



Tema 6: Cinética del sólido rígido

Mecánica Racional, 2º, Grado en Ingeniería Civil

Departamento Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

- Cantidad de movimiento de un sólido rígido
 - Teorema del Centro de Masas (T.C.M.)
- Momento cinético de un sólido rígido
 - Teorema del Momento Cinético (T.M.C.)
- Energía cinética de un sólido rígido
- Trabajo y potencia sobre un sólido rígido
- Teorema de la energía
- Trabajo interno de un par de sólidos en contacto

- La cantidad de movimiento del sistema es la suma de la cantidad de movimiento de cada una de las partículas que lo componen

$$\vec{C} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

- Para un sistema continuo

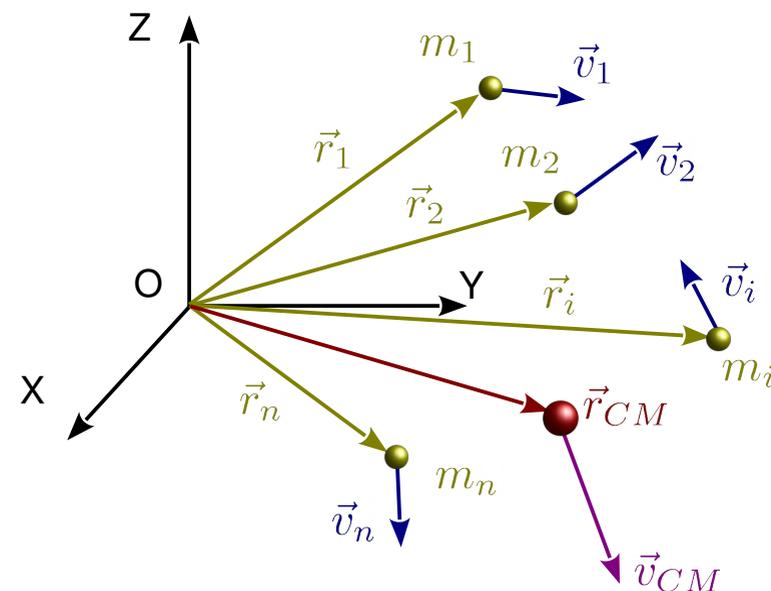
$$\vec{C} = \int d\vec{p} = \int \vec{v} dm$$

- Un sólido rígido es un sistema continuo

- En función de la velocidad del centro de masas

$$\vec{C} = M \vec{v}_{CM}$$

- Todas las velocidades deben ser medidas en un SRI



El centro de masas de un sistema de partículas se mueve como una partícula con toda la masa del sistema, sometida a la acción de la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema

$$\dot{\vec{C}} = \left. \frac{d\vec{C}}{dt} \right|_1 = \vec{F}_{neta}^{ext}$$

- Las fuerzas **externas** son las que provienen del exterior del sistema
- Las fuerzas **internas** son las que se ejercen entre partes del sistema
 - Se anulan por pares gracias a la Tercera Ley de Newton
- También recibe el nombre de **Teorema del Centro de Masas**
- Si la masa del sistema no cambia

$$\dot{\vec{C}} = M\dot{\vec{v}}_G = M\vec{a}_G = \vec{F}_{neta}^{ext}$$

■ Demostración

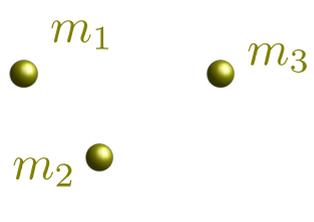
$$\dot{\vec{C}} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} \quad \Bigg| \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{C}} = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^{\text{ext}} + \vec{F}_i^{\text{int}})$$

$$= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{int}}$$

■ Segunda Ley para cada partícula

$$\frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \vec{F}_i^{\text{int}}$$

■ Las fuerzas internas se anulan por pares por la Tercera Ley de Newton



$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{int}} = (\vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{3 \rightarrow 1}) + (\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{3 \rightarrow 2}) + (\vec{F}_{2 \rightarrow 3} + \vec{F}_{1 \rightarrow 3})$$

$$= \vec{0}$$

■ Por tanto

$$\dot{\vec{C}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{F}_{\text{neta}}^{\text{ext}}$$

- Si la fuerza externa neta es nula, la cantidad de movimiento del centro de masas se conserva

$$\vec{F}_{neta}^{ext} = 0 \implies \dot{\vec{C}} = 0 \implies \vec{C} = \overline{CTE}$$

