

Tema 3: Vectores libres

FISICA I, 1º Grado en Ingeniería Electrónica, Robótica y
Mecatrónica

Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

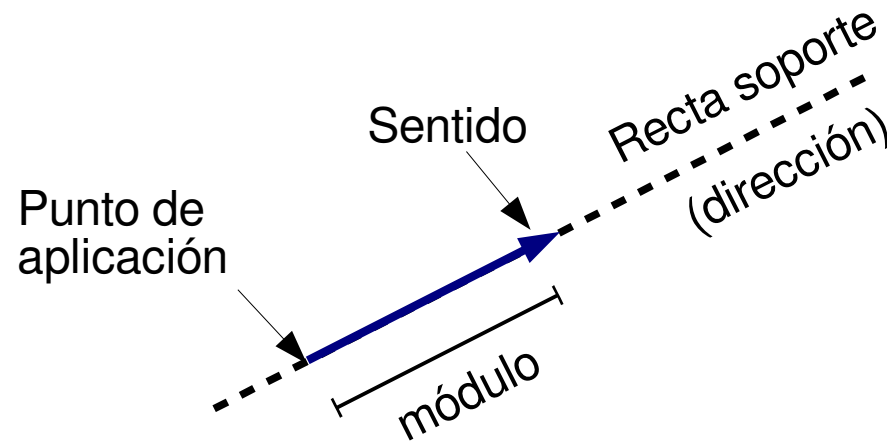
Universidad de Sevilla

- Escalares y vectores
- Vectores libres
- Producto escalar
- Producto vectorial
- Producto mixto
- Doble producto vectorial

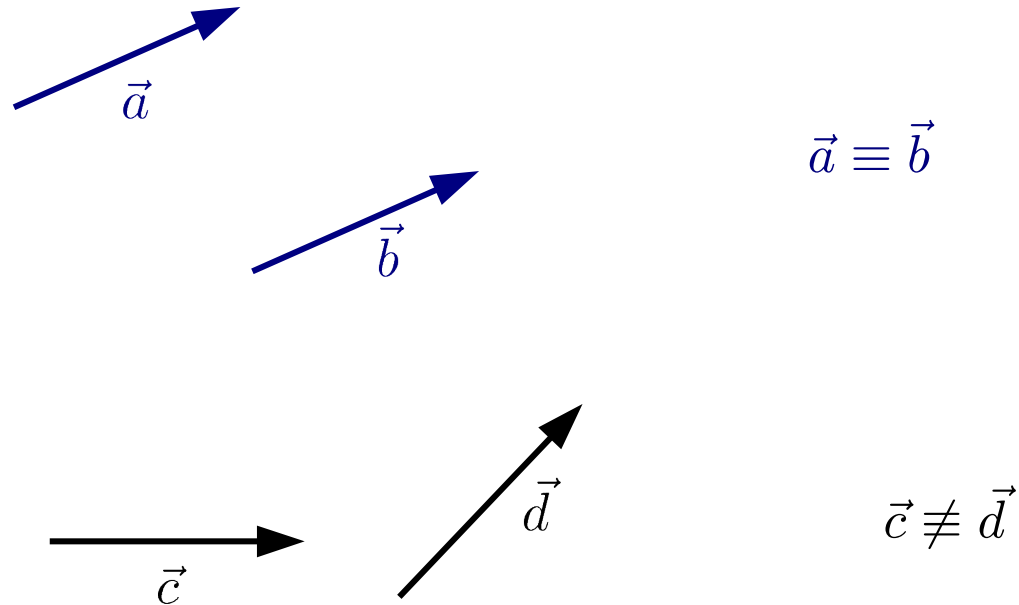
- Magnitud **escalar** : queda definida con un número y una unidad
 - Temperatura, longitud, carga eléctrica, tiempo, etc
- Magnitud **vectorial**: require magnitud, dirección y sentido
 - Velocidad, aceleración, fuerza, etc
- Magnitud **tensorial**

- Escalares y vectores
- **Vectores libres**
- Producto escalar
- Producto vectorial
- Producto mixto
- Doble producto vectorial

- En Matemáticas es un elemento de un **espacio vectorial**
- En Física es un **segmento orientado**: una flecha
 - Módulo
 - Recta soporte
 - Dirección
 - Sentido
 - Punto de aplicación
- Representación: **$\mathbf{a}$** o **$\vec{a}$**

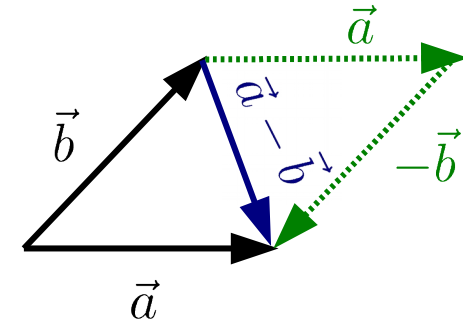
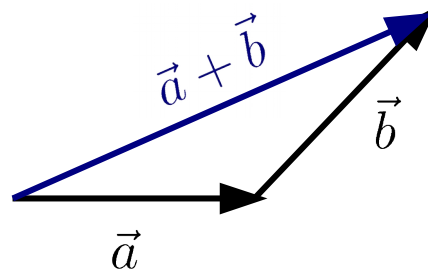
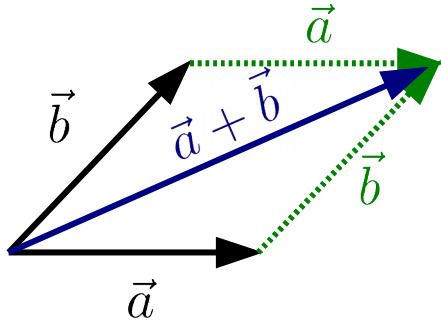


