen} \theta \\ z = 0 \end{cases} \quad \lambda \in [0, 2\pi)$$

$$\Gamma \equiv \begin{cases} F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2 = 0 \\ F_2(x, y, z) = z = 0 \end{cases} \quad x, y \in [-R, R]$$



- Se calcula derivando respecto al parámetro $d\vec{r} = \left(\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right) d\lambda$

- Aplicación: longitud de una circunferencia

$$\vec{r}(\theta) = R \cos \theta \vec{i} + R \sin \theta \vec{j} \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

$$d\vec{r}(\theta) = \left(\frac{d\vec{r}}{d\theta} \right) d\theta = R d\theta (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})$$

- La longitud es la suma de los módulos de todos los dr

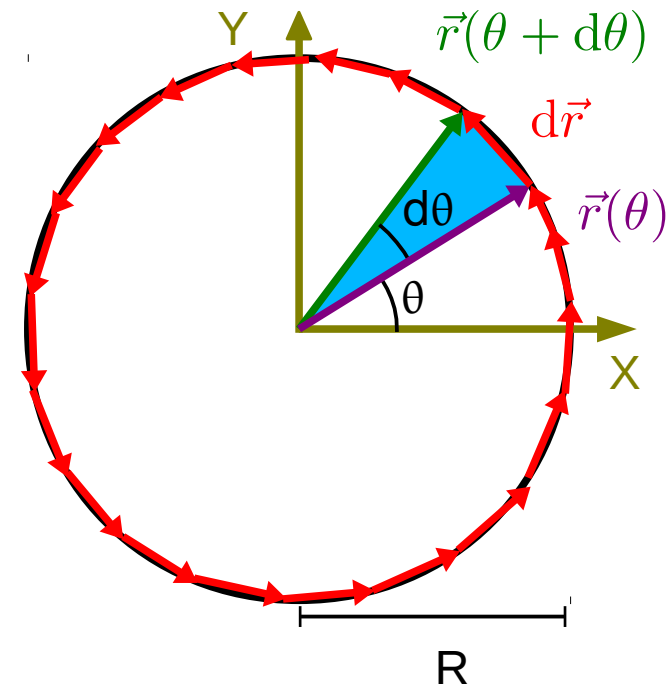
$$L = \int |\mathrm{d}\vec{r}|(\theta) = \int_0^{2\pi} R d\theta = R \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi R$$

- Aplicación: área de un círculo

$$dA(\theta) = \frac{1}{2} |\vec{r}(\theta) \times d\vec{r}(\theta)| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R \cos \theta & R \sin \theta & 0 \\ -R \sin \theta d\theta & R \cos \theta d\theta & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} R^2 d\theta$$

- El área del círculo es la suma de las áreas de todos los triángulos

$$A = \int dA = \int \frac{1}{2} |\vec{r}(\theta) \times d\vec{r}(\theta)| = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R^2 d\theta = \pi R^2$$



- Curva parametrizada en función de un parámetro λ

$$\vec{r} = \vec{r}(\lambda)$$

- Vector unitario tangente a la curva en cada punto

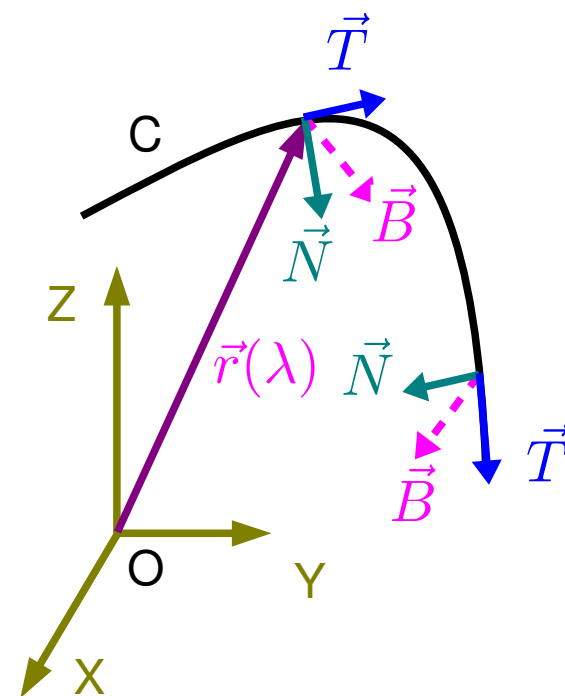
$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}/d\lambda}{|d\vec{r}/d\lambda|} \quad \text{Vector tangente}$$

