Tema 2: Cinemática de la partícula

Antonio González Fernández
Departamento de Física Aplicada III
Universidad de Sevilla

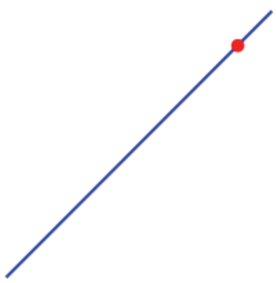
Parte 1/4
Cinemática del movimiento rectilíneo

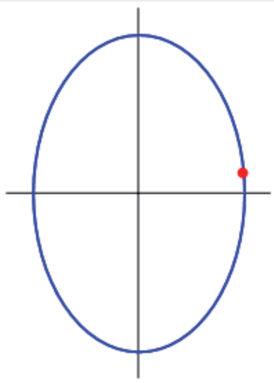
¿De que va la cinemática en 1D?

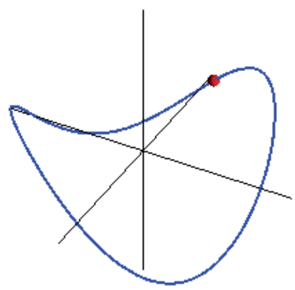
Partícula material: cuerpo con masa pero de tamaño nulo

Se aplica cuando los desplazamientos son mucho mayores que el tamaño de la partícula

Movimiento rectilíneo (1D)	Movimiento plano (2D)	Caso general (3D)



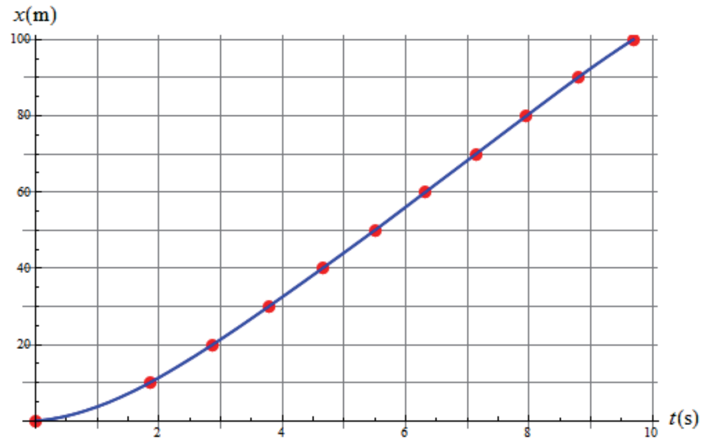




La posición de la partícula se puede tabular y representar frente al tiempo

$t(\mathrm{s})$	$x(\mathrm{m})$
0.00	0
1.85	10
2.87	20
3.78	30
4.65	40
5.50	50
6.32	60
7.14	70
7.96	80
8.79	90
9.69	100

(Bolt, 2008)



Dado que Usain Bolt no se desmaterializa, podemos admitir una función continua $x(t)$

En un movimiento rectilíneo puede haber avances y retrocesos

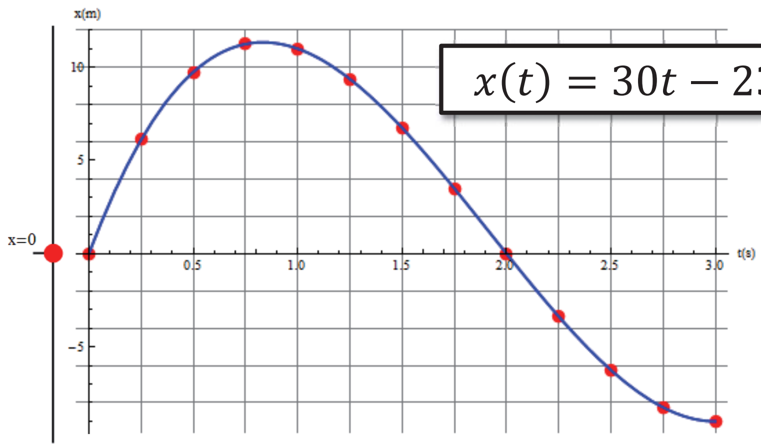
$t(\mathrm{s})$	$x(\mathrm{m})$
0.00	0.000
0.25	6.125
0.50	9.750
0.75	11.250
1.00	11.000
1.25	9.375
1.50	6.750
1.75	3.500
2.00	0.000
2.25	-3.375
2.50	-6.250
2.75	-8.250
3.00	-9.000