- Hay que aplicarlo en un SRI
 - Ejemplo: deslizamiento sobre una superficie helada plana
- Conservación parcial (T.C.C.M. parcial)

$$\vec{F}_{neta}^{ext} \perp \vec{u} \implies \vec{C} \cdot \vec{u} = cte$$

- El vector \mathbf{u} tiene que ser fijo respecto al SRI
- Ejemplo: movimiento parabólico en el campo gravitatorio terrestre

- Cantidad de movimiento de un sólido rígido
 - Teorema del Centro de Masas (T.C.M.)
- Momento cinético de un sólido rígido
 - Teorema del Momento Cinético (T.M.C.)
- Energía cinética de un sólido rígido
- Trabajo y potencia sobre un sólido rígido
- Teorema de la energía
- Trabajo interno de un par de sólidos en contacto

- Reducción cinemática en el punto A $\{\vec{v}_{21}^A, \vec{\omega}_{21}\}$
- Distribución de masas del sólido $\{G, M, \overset{\leftrightarrow}{I}_A\}$
- Momento angular en el punto A

$$\vec{L}_A = \overset{\leftrightarrow}{I}_A \cdot \vec{\omega}_{21} + M \overrightarrow{AG} \times \vec{v}_{21}^A$$

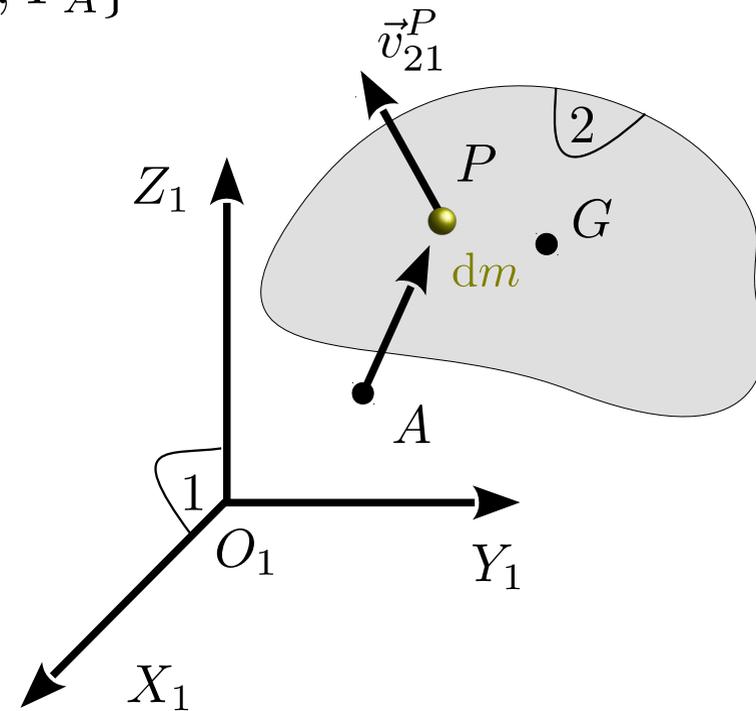
- Si A es un punto fijo O del sólido: $\vec{v}_{21}^O = \vec{0}$

$$\vec{L}_O = \overset{\leftrightarrow}{I}_O \cdot \vec{\omega}_{21}$$

- Si A es el centro de masas G: $\overrightarrow{GG} = \vec{0}$

$$\vec{L}_G = \overset{\leftrightarrow}{I}_G \cdot \vec{\omega}_{21}$$

- Esto es cierto siempre aunque $\vec{v}_{21}^G \neq \vec{0}$



■ Demostración

$$\vec{L}_A = \int \overrightarrow{AP} \times (dm \vec{v}_{21}^P) = \int dm \overrightarrow{AP} \times \vec{v}_{21}^P$$

$$\overrightarrow{AP} = \vec{r}$$

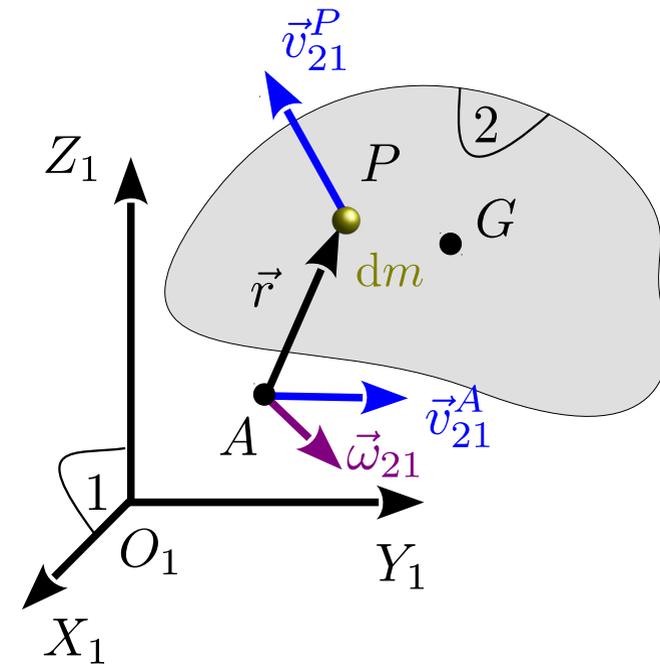
$$\vec{v}_{21}^P = \vec{v}_{21}^A + \vec{\omega}_{21} \times \vec{r}$$