- El vector normal indica la variación de la dirección de \vec{T}

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}/d\lambda}{|d\vec{T}/d\lambda|} \quad \text{Vector normal}$$

- Completamos el triedro

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} \quad \text{Vector binormal}$$



El triedro es intrínseco a la curva. No depende de cómo se recorra ni del sistema de ejes y coordenadas que se utilice

- Parametrización con el ángulo

$$\vec{r} = \vec{r}(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = R \cos \theta \\ y(\theta) = R \operatorname{sen} \theta \\ z(\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

- Triedro intrínseco

- Vector tangente

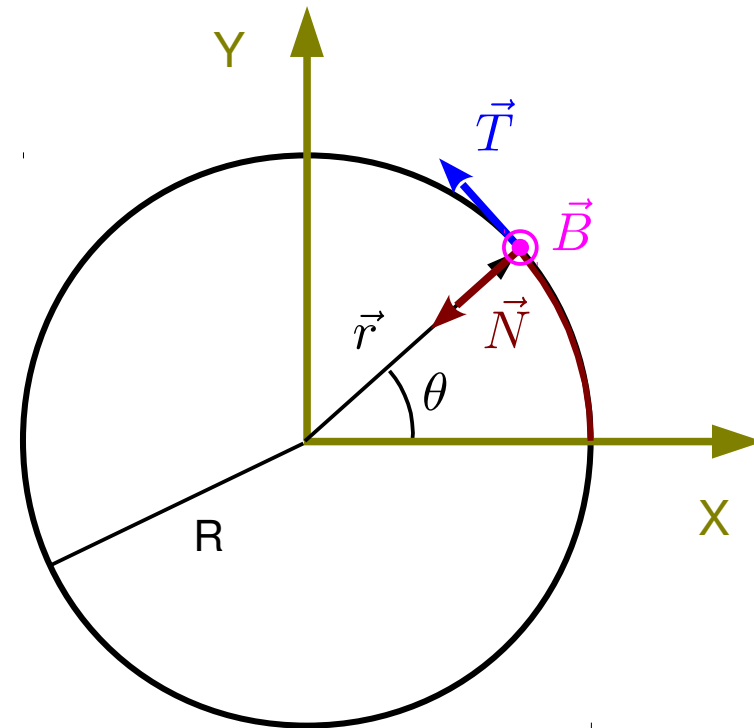
$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}/d\theta}{|d\vec{r}/d\theta|} = [-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta, 0]$$

- Vector normal

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}/d\theta}{|d\vec{T}/d\theta|} = [-\cos \theta, -\operatorname{sen} \theta, 0]$$

- Vector binormal

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$



Indica la dirección en la que gira el vector tangente

- Parametrización con el tiempo

$$\theta = kt^2$$

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = R \cos(kt^2) \\ y(t) = R \sin(kt^2) \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad t \in [0, \sqrt{2\pi/k}]$$

- Triedro intrínseco

- Vector tangente

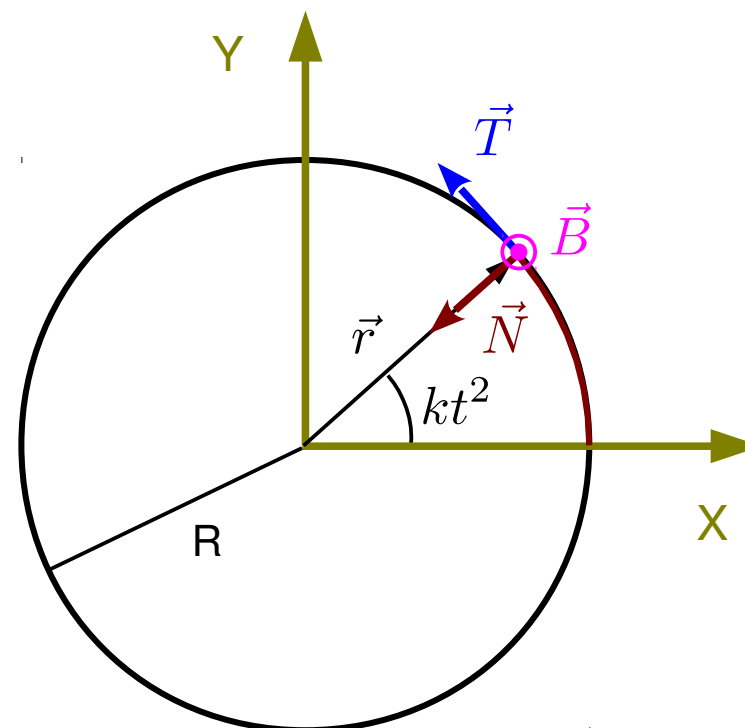
$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|} = [-\sin(kt^2), \cos(kt^2), 0]$$