- **Relación de equivalencia:** **a** y **b** son vectores equivalentes si tienen el mismo módulo, dirección y sentido
 - Dos vectores libres equivalentes pueden hacerse coincidir si se desplazan en el espacio

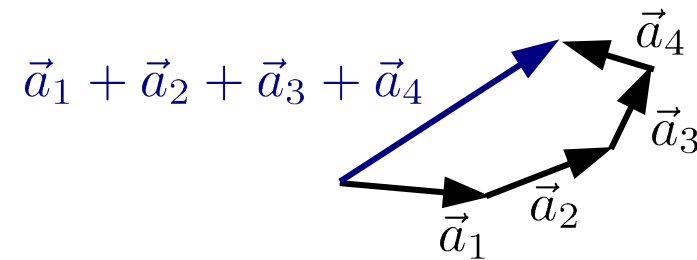
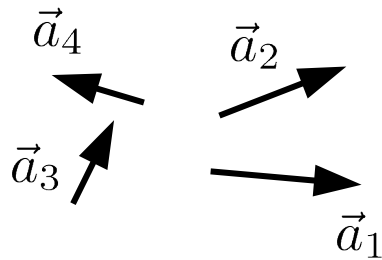


■ Suma y resta de vectores libres

■ Dos vectores



■ Varios vectores



- Propiedades de la suma

- Conmutativa

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

- Asociativa

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

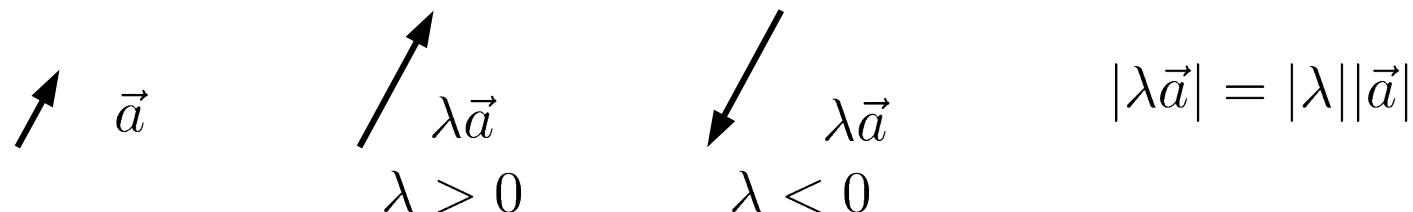
- Existencia de elemento neutro

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

- Existencia de elemento opuesto

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

- El producto por un escalar es otro vector



- Propiedades

- Asociativa respecto al producto por un escalar

$$\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda\mu) \vec{a}$$

- Distributiva respecto a la suma de vectores

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

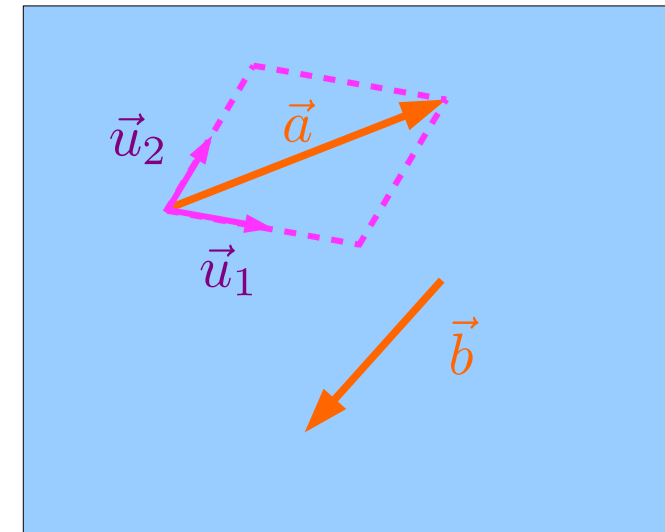
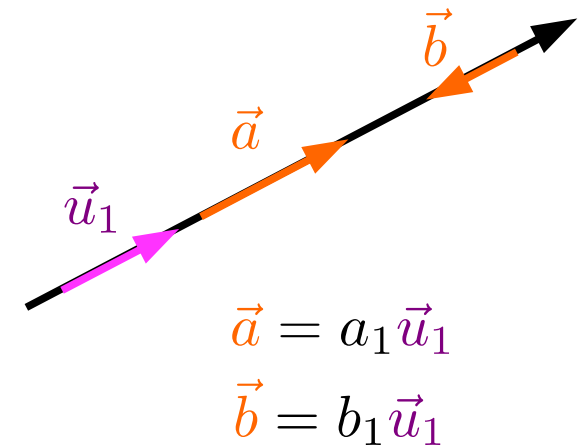
- Distributiva respecto a la suma de escalares