$x(t)$ puede ser cualquier función continua

$x = 0$ es un punto de referencia

$x > 0$ o $x < 0$ según esté a un lado u otro

La recta no tiene por qué ser horizontal

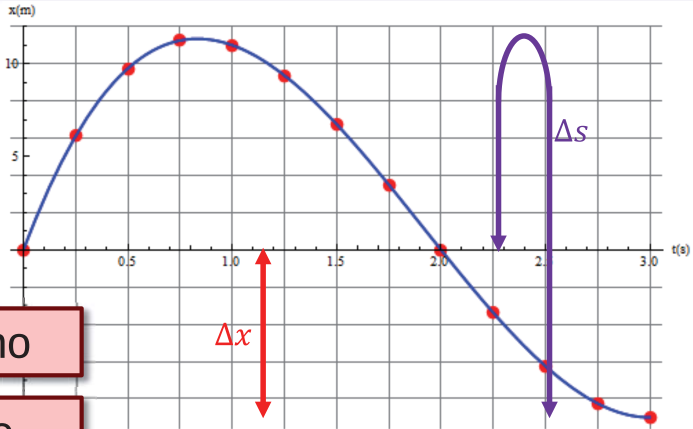


$$x(t) = 30t - 23t^2 + 4t^3$$

Desplazamiento y distancia recorrida no son la misma cosa

El desplazamiento Δx es la diferencia entre la posición final y la inicial

$$\Delta x = x_2 - x_1$$



Puede tener cualquier signo

No depende de lo que pase en medio (función de estado)

$$\Delta x = -9\text{m} - (0\text{m}) = -9\text{m}$$

La distancia recorrida Δs es la suma de todos los desplazamientos en valor absoluto

Es siempre positiva

$$\Delta s = 31.69\text{m}$$

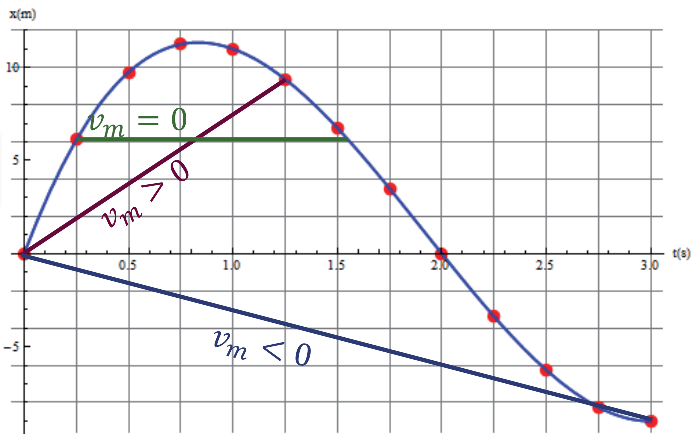
Depende de lo que pase en medio (función del camino)

Velocidad media: desplazamiento dividido por el intervalo

La velocidad media se define como:

$$\frac{\text{Desplazamiento realizado}}{\text{Intervalo de tiempo empleado}}$$

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



En el SI se mide en m/s

Puede ser >0, <0 o =0

Se anula si no hay desplazamiento neto

Es la pendiente de la secante en la gráfica de $x(t)$

La velocidad instantánea es el límite de la velocidad media

¿Qué significa ir a 120km/h?

$$\frac{120\mathrm{km}}{1\mathrm{h}} = \frac{2\mathrm{km}}{1\mathrm{min}} = \frac{33.3\mathrm{m}}{1\mathrm{s}} = \frac{3.33\mathrm{m}}{0.1\mathrm{s}} \cdots$$

Se van eligiendo intervalos cada vez más pequeño $\Delta t \to 0$

Diferencial de tiempo, $\mathrm{d}t$: intervalo muy, muy breve ($\Delta t \to 0$)

Diferencial de posición, $\mathrm{d}x$: desplazamiento minúsculo ($\Delta x \to 0$)

t_1	t_2	Δt	x_1	x_2	Δx	$\Delta x/\Delta t$
1.000	2.000	1.000	11.00	0.000	-11.00	-11.00
1.000	1.100	0.100	11.00	10.494	-0.506	-5.06
1.000	1.010	0.010	11.00	10.9589	-0.0411	-4.110
1.000	1.001	0.001	11.00	10.9960	-0.0040	-4.011
…	…	…	…	…	…	…
1.000	**1.000**	**0.000**	**11.00**	**11.00**	**0.000**	**-4.000**

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

La velocidad instantánea es la derivada de la posición respecto al tiempo

$$v = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x_2 - x_1}{\mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Notación de Leibniz de la derivada