$$\vec{L}_A = \int dm \vec{r} \times \vec{v}_{21}^A + \int dm \vec{r} \times (\vec{\omega}_{21} \times \vec{r})$$

$$= \left(\int dm \vec{r} \right) \times \vec{v}_{21}^A + \int dm (r^2 \vec{\omega}_{21} - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega}_{21}))$$

$$= M \overrightarrow{AG} \times \vec{v}_{21}^A + \left[\int dm (r^2 \overleftrightarrow{U} - \vec{r}\vec{r}) \right] \cdot \vec{\omega}_{21}$$

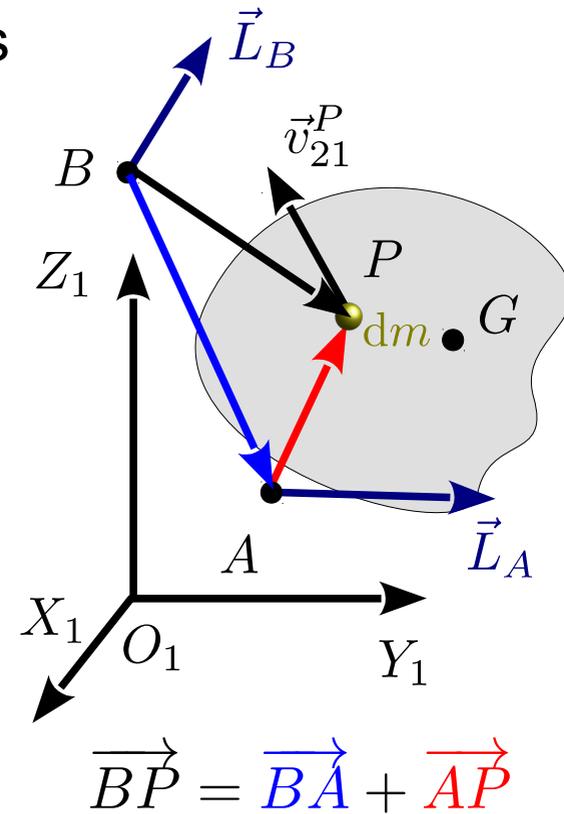
$$= M \overrightarrow{AG} \times \vec{v}_{21}^A + \overleftrightarrow{I}_A \cdot \vec{\omega}_{21}$$



- El momento cinético cambia para puntos diferentes

$$\begin{aligned}
 \vec{L}_B &= \int_M \overrightarrow{BP} \times (\vec{v}_{21}^P dm) = \int_M dm \overrightarrow{BP} \times \vec{v}_{21}^P \\
 &= \int_M dm (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}) \times \vec{v}_{21}^P \\
 &= \int_M dm \overrightarrow{BA} \times \vec{v}_{21}^P + \int_M dm \overrightarrow{AP} \times \vec{v}_{21}^P \\
 &= \overrightarrow{BA} \times \left(\int_M dm \vec{v}_{21}^P \right) + \int_M dm \overrightarrow{AP} \times \vec{v}_{21}^P \\
 &= \overrightarrow{BA} \times \vec{C} + \vec{L}_A
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{L}_B = \vec{L}_A + \vec{C} \times \overrightarrow{AB}}$$