$$(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$$

- Existencia de escalar unidad

$$1 \vec{a} = \vec{a}$$

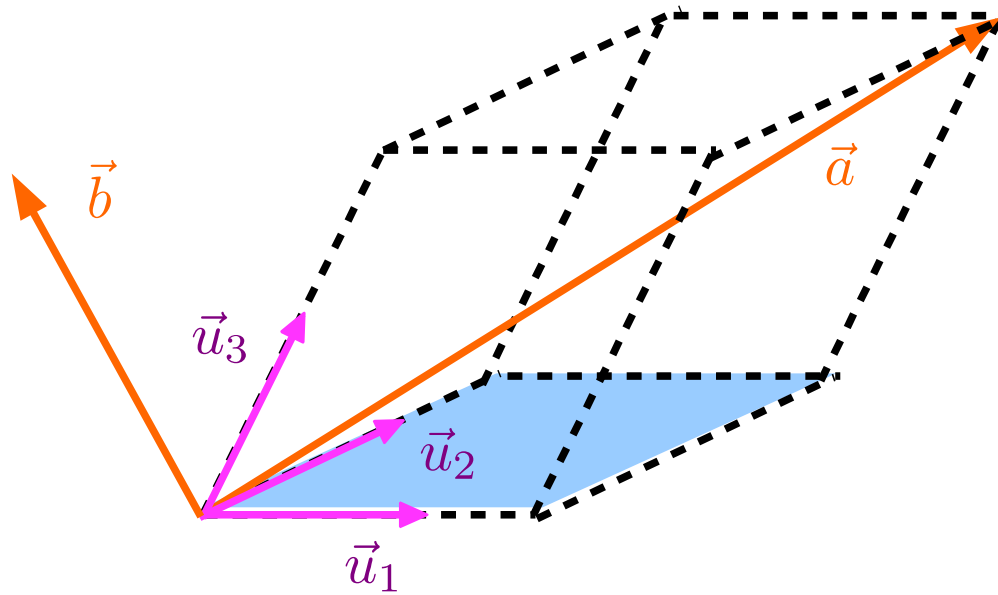
- Los infinitos vectores que pueden definirse sobre una recta pueden caracterizarse con uno de los vectores y un número
 - La base del espacio vectorial formado por todos los vectores contenidos en una recta tiene dimensión 1
- Los infinitos vectores que pueden definirse sobre un plano pueden caracterizarse con dos de los vectores no colineales y dos números
 - La base del espacio vectorial formado por todos los vectores contenidos en un plano tiene dimensión 2



$$\vec{a} = a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{u}_1 + b_2 \vec{u}_2$$

- Los infinitos vectores que pueden definirse en un espacio tridimensional pueden caracterizarse con tres de los vectores no colineales y no coplanarios y tres números
 - La base del espacio vectorial formado por todos los vectores en el espacio tiene dimensión 3



$$\vec{a} = a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + a_3 \vec{u}_3$$

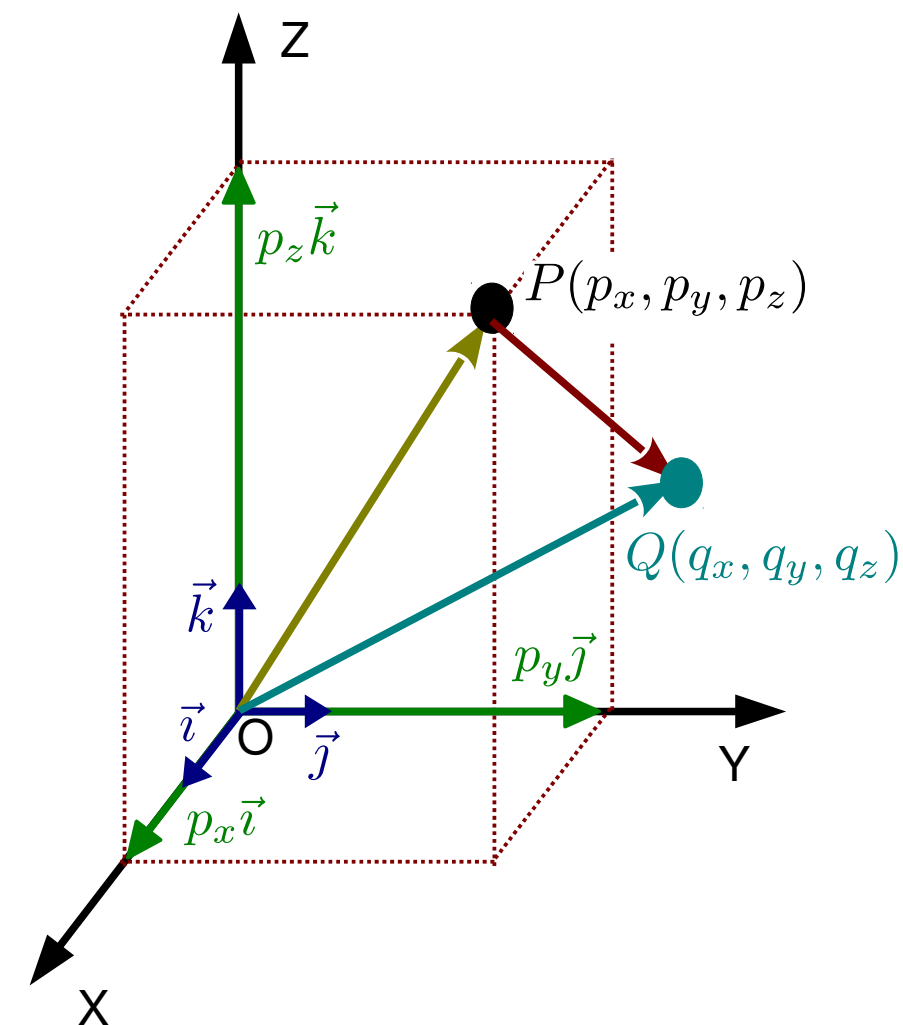
$$\vec{b} = b_1 \vec{u}_1 + b_2 \vec{u}_2 + b_3 \vec{u}_3$$