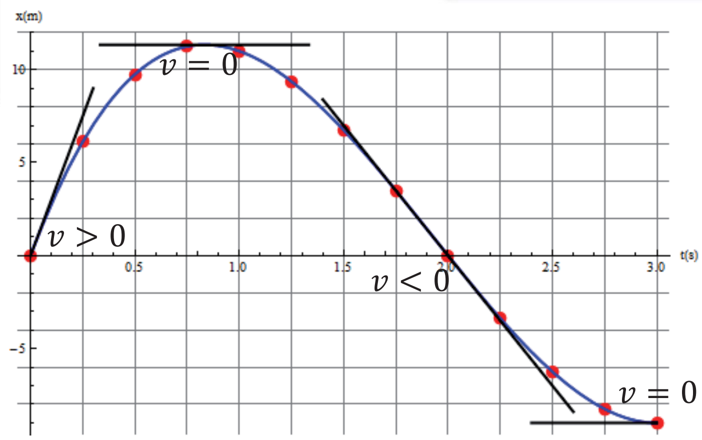
Una derivada no es más que una división

$v = \dot{x}$

El punto solo se usa para derivadas respecto al tiempo

La velocidad puede ser positiva, negativa o nula

$v = 0$: reposo
- Instantáneo
- Permanente



Gráficamente es la pendiente de la tangente a la curva $x(t)$

La velocidad también es una función del tiempo

Hallando la velocidad en cada instante obtenemos la función $v = v(t)$

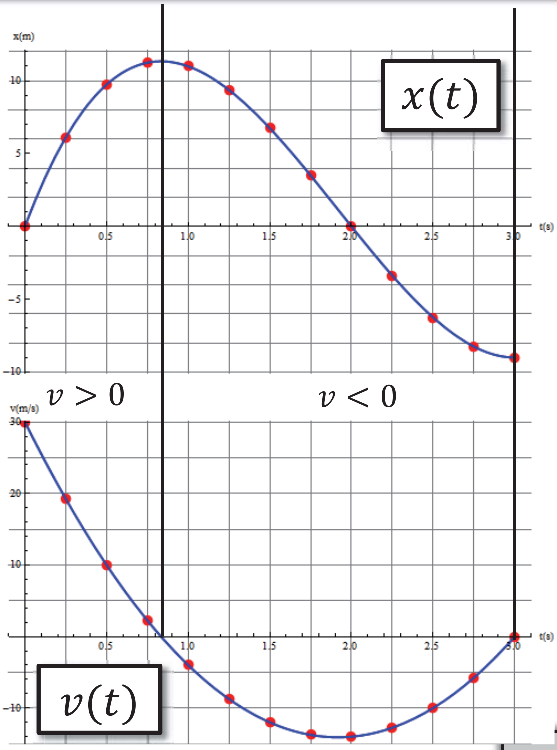
(SI) $x(t) = 30t - 23t^2 + 4t^3$

$v(t) = 30 - 46t + 12t^2$

$v > 0$: $x \uparrow$

$v < 0$: $x \downarrow$

Los instantes en que $v = 0$ corresponden a extremos de $x(t)$



A partir de la posición obtenemos la velocidad… y viceversa

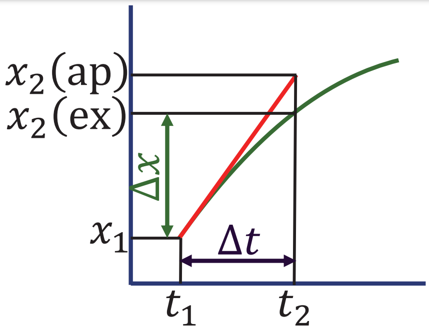
Conocida la velocidad en un instante puede hallarse un desplazamiento pequeño

$dx = v\,dt$

$\Delta x \simeq v \Delta t$

Solo si $\Delta t \ll$

$x_2 \simeq x_1 + v(t_2 - t_1)$



El desplazamiento total es la suma de los pequeños desplazamientos

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 \cdots$$

$$= v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta t_i$$

Tomando el límite

$$\Delta x = \int_{t_i}^{t_f} v\,dt$$

Una integral no es más que una suma

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,dt$$

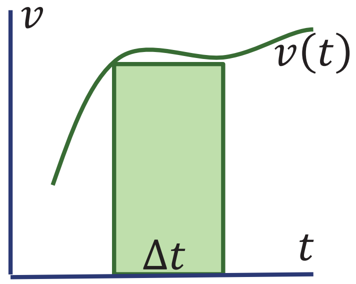
Una integral equivale a una suma de áreas (con signo)

El desplazamiento elemental equivale al área de un rectángulo

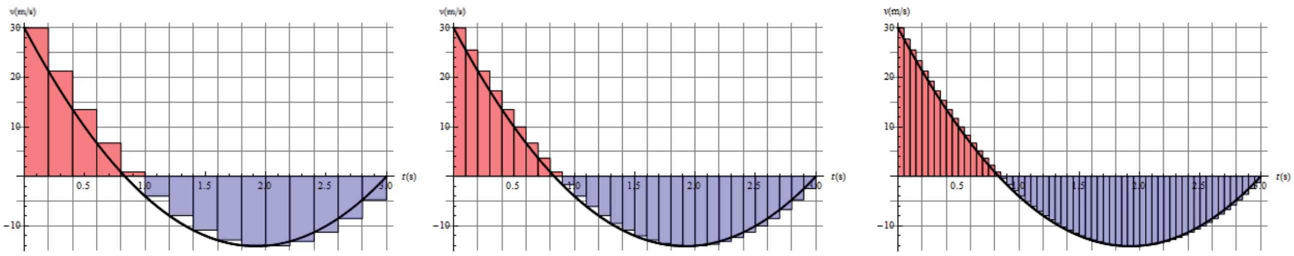
Base

$\Delta x \simeq v\,\Delta t$

Altura



El desplazamiento total es la suma



Cuando $\Delta t \to 0$ se aproxima al área bajo la curva

Si $v < 0$, la partícula retrocede: el área se resta

Rapidez y distancia recorrida: tomando valores absolutos

En el habla cotidiana la "velocidad" no tiene signo

$|v|$: rapidez (o celeridad)