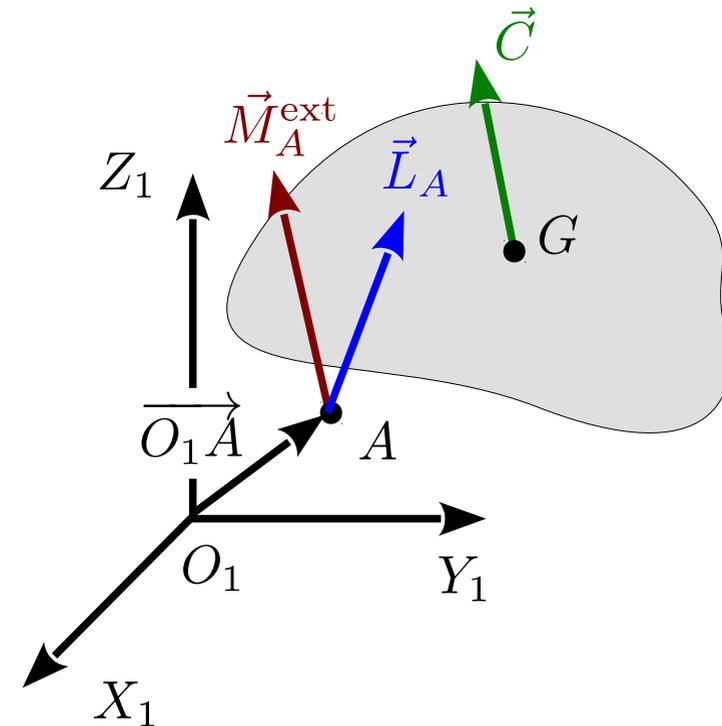
- Sistema sometido a fuerzas externas

$$\dot{\vec{L}}_A = \left. \frac{d\vec{L}_A}{dt} \right|_1 = \vec{M}_A^{\text{ext}} + \vec{C} \times \overrightarrow{O_1\dot{A}}$$

\vec{C} Cantidad de movimiento del CM

\vec{M}_A^{ext} Momento neto de las fuerzas externas respecto a A

$\overrightarrow{O_1\dot{A}}$ Velocidad absoluta de A respecto al punto fijo absoluto O_1



- Si A es el centro de masas G

$$\dot{\vec{L}}_G = \vec{M}_G^{\text{ext}}$$

- Válido aunque $\vec{v}_{21}^G \neq \vec{0}$

- Si A es un punto fijo absoluto O

$$\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O^{\text{ext}}$$

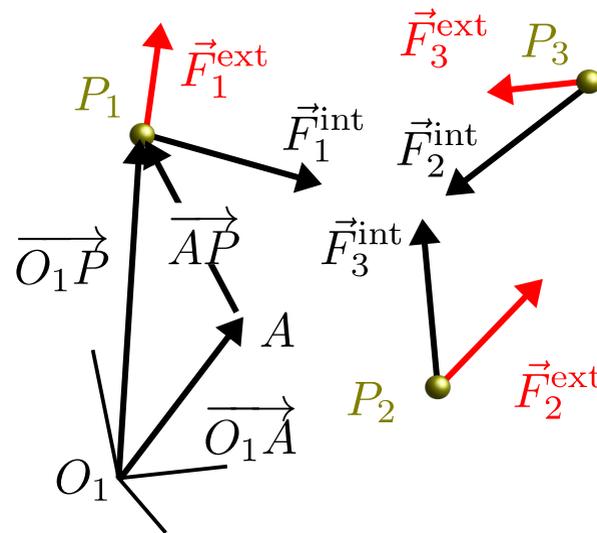
- Demostración

$$\vec{L}_{Ai} = \overrightarrow{AP_i} \times (m_i \vec{v}_{P_i}) = (\overrightarrow{O_1P_i} - \overrightarrow{O_1A}) \times (m_i \vec{v}_{P_i})$$

- Derivando respecto al tiempo

$$\dot{\vec{L}}_{Ai} = (\vec{v}_{P_i} - \overrightarrow{O_1\dot{A}}) \times (m_i \vec{v}_{P_i}) + (\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{O_1A}) \times (\dot{m}_i \vec{v}_{P_i})$$

$$\dot{\vec{L}}_{Ai} = m_i \vec{v}_{P_i} \times \overrightarrow{O_1\dot{A}} + (\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{O_1A}) \times (\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int})$$



- Sumando para todas las partículas (o elementos de volumen en un sólido rígido)

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}}_A &= \sum_i \dot{\vec{L}}_{Ai} = \left(\sum_i m_i \vec{v}_{P_i} \right) \times \overrightarrow{O_1\dot{A}} + \sum_i \overrightarrow{AP_i} \times \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \overrightarrow{AP_i} \times \vec{F}_i^{int} \\ &= \vec{C} \times \overrightarrow{O_1\dot{A}} + \vec{M}_A^{ext} \end{aligned}$$

- Demostración de que el momento neto de las fuerzas internas es cero

$$\vec{F}_1^{\text{int}} = \vec{F}_{12}^{\text{int}} + \vec{F}_{13}^{\text{int}}$$