- Una **base** en E_3 es una terna de vectores, $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, tal que cualquier vector $\mathbf{a}$ puede escribirse como combinación lineal de ellos

$$\vec{a} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3$$

$$\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]_B$$

- a_1, a_2, a_3 son las componentes de $\mathbf{a}$ en la base B
- Para que tres vectores formen una base no deben ser ni colineales ni coplanarios (**linealmente independientes**)
 - La dimensión del espacio vectorial es el número mínimo de vectores linealmente independientes que pueden describir todos los vectores del espacio



Triedro OXYZ

Base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

Componentes de un vector

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = [a_x, a_y, a_z]$$

Vector de posición

$$\overrightarrow{OP} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k} = [p_x, p_y, p_z]$$

Álgebra vectorial

Suma de vectores

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [q_x - p_x, q_y - p_y, q_z - p_z]$$

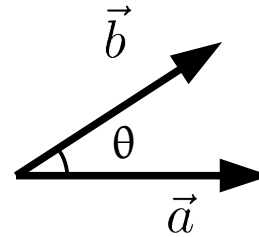
Multiplicación de un vector por un escalar

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x) \vec{i} + (\lambda a_y) \vec{j} + (\lambda a_z) \vec{k}$$

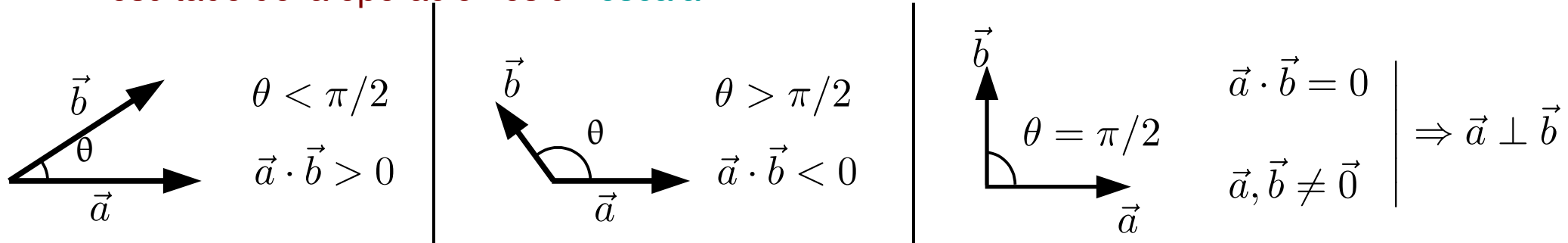
- Escalares y vectores
- Vectores libres
- Producto escalar
- Producto vectorial
- Producto mixto
- Doble producto vectorial

Definición

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$



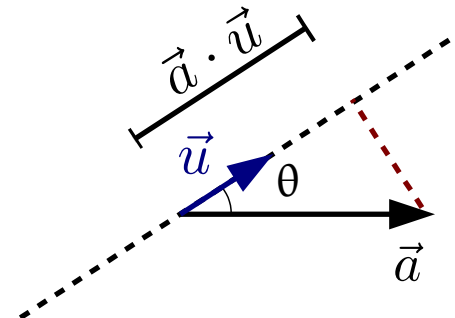
- El resultado de la operación es un **escalar**



- Expresa de modo sencillo la condición de ortogonalidad, distancias y ángulos
- Permite calcular la **proyección ortogonal** de un vector sobre una **dirección**, representada por un vector unitario

$$|\vec{u}| = 1$$

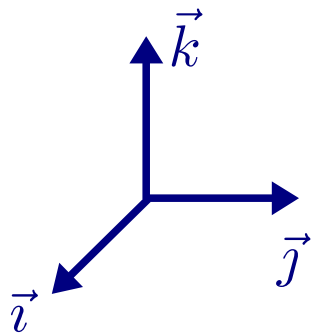
$$\vec{a} \cdot \vec{u} = |\vec{a}| \cos \theta = \text{proy}_{\parallel \vec{u}}[\vec{a}]$$