A partir de la rapidez se halla la distancia recorrida

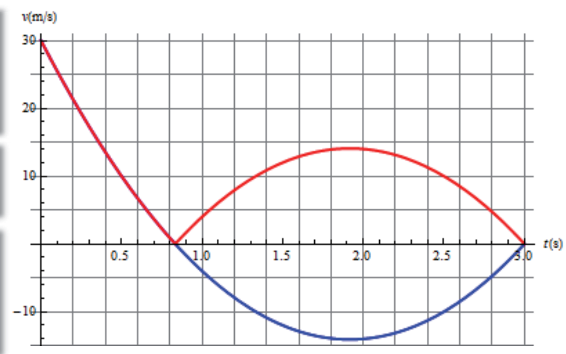
$\mathrm{d}s = |v|\mathrm{d}t$

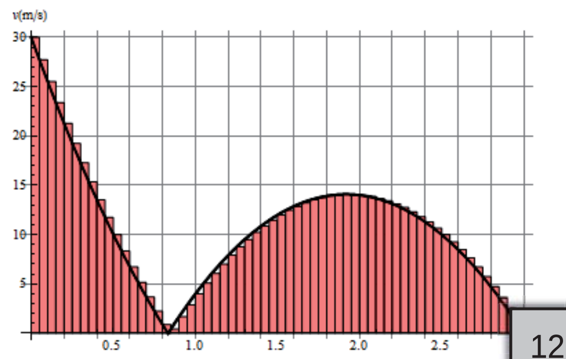
$|v| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}$

$\Delta s = \int_{t_i}^{t_f} |v|\ \mathrm{d}t$

Todo suma

$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t} |v|\ \mathrm{d}t$





A partir de la velocidad instantánea se puede hallar la velocidad media

Una partícula se mueve con $v = v_0 T/t$ ¿Cuál es la velocidad media entre $t = T$ y $t = 3T$?

A $0.667 v_0$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{v_0 T}{T} + \frac{v_0 T}{3T}\right) = \frac{2}{3} v_0 = 0.667 v_0$$

B $0.500 v_0$

$$\frac{v_0 T}{2T} = 0.500 v_0$$

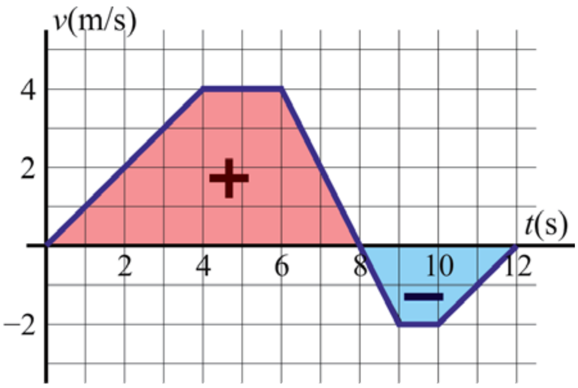
C $0.549 v_0$

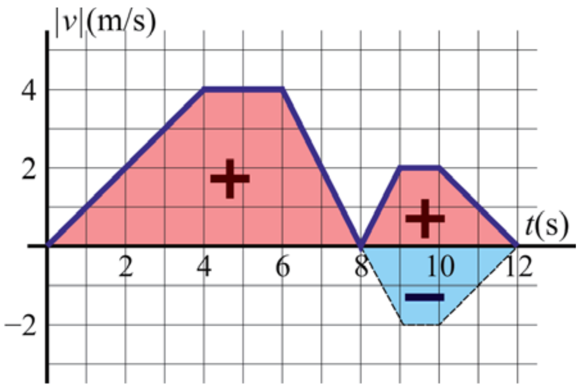
$$\frac{1}{2T}\int_T^{3T} \frac{v_0 T}{t} dt = \frac{A}{2} \ln\left(\frac{3T}{T}\right) = 0.549 v_0$$

D No hay información suficiente para hallarla

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} v \, \mathrm{d}t$$

Ejemplo de comparación entre desplazamientos y distancias recorridas





$$\Delta x = 20\text{m} - 5\text{m} = 15\text{m}$$

$$\Delta s = 20\text{m} + 5\text{m} = 25\text{m}$$

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{15\text{m}}{12\text{s}} = 1.25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$|v|_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{25\text{m}}{12\text{s}} = 2.08 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo de comparación analítica

Sea $v(t) = 3t^2 - 66t + 216$ (t en s, v en m/s). $x(0) = 0$

¿Δx en $0\text{s} < t < 24\text{s}$?