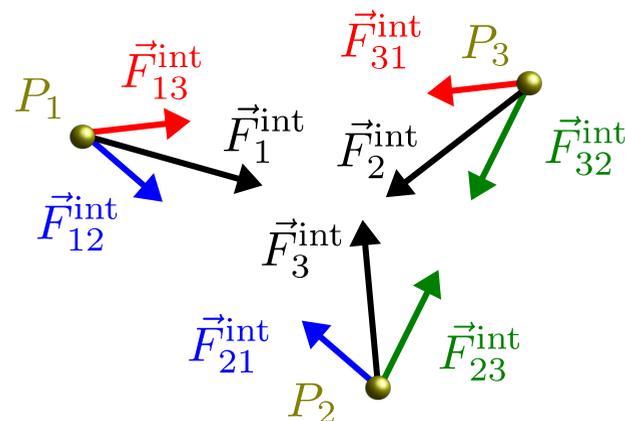
$$\vec{F}_2^{\text{int}} = \vec{F}_{21}^{\text{int}} + \vec{F}_{23}^{\text{int}}$$

$$\vec{F}_3^{\text{int}} = \vec{F}_{31}^{\text{int}} + \vec{F}_{32}^{\text{int}}$$

$$\vec{F}_{12}^{\text{int}} = -\vec{F}_{21}^{\text{int}}$$

$$\vec{F}_{13}^{\text{int}} = -\vec{F}_{31}^{\text{int}}$$

$$\vec{F}_{23}^{\text{int}} = -\vec{F}_{32}^{\text{int}}$$



$$\begin{aligned} \sum_i \overrightarrow{AP}_i \times \vec{F}_i^{\text{int}} &= \overrightarrow{AP}_1 \times (\vec{F}_{12}^{\text{int}} + \vec{F}_{13}^{\text{int}}) + \overrightarrow{AP}_2 \times (\vec{F}_{21}^{\text{int}} + \vec{F}_{23}^{\text{int}}) + \overrightarrow{AP}_3 \times (\vec{F}_{31}^{\text{int}} + \vec{F}_{32}^{\text{int}}) \\ &= (\overrightarrow{AP}_1 - \overrightarrow{AP}_2) \times \vec{F}_{12}^{\text{int}} + (\overrightarrow{AP}_1 - \overrightarrow{AP}_3) \times \vec{F}_{13}^{\text{int}} + (\overrightarrow{AP}_2 - \overrightarrow{AP}_3) \times \vec{F}_{23}^{\text{int}} \\ &= (\overrightarrow{P_1P_2}) \times \vec{F}_{12}^{\text{int}} + (\overrightarrow{P_1P_3}) \times \vec{F}_{13}^{\text{int}} + (\overrightarrow{P_2P_3}) \times \vec{F}_{23}^{\text{int}} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

- Conservación total

- A es un punto fijo absoluto O

$$\vec{M}_O^{\text{ext}} = \vec{0} \implies \vec{L}_O = \overrightarrow{cte}$$

- A es el centro de masas G

$$\vec{M}_G^{\text{ext}} = \vec{0} \implies \vec{L}_G = \overrightarrow{cte}$$

- Conservación parcial: si el momento neto de las fuerzas externas no tiene componente sobre una dirección fija, la componente del momento cinético sobre esa componente se conserva

$$\vec{F}^{\text{ext}} \parallel \vec{u} \text{ (fijo)} \implies \vec{L}_O \cdot \vec{u} = cte$$

$$\vec{F}^{\text{ext}} \text{ corta } \vec{u} \text{ (fijo)} \implies \vec{L}_O \cdot \vec{u} = cte$$

- O debe ser un punto fijo absoluto

- También es válido para G si el momento está expresado en una base fija

- Cantidad de movimiento de un sólido rígido
 - Teorema del Centro de Masas (T.C.M.)
- Momento cinético de un sólido rígido
 - Teorema del Momento Cinético (T.M.C.)
- Energía cinética de un sólido rígido
- Trabajo y potencia sobre un sólido rígido
- Teorema de la energía
- Trabajo interno de un par de sólidos en contacto

- Reducción cinemática en el punto A $\{\vec{v}_{21}^A, \vec{\omega}_{21}\}$
- Distribución de masas del sólido $\{G, M, \overset{\leftrightarrow}{I}_A\}$
- Energía cinética del sólido rígido

$$T = \frac{1}{2}M|\vec{v}_{21}^A|^2 + M\overrightarrow{AG} \cdot (\vec{v}_{21}^A \times \vec{\omega}_{21}) + \frac{1}{2}\vec{\omega}_{21} \cdot \overset{\leftrightarrow}{I}_A \cdot \vec{\omega}_{21}$$