- Asociativa resp. prod. por un escalar $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b}) = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- Conmutativa $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Distributiva resp. a suma $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

- Los vectores de una base ortonormal son mutuamente perpendiculares y de módulo unidad

- Ejemplo: base cartesiana



$$\begin{array}{lll} \vec{i} \cdot \vec{i} = 1; & \vec{i} \cdot \vec{j} = 0; & \vec{i} \cdot \vec{k} = 0; \\ \vec{j} \cdot \vec{i} = 0; & \vec{j} \cdot \vec{j} = 1; & \vec{j} \cdot \vec{k} = 0; \\ \vec{k} \cdot \vec{i} = 0; & \vec{k} \cdot \vec{j} = 0; & \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \end{array}$$

- Producto escalar de dos vectores expresados en una base ortonormal

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \end{array} \right| \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- Módulo de un vector

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- Distancia entre dos puntos

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}} = \\ &= \sqrt{(q_x - p_x)^2 + (q_y - p_y)^2 + (q_z - p_z)^2} \end{aligned}$$

- Ángulo entre dos vectores

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

- Vector unitario paralelo a uno dado

$$\vec{u}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Define una métrica del espacio

- Componentes cartesianas de un vector

$$\vec{a} = \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{i})}_{a_x} \vec{i} + \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{j})}_{a_y} \vec{j} + \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{k})}_{a_z} \vec{k}$$

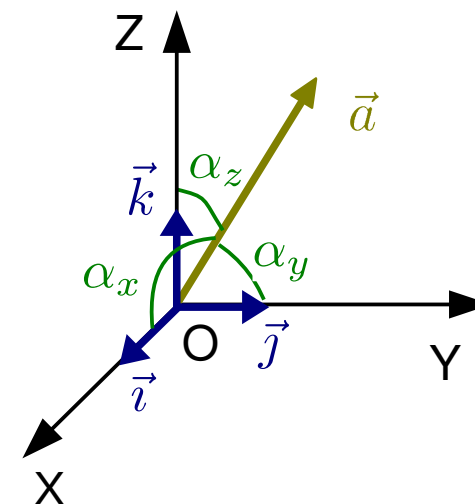
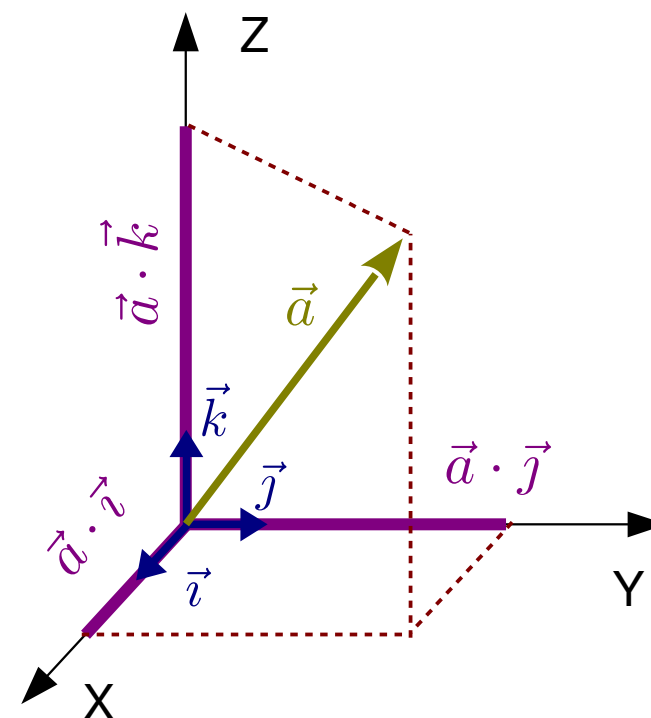
- Cosenos directores

$$\cos \alpha_x = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$$

$$\cos \alpha_y = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$$

$$\cos \alpha_z = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1$$



- Punto por el que pasa el plano

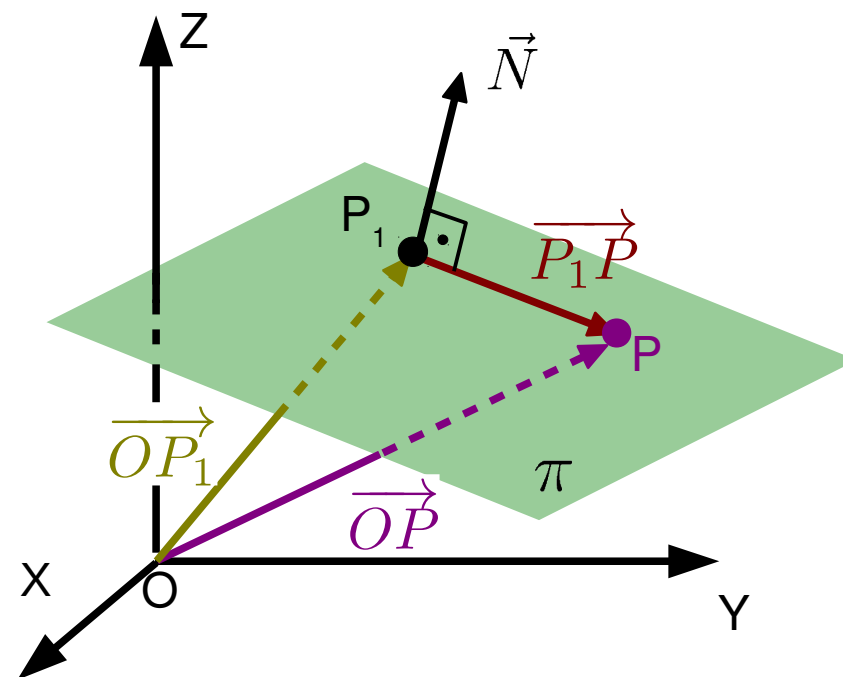
$$\overrightarrow{OP_1} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