¿Δs en $0\text{s} < t < 24\text{s}$?

$$\Delta x = \int_0^{24} (3t^2 - 66t + 216)\text{d}t = 0\text{m}$$

$$v_m = \frac{0\text{m}}{24\text{s}} = 0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

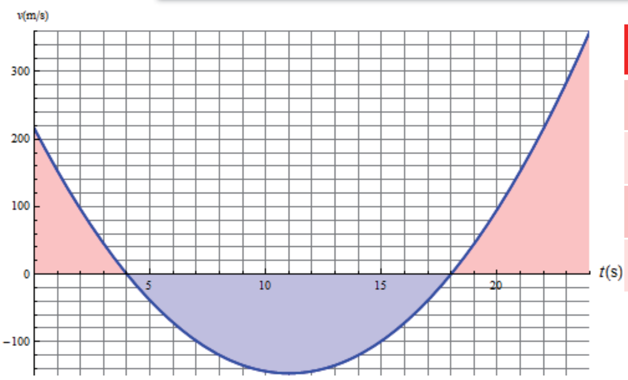
$v(t) = 0$ en $t = 4\text{s}$ y $t = 18\text{s}$

$$v(t)\begin{cases} > 0 & 0\,\text{s} \leq t < 4\,\text{s} \\ < 0 & 4\,\text{s} < t < 18\text{s} \\ > 0 & 18\,\text{s} < t \leq 24\,\text{s} \end{cases}$$

$$\Delta s = \int_0^4 v\,\text{d}t - \int_4^{18} v\,\text{d}t + \int_{18}^{24} v\,\text{d}t$$
$$= 2744\text{m}$$

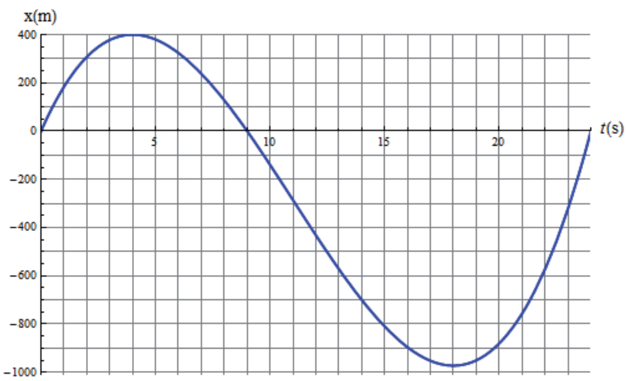
$$|v|_m = \frac{2744\text{m}}{24\text{s}} = 114.3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

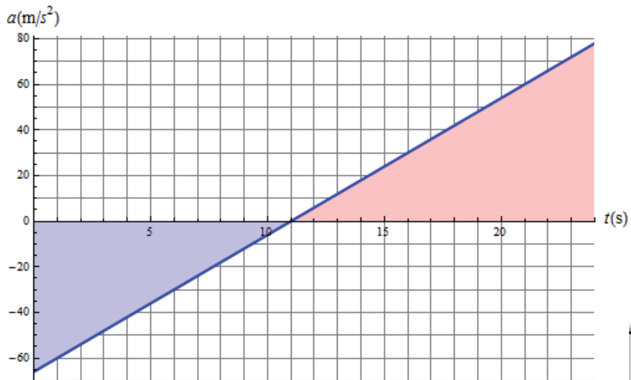
Gráficas del ejemplo analítico



$t(\mathbf{s})$	$x(\mathbf{m})$
0	0
4	400
19	-972
24	0

$$\Delta s = 400\text{m} + (972 + 400)\text{m} + 972\text{m}$$



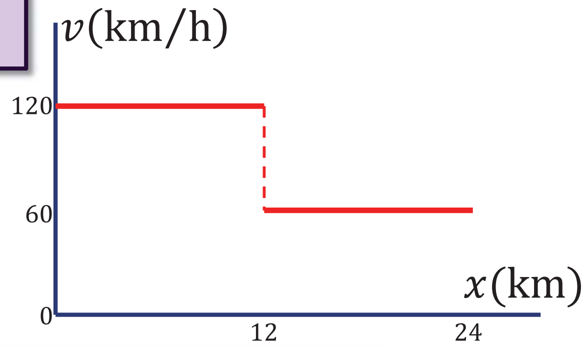


¿Qué ocurre si lo que conocemos es la velocidad como función de la posición?

Un coche recorre 12km a 120km/h y otros 12km a 60km/h, ¿cuál es su velocidad media?

¿90km/h?

NO



$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 24\text{km}$$

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{\Delta x_1}{v_1} + \frac{\Delta x_2}{v_2}$$
$$= \frac{12\text{km}}{120\,\text{km/h}} + \frac{12\text{km}}{60\,\text{km}/h}$$
$$= (0.1 + 0.2)\text{h} = 0.3\text{h}$$

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{24\text{km}}{0.3\text{h}} = 80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

En general

$$\text{d}x = v(x)\text{d}t$$

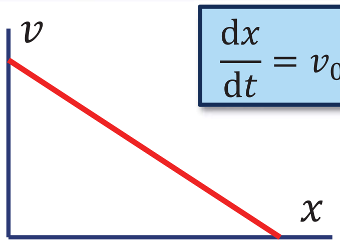
$$\text{d}t = \frac{\text{d}x}{v(x)}$$

$$t(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\text{d}x}{v(x)}$$

$$x = x(t)$$

Un ejemplo no trivial de velocidad dependiente de la posición

Una partícula se mueve de forma que $v = v_0 - kx$ y $x(0) = 0$. ¿Llega a pararse? ¿Qué distancia recorre hasta que se para?