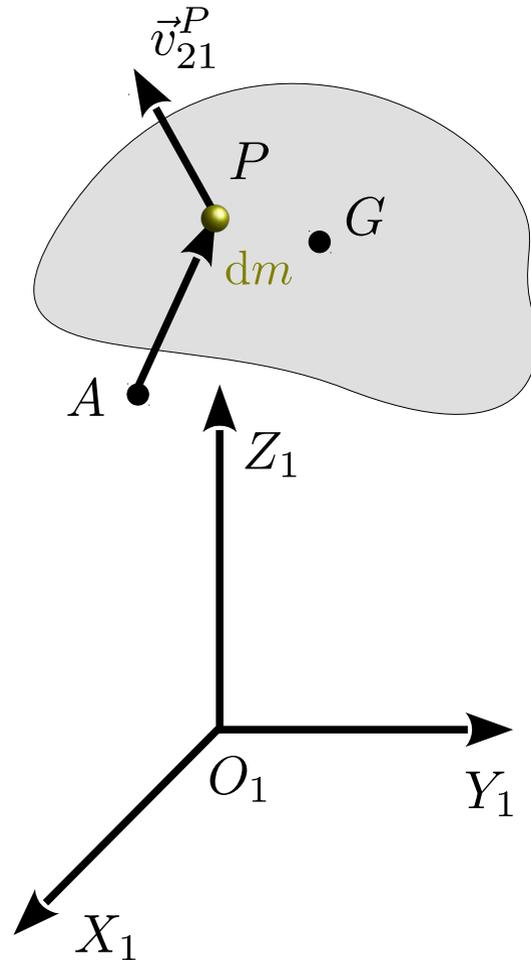
- Si A es un punto fijo O: $\vec{v}_{21}^O = \vec{0}$

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}_{21} \cdot \overset{\leftrightarrow}{I}_O \cdot \vec{\omega}_{21} = \frac{1}{2}\vec{\omega}_{21} \cdot \vec{L}_O$$

- Si A es el centro de masa G: $\overrightarrow{GG} = \vec{0}$

$$T = \frac{1}{2}M|\vec{v}_{21}^G|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}_{21} \cdot \overset{\leftrightarrow}{I}_G \cdot \vec{\omega}_{21}$$

- Esto es cierto siempre aunque $\vec{v}_{21}^G \neq \vec{0}$



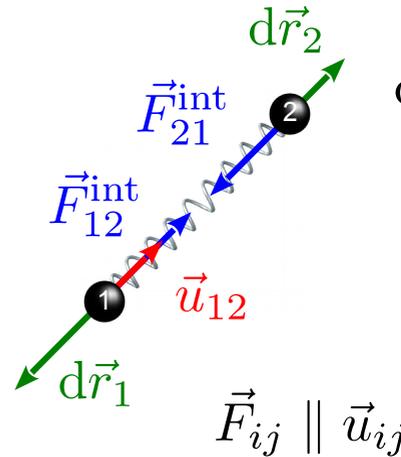
- Cantidad de movimiento de un sólido rígido
 - Teorema del Centro de Masas (T.C.M.)
- Momento cinético de un sólido rígido
 - Teorema del Momento Cinético (T.M.C.)
- Energía cinética de un sólido rígido
- Trabajo y potencia sobre un sólido rígido
- Teorema de la energía
- Trabajo interno de un par de sólidos en contacto

- Para un sistema de partículas

$$dW^{\text{int}} = \sum_{\text{pares}} \vec{F}_{ij}^{\text{int}} \cdot d\vec{r}_{ij}$$

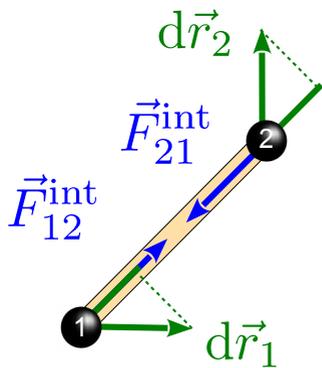
$$d\vec{r}_{ij} = d\vec{r}_i - d\vec{r}_j$$

$$d\vec{r}_{ij} \cdot \vec{u}_{ij} \neq 0$$



$$\begin{aligned} dW^{\text{int}} &= \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 \\ &= \vec{F}_{12} \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) \\ &= \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} \neq 0 \end{aligned}$$