- Vector normal

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}/dt}{|d\vec{T}/dt|} = [-\cos(kt^2), -\sin(kt^2), 0]$$

- Vector binormal

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$

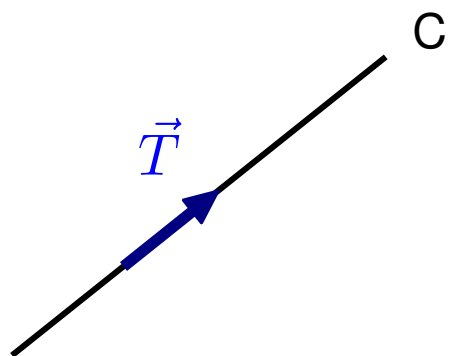


En cada punto de la curva los vectores del tridero son los mismos independientemente del parámetro que se utilice

Vector velocidad

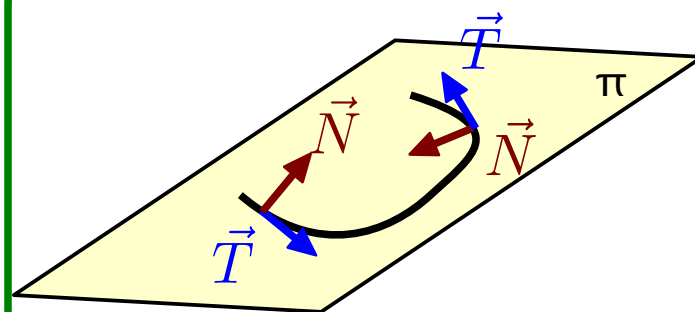
$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{d\theta} \right) \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = \dot{\theta} \left(\frac{d\vec{r}}{d\theta} \right)$$

Línea recta



Vector tangente uniforme

Línea plana

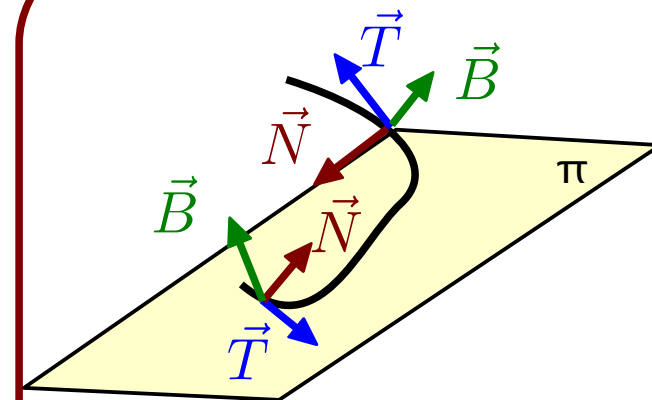


Contenida en un plano

Vector tangente variable

Vector normal \vec{N} apunta en la dirección en que se tuerce la curva

Curva alabeada



No contenida en un plano

Vector binormal $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$

- El **parámetro arco** es la distancia recorrida sobre la curva

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = \begin{cases} x(s) = R \cos(s/R) \\ y(s) = R \sin(s/R) \\ z(s) = 0 \end{cases}$$

$$s \in [0, 2\pi R)$$

$$s = s(\theta) = R\theta$$

- La **curvatura** en cada punto es el módulo de la derivada del vector tangente cuando está expresado en el parámetro arco

$$\kappa(s) = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|$$

- Si se usa otro parámetro hay que utilizar la regla de la cadena

$$\lambda = \lambda(s) \implies \kappa = \left| \frac{d\vec{T}}{d\lambda} \right| \left| \frac{d\lambda}{ds} \right|$$