$$\frac{\text{d}x}{\text{d}t} = v_0 - kx$$

$$\frac{\text{d}x}{v_0 - kx} = \text{d}t$$

$$\int_0^x \frac{\text{d}x}{v_0 - kx} = \int_0^t \text{d}t$$

$$-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{v_0 - kx}{v_0}\right) = t$$

$$x = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

Forma alternativa

Se para cuando $x = v_0/k$

$$x = \frac{v_0}{k} + y$$

$$\frac{\text{d}y}{\text{d}t} = -ky$$

$$y = Ae^{-kt}$$

$$x = \frac{v_0}{k} + Ae^{-kt}$$

$$x(0) = 0 = \frac{v_0}{k} + A$$

$$x = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

La aceleración instantánea es la velocidad con que varía la velocidad

A partir de la velocidad instantánea se define la aceleración

$$a = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Es la segunda derivada de la posición

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

Notación de Leibniz de la 2ª derivada

$$a = \dot{v} = \ddot{x}$$

Doble punto: segunda derivada

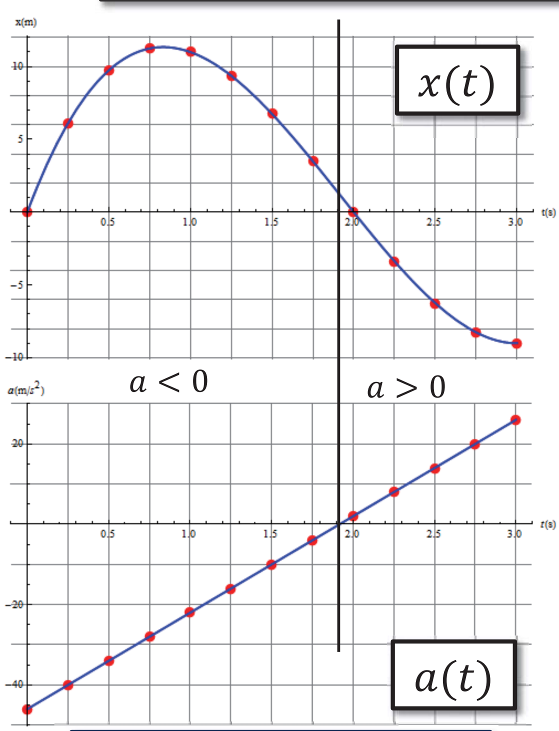
Ej. (SI)

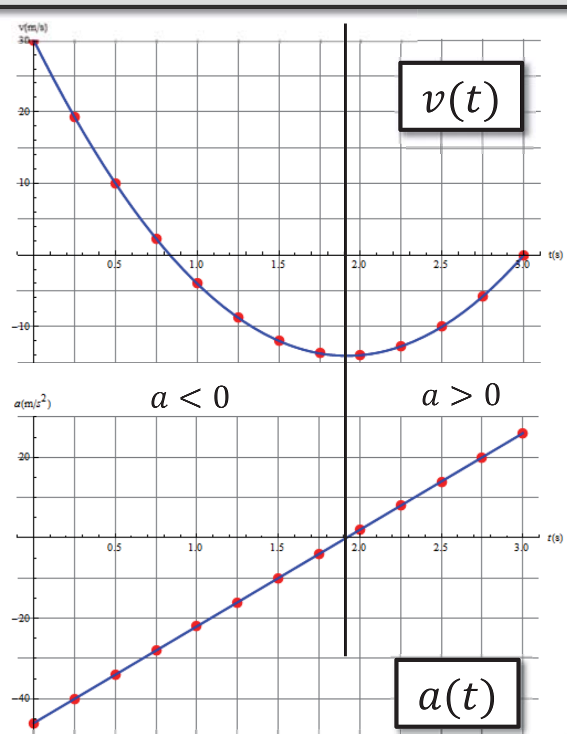
$$x(t) = 30t - 23t^2 + 4t^3$$

$$v(t) = 30 - 46t + 12t^2$$

$$a(t) = -46 + 24t$$

Interpretación geométrica de la aceleración

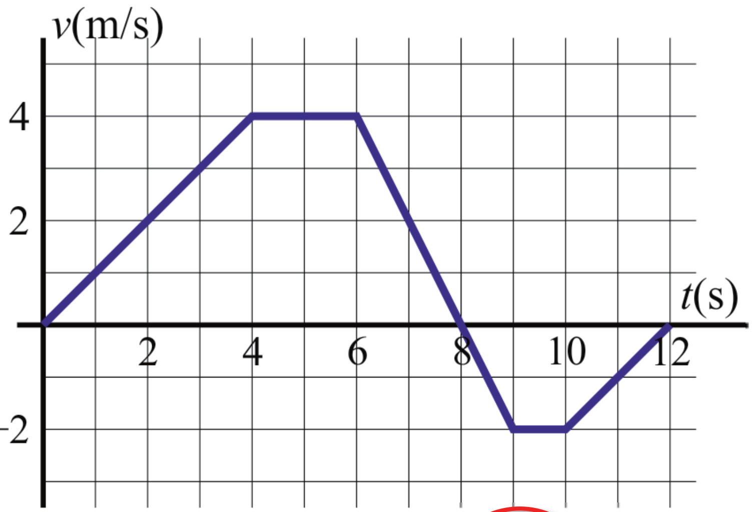




Concavidad de $x(t)$

Pendiente de la curva $v(t)$

Ejemplo de aceleración obtenida a partir de la velocidad



De los cuatro instantes siguientes, ¿en cual la aceleración tiene el mayor valor absoluto?