- Para un sólido rígido: $d\vec{r}_{ij} \cdot \vec{u}_{ij} = 0 \implies dW^{\text{int}} = 0$



$$dW_1^{\text{int}} = \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 \neq 0$$

$$dW_2^{\text{int}} = \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 \neq 0$$

$$\begin{aligned} dW^{\text{int}} &= dW_1^{\text{int}} + dW_2^{\text{int}} \\ &= \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 \\ &= \vec{F}_{12} \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) \\ &= \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} = 0 \end{aligned}$$

- En un sólido rígido $dW = \cancel{dW^{\text{int}}} + dW^{\text{ext}} = dW^{\text{ext}}$
- Sobre el sólido actúa un conjunto de fuerzas externas $\{\vec{F}_k^{\text{ext}}\}_{k=1}^n$ aplicadas en los puntos $\{P_k\}_{k=1}^n$
- Reducción cinemática del movimiento del sólido en el punto A: $\{\vec{v}_{21}^A, \vec{\omega}_{21}\}$
- La potencia total suministrada por las fuerzas externas es

$$P = \vec{F}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{21}^A + \vec{M}_A^{\text{ext}} \cdot \vec{\omega}_{21}$$

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ext}}$$

$$\vec{M}_A^{\text{ext}} = \sum_{k=1}^n \overrightarrow{AP}_k \times \vec{F}_k^{\text{ext}}$$

- Si A es el centro de masas G

$$dW^{\text{ext}} = dW_{\text{tras}} + dW_{\text{rot}} \left| \begin{array}{l} dW_{\text{tras}} = \vec{F}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{21}^G \\ dW_{\text{rot}} = \vec{M}_G^{\text{ext}} \cdot \vec{\omega}_{21} \end{array} \right.$$

- Demostración

- La potencia suministrada por las fuerzas externas es

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{21}^{P_k} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ext}} \cdot (\vec{v}_{21}^A + \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{AP}_k) \\
 &= \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{21}^A + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ext}} \cdot \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{AP}_k \\
 &= \left(\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ext}} \right) \cdot \vec{v}_{21}^A + \left(\sum_{k=1}^n (\overrightarrow{AP}_k \times \vec{F}_k^{\text{ext}}) \right) \cdot \vec{\omega}_{21} \\
 &= \vec{F}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{21}^A + \vec{M}_A^{\text{ext}} \cdot \vec{\omega}_{21}
 \end{aligned}$$

$\vec{v}_{21}^{P_k}$ son las velocidades absolutas de los puntos del sólido donde se aplican las fuerzas externas

- Cantidad de movimiento de un sólido rígido
 - Teorema del Centro de Masas (T.C.M.)
- Momento cinético de un sólido rígido
 - Teorema del Momento Cinético (T.M.C.)
- Energía cinética de un sólido rígido
- Trabajo y potencia sobre un sólido rígido
- Teorema de la energía
- Trabajo interno de un par de sólidos en contacto

- El trabajo de las fuerzas internas es **nulo**

$$dT = dW = dW^{\text{ext}}$$

$$\dot{T} = \dot{W}^{\text{ext}} = P = \vec{F}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{21}^A + \vec{M}_A^{\text{ext}} \cdot \vec{\omega}_{21}^A$$

$$T(B) - T(A) = W^{\text{ext}}(A, B)$$

- Descomposición de la energía cinética **respecto al CM**

$$T_{\text{tras}} = \frac{1}{2} M |\vec{v}_{21}^G|^2 \qquad P_{\text{tras}} = \dot{T}_{\text{tras}} = \vec{F}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{21}^G$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{21} \cdot \overset{\leftrightarrow}{I}_G \cdot \vec{\omega}_{21} \qquad P_{\text{rot}} = \dot{T}_{\text{rot}} = \vec{M}_G^{\text{ext}} \cdot \vec{\omega}_{21}$$

- En un sólido rígido, el T.E.C. se puede demostrar con T.C.M. y T.M.C.
 - En un sistema deformable no

- Fuerzas **no trabajadoras**: el punto de aplicación es fijo o la velocidad del punto de aplicación es perpendicular a la fuerza
- Fuerzas **trabajadoras**
 - **No conservativas**
 - **Conservativas**: se puede definir una energía potencial asociada
- Si **sólo** las fuerzas conservativas hacen trabajo

$$E = T + V \qquad dE = 0 \qquad E = \text{cte}$$

- Si hay fuerzas trabajadoras no conservativas

$$dE = dW_{NC} \qquad \Delta E = W_{NC} \qquad \dot{E} = P_{NC}$$

- Cantidad de movimiento de un sólido rígido
 - Teorema del Centro de Masas (T.C.M.)
- Momento cinético de un sólido rígido
 - Teorema del Momento Cinético (T.M.C.)
- Energía cinética de un sólido rígido
- Trabajo y potencia sobre un sólido rígido
- Teorema de la energía
- Trabajo interno de un par de sólidos en contacto

- Definiciones de trabajos

$$dW_{ij}$$

Trabajo que el sólido i recibe del j

$$dW_{ji}$$

Trabajo que el sólido j recibe del i

$$dW_{\text{int}}(i, j) = dW_{ij} + dW_{ji}$$

Trabajo total interno

- Definiciones de potencias

$$P_{ij}$$

Potencia que el sólido i recibe del j

$$P_{ji}$$

Potencia que el sólido j recibe del i

$$P_{\text{int}}(i, j) = P_{ij} + P_{ji}$$

Potencia total interna

- Hay que calcularlos en un **MOVIMIENTO ABSOLUTO**

- Caso **LISO** $dW_{\text{int}}^{\text{liso}}(i, j) = 0$ $P_{\text{int}}^{\text{liso}}(i, j) = 0$

- Caso **RUGOSO** $dW_{\text{int}}^{\text{rug}}(i, j) \leq 0$ $P_{\text{int}}^{\text{rug}}(i, j) \leq 0$

- Régimen dinámico: hay deslizamiento entre los sólidos

$$dW_{\text{int}}^{\text{rug}}(i, j) < 0 \quad P_{\text{int}}^{\text{rug}}(i, j) < 0$$

- Régimen estático: no hay deslizamiento entre los sólidos

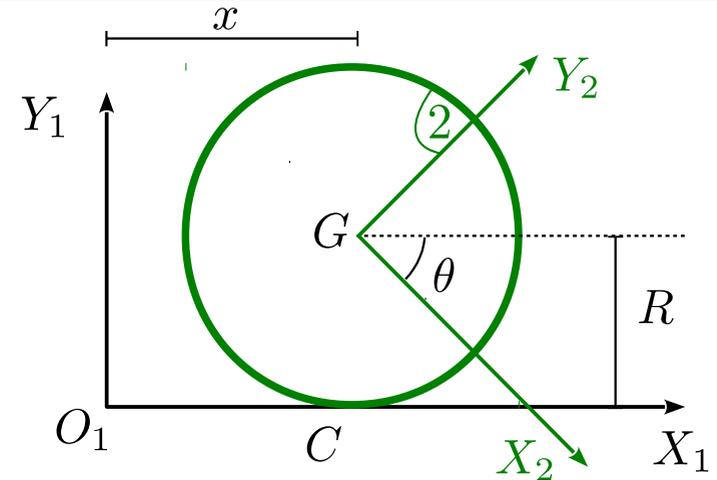
- Reposo relativo
- Rodadura sin deslizamiento

$$dW_{\text{int}}^{\text{rug}}(i, j) = 0 \quad P_{\text{int}}^{\text{rug}}(i, j) = 0$$

- Cinemática

$$\vec{\omega}_{21} = -\dot{\theta} \vec{k} \quad \vec{v}_{21}^G = \dot{x} \vec{i}_1$$

$$\vec{v}_{21}^C = \vec{v}_{21}^G + \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{GC} = (\dot{x} - R\dot{\theta}) \vec{i}_1$$



- Rueda **deslizando** $\vec{v}_{21}^C \neq \vec{0}$

$$\vec{F}_{\text{roz}}^{\text{din}} \parallel -\vec{v}_{21}^C \quad |\vec{F}_{\text{roz}}^{\text{din}}| = \mu_d N \quad P_{\text{roz}}^{\text{din}} = \vec{F}_{\text{roz}}^{\text{din}} \cdot \vec{v}_{21}^C < 0$$

- La fuerza de rozamiento es una fuerza **activa** no conservativa que hace trabajo
- Dos grados de libertad: $\{ x, \theta \}$

- Rueda **sin deslizar** $\vec{v}_{21}^C = \vec{0} \implies \dot{x} = R\dot{\theta} \implies x - x(0) = R(\theta - \theta(0))$

$$|\vec{F}_{\text{roz}}^{\text{est}}| \leq \mu_e N \quad P_{\text{roz}}^{\text{est}} = \vec{F}_{\text{roz}}^{\text{est}} \cdot \vec{v}_{21}^C = 0$$

- La fuerza de rozamiento es una fuerza de **reacción vincular**, que no hace trabajo y que establece una ligadura entre x y θ (1 grado de libertad)