- Vector normal al plano

$$\vec{N} = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k}$$

- Punto genérico del plano

$$\overrightarrow{OP} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$



- Condición para que el punto P esté en el plano

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{P_1P} = 0 \Rightarrow \vec{N} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1}) = 0 \Rightarrow \vec{N} \cdot \overrightarrow{OP} = \vec{N} \cdot \overrightarrow{OP_1}$$

- Ecuación general del plano

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 \implies ax + by + cz + (-ax_1 + by_1 + cz_1) = 0$$

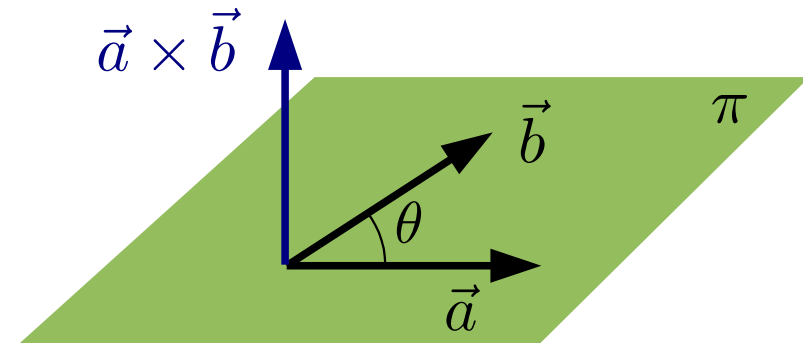
- Escalares y vectores
- Vectores libres
- Producto escalar
- **Producto vectorial**
- Producto mixto
- Doble producto vectorial

Definición

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin \theta$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \text{plano } \pi$$

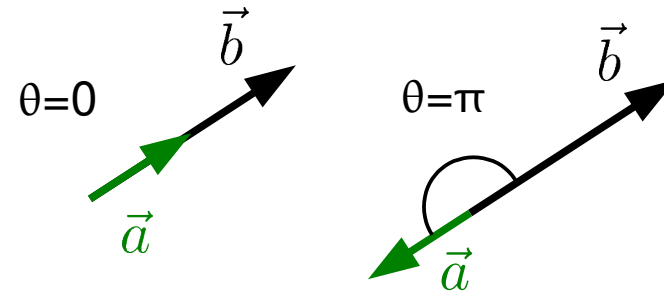
sentido : regla de la mano derecha ($\vec{a} \rightarrow \vec{b}$)



- El resultado de la operación es un vector
- Escritura alternativa $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}$
- Permite expresar de modo sencillo la condición de paralelismo
- Permite construir rápidamente vectores perpendiculares
- Extrae la componente perpendicular en una proyección ortogonal

■ Condición de paralelismo

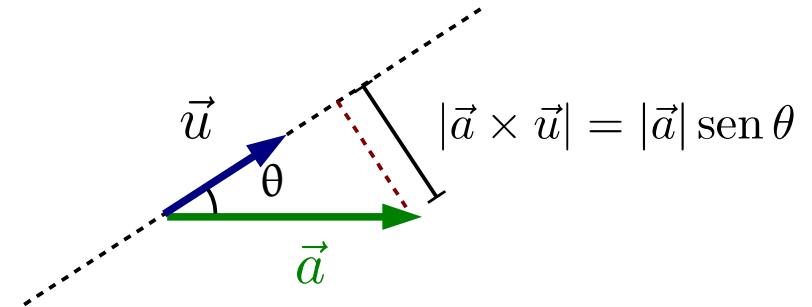
$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \text{sen } \theta = 0 \\ \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0} \end{array} \right| \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$$



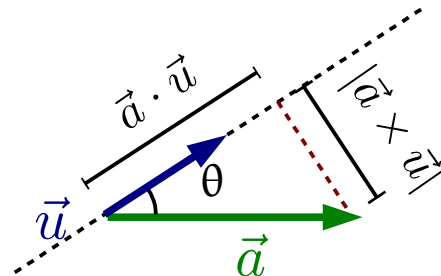
■ Permite calcular la componente **perpendicular** de la proyección ortogonal del vector sobre una **dirección**

$$|\vec{u}| = 1$$

$$|\vec{a} \times \vec{u}| = |\vec{a}| |\vec{u}| \text{sen } \theta = |\vec{a}| \text{sen } \theta$$