A	B	C	D
0.0 s	5.0 s	8.0 s	9.5 s

A partir de la aceleración puede hallarse la velocidad y la posición

Las variaciones en la velocidad pueden hallarse a partir de la aceleración

$$\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t$$

$$\Delta v \simeq a\,\Delta t$$

Solo si $\Delta t \ll$

$$v_2 \simeq v_1 + a(t_2 - t_1)$$

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3 \cdots = a_1 \Delta t_1 + a_2 \Delta t_2 + a_3 \Delta t_3 \cdots$$

$$\Delta v = \int_{t_i}^{t_f} a\,\mathrm{d}t$$

Una vez hallada $v(t)$ puede calcularse $x(t)$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,\mathrm{d}t$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,\mathrm{d}t$$

Es necesario conocer x_0 y v_0 (condiciones iniciales)

¿Es lo mismo frenar que tener aceleración negativa?

La aceleración puede tener cualquier signo

$a > 0$: velocidad creciente

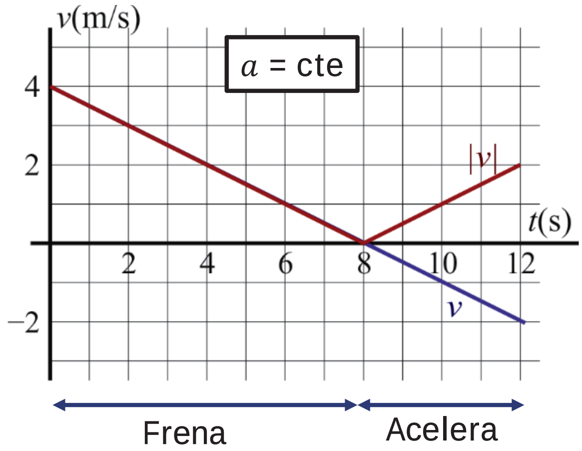
$a < 0$: velocidad decreciente

Se refiere al cambio de la velocidad, no de la rapidez

"Frenar" y "acelerar" se refiere al cambio de la rapidez

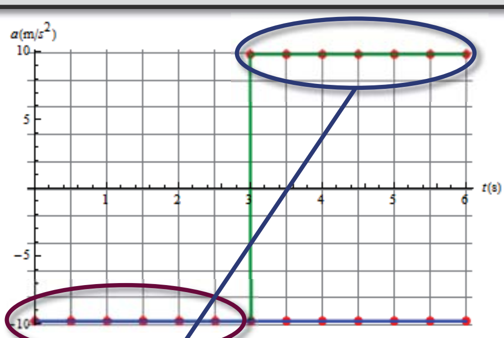
$$a_t = \frac{\mathrm{d}|v|}{\mathrm{d}t}$$

Aceleración tangencial



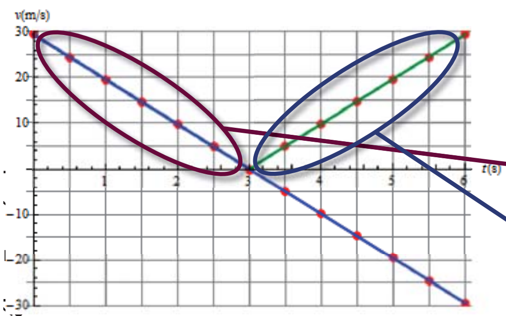
Ejemplo: El caso de un cuerpo que se mueve por gravedad

Si una piedra se lanza *verticalmente* hacia arriba



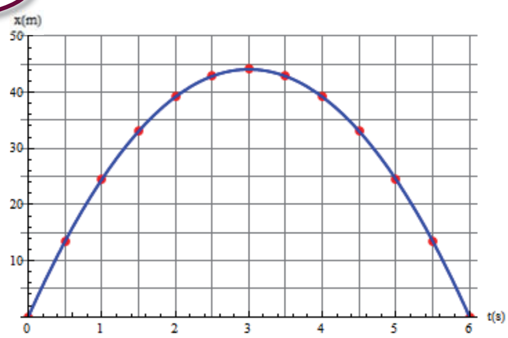
$a = -g$

$a_t = \pm g$



Frena

Acelera



$$v = v_0 + \int_0^t (-g)\mathrm{d}t = v_0 - gt$$

$$|v| = |v_0 - gt| = \begin{cases} v_0 - gt & t < v_0/g \\ gt - v_0 & t > v_0/g \end{cases}$$

