Tema 9: Introducción a la mecánica analítica

Mecánica Racional, 2º, Grado en Ingeniería Civil

Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Índice

Introducción

- La mecánica analítica utiliza **funciones escalares** para encontrar las ecuaciones de movimiento (energía cinética, energía potencial...)
- El estado del sistema se describe utilizando **coordenadas generalizadas**, que incluyen a las ligaduras.
- Permite resolver el movimiento o situaciones de equilibrio de sistemas muy complejos.
  - Es muy utilizado en estática
- Las fuerzas de ligadura desaparecen del problema al analizar el movimiento
  - Las reacciones se obtienen después de haber resuelto el movimiento o el equilibrio
- Requiere un grado de abstracción mayor que la Dinámica Vectorial

Índice

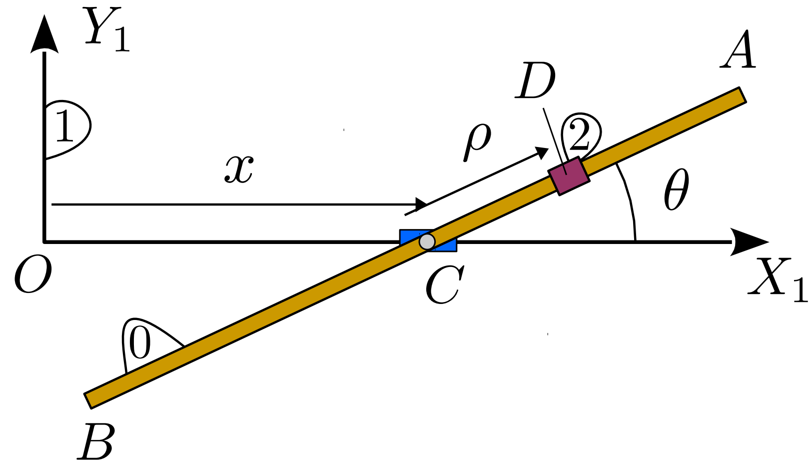
- Introducción
- Coordenadas generalizadas
- Ligaduras holónomas y no holónomas
- Desplazamientos y velocidades virtuales
- Ligaduras ideales
- Principio de los trabajos virtuales
- Fuerzas generalizadas
- Fuerzas conservativas

Coordenadas generalizadas

- Dado un sistema de