■ La otra componente la da el producto escalar

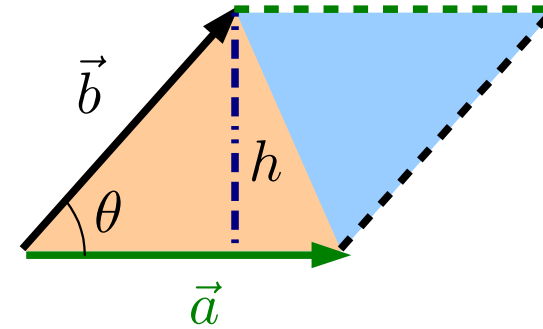


- Área del paralelogramo que forman dos vectores

$$\text{Área}_{\square} = |\vec{a}| h = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$h = |\vec{b}| \sin \theta = |\vec{b}| \left(\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right) = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

$$\text{Área}_{\triangle} = \frac{1}{2} \text{Área}_{\square} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$



- **No es asociativo**

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

- Anticonmutativa

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

- Asociativa resp. al prod. por un escalar

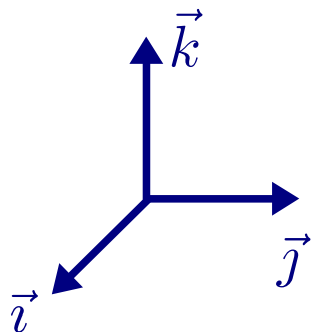
$$(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \vec{b}) = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$$

- Distributiva respecto a la suma

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

- Productos vectoriales de los vectores de la base

- Ejemplo: base cartesiana



$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}; & \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}; \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}; & \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}; & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}; & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}; & \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \end{array}$$

- Expresión del producto vectorial en una base ortonormal

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

- Punto por el que pasa la recta

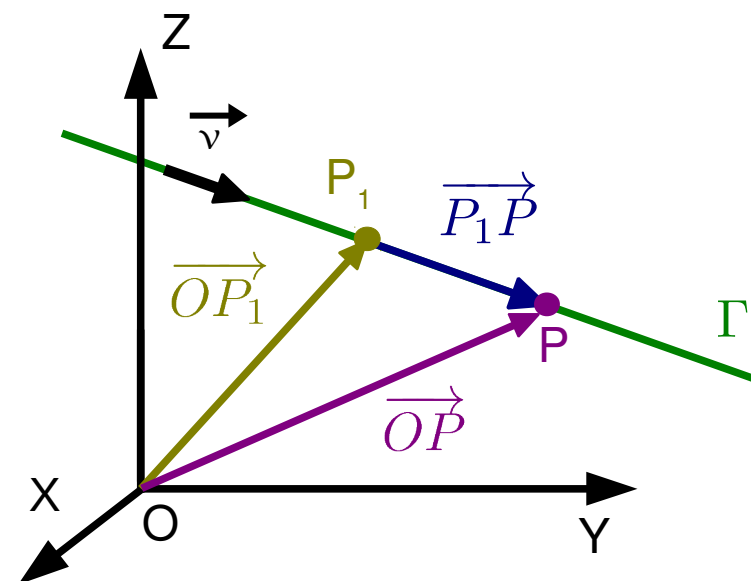
$$\overrightarrow{OP_1} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

- Vector director de la recta

$$\vec{v} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$$

- Punto genérico de la recta

$$\overrightarrow{OP} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$



- Condición para que el vector $\overrightarrow{P_1P}$ sea paralelo al vector director

$$\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P} = 0 \Rightarrow \vec{v} \times (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1}) = 0 \Rightarrow \vec{v} \times \overrightarrow{OP} = \vec{v} \times \overrightarrow{OP_1}$$

- Ecuaciones de la recta

$$\Gamma \equiv \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda \vec{v} \quad \left| \quad \Gamma \equiv \begin{cases} x = x_1 + \lambda \alpha \\ y = y_1 + \lambda \beta \\ z = z_1 + \lambda \gamma \end{cases} \right|$$

Vectorial

Paramétricas

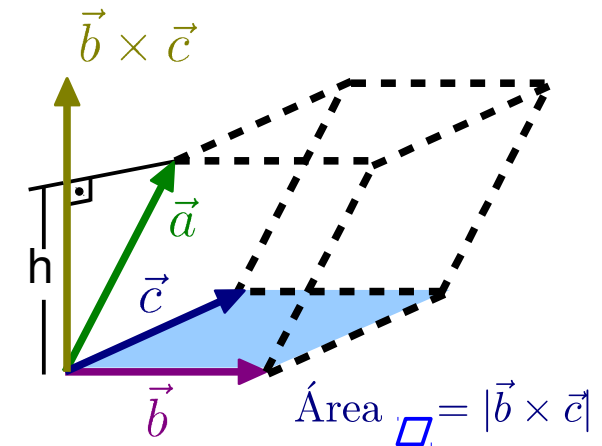
$$\Gamma \equiv \frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y - y_1}{\beta} = \frac{z - z_1}{\gamma}$$

Continua

- Escalares y vectores
- Vectores libres
- Producto escalar
- Producto vectorial
- **Producto mixto**
- Doble producto vectorial