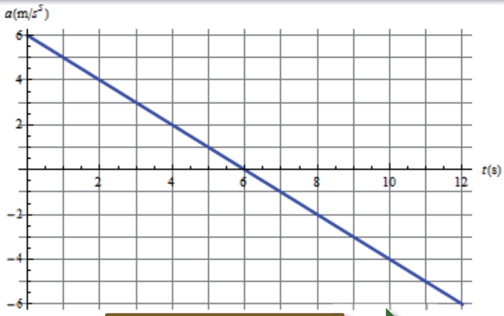
$$x = x_0 + \int_0^t (v_0 - gt)\mathrm{d}t = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

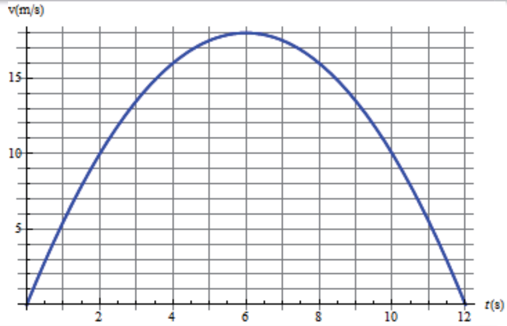
Ejemplo de aceleración variable en el tiempo

$a(t)$

$v(0) = 0$

¿v_m entre $t = 0\text{s}$ y $t = 12\text{s}$?





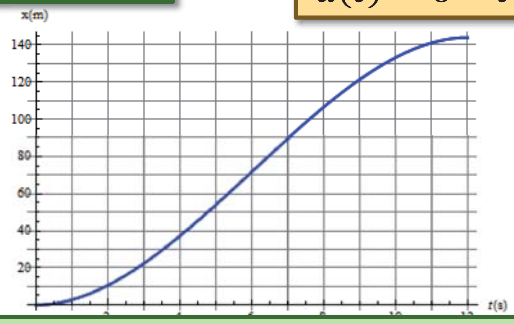
$a(t) = 6 - t$

$$v(t) = 0 + \int_0^t (6 - t)\mathrm{d}t = 6t - \frac{t^2}{2}$$

$$v(12\text{s}) = 0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

¿$v_m = 0$?

¿$v_m = 9\text{m/s}$?



$$x(t) = 0 + \int_0^t \left(6t - \frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t = 3t - \frac{t^3}{6}$$

$$x(12\text{s}) = 144\text{m}$$

$$v_m = \frac{144\text{m}}{12\text{s}} = 12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Si conocemos la velocidad como función de la posición $v = v(x)$, ¿cómo hallamos a?

La aceleración es la derivada de v **respecto al tiempo**

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$a \neq \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

Regla de la cadena

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

Ej.: $v = \sqrt{kx}$

$$a = \frac{k}{2\sqrt{kx}}$$? **NO**

$$a = \frac{k}{2\sqrt{kx}}v = \frac{k}{2\sqrt{kx}}\sqrt{kx} = \frac{k}{2}$$

Movimiento uniformemente acelerado

o bien

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{kx}{2} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{k}{2}$$

El resultado es la aceleración como función de la posición

Si lo que se conoce es $a(x)$ tenemos una ecuación diferencial

En muchos problemas físicos lo que se conoce es la aceleración como función de la posición y/o de la velocidad

$a = -\omega^2 x$

Oscilador armónico

$a = -\omega^2 x - \gamma v$

Oscilador con rozamiento

$a = -\dfrac{Gm}{x^2}$

Campo gravitatorio

Esto son ecuaciones diferenciales

$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$

No existe fórmula general para resolverlas

Técnicas de solución

- Métodos analíticos
- Aproximaciones
- Métodos numéricos

…o una combinación de ellas

Es un arte

Ejemplo de método numérico: el método de Euler

Datos:

$a = a(x, v, t)$

$x(t = 0) = x_0$

$v(t = 0) = v_0$

¿Podemos hallar $x(t)$ y $v(t)$?

En un Δt muy corto

$a_0 = a(x_0, v_0, t_0)$ $\quad t_0 = 0$

$t_1 \simeq t_0 + \Delta t$

$x_1 \simeq x_0 + v_0 \Delta t$

$v_1 \simeq v_0 + a_0 \Delta t$

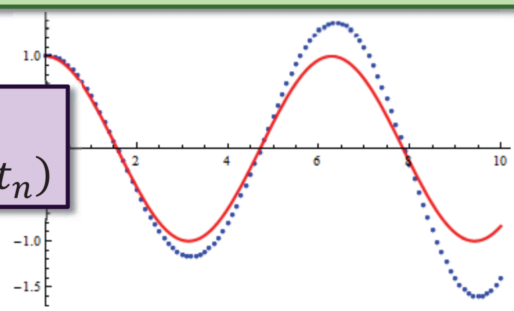
Con la nueva posición y velocidad podemos hallar la nueva aceleración y así sucesivamente

$t_n = t_{n-1} + \Delta t$

$x_n = x_{n-1} + v_{n-1} \Delta t$

$v_n = v_{n-1} + a_{n-1} \Delta t$

$a_n = a(x_n, v_n, t_n)$



Es muy poco preciso por la acumulación de errores