- Definición: involucra tres vectores $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
 - El resultado de la operación es un escalar
 - El valor absoluto es el volumen del paralelepípedo

$$\begin{aligned} \text{Volumen}_{\text{cubo}} &= \text{Área}_{\text{cuadrado}} h \\ h &= \left| \vec{a} \cdot \frac{(\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{b} \times \vec{c}|} \right| \quad \Rightarrow \quad \text{Volumen}_{\text{cubo}} = h |\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| \end{aligned}$$



- Condición de coplanariedad

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= 0 \\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} &\neq \vec{0} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ son coplanarios}$$

Tres vectores forman una base si y solo si su producto mixto es no nulo

- Propiedades

- Permutabilidad cíclica

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

- Permutabilidad acíclica

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$$

- Expresión en una base cartesiana

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

- Puntos por los que pasa el plano

$$P_1(x_1, y_1, z_1) \quad P_2(x_2, y_2, z_2) \quad P_3(x_3, y_3, z_3)$$

- Punto genérico del plano

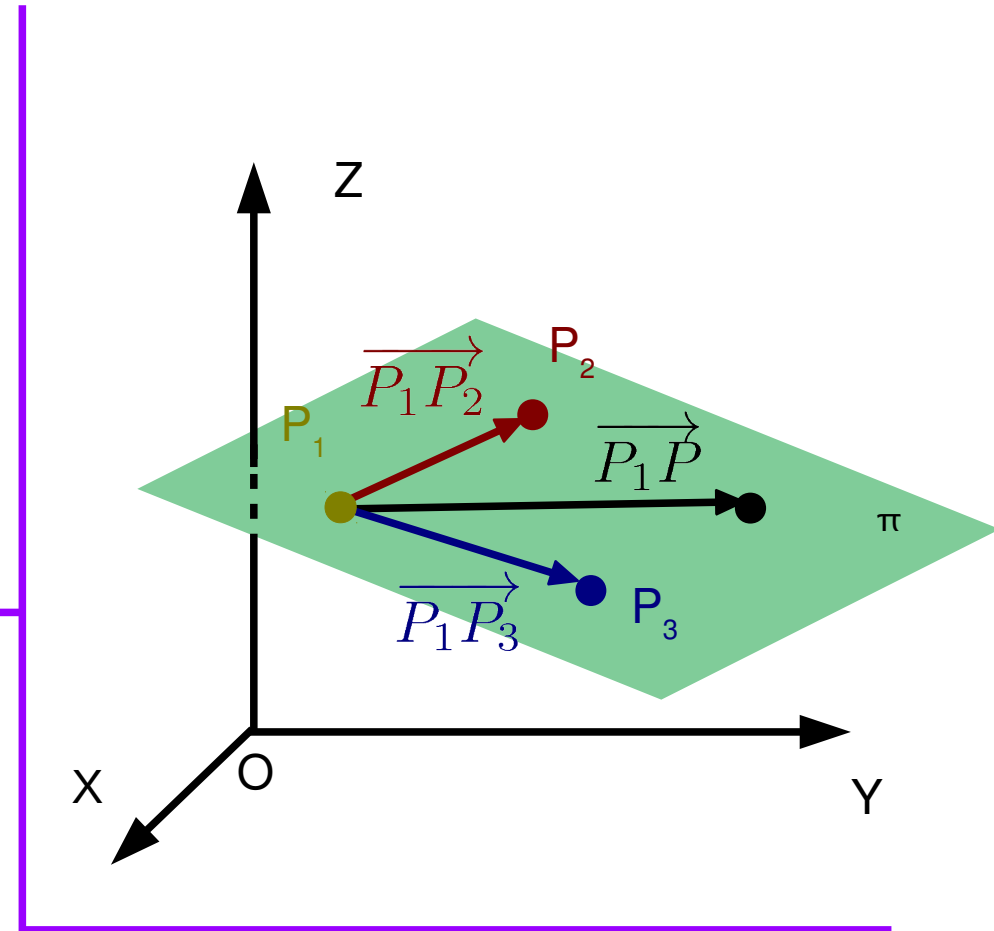
$$P(x, y, z)$$

- Condición de coplanariedad

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) = 0$$

- Ecuación del plano

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$



- Escalares y vectores
- Vectores libres
- Producto escalar
- Producto vectorial
- Producto mixto
- Doble producto vectorial

- Definición: involucra tres vectores

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ (\vec{a} \cdot \vec{b}) & (\vec{a} \cdot \vec{c}) \end{vmatrix} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

- El resultado de la operación es un vector

- Aplicación al desarrollo del producto escalar de dos productos vectoriales

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{c} \times \vec{d}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{c} \cdot [\vec{d} \times (\vec{a} \times \vec{b})] = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

- Resolución de un sistema de ecuaciones vectoriales

$$\begin{cases} \vec{x} \times \vec{a} = \vec{b} \\ \vec{x} \cdot \vec{a} = \alpha \end{cases}$$

$$\vec{a} \times (\vec{x} \times \vec{a}) = \vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow |\vec{a}|^2 \vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{a}) \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{x} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}|^2} + \frac{\alpha \vec{a}}{|\vec{a}|^2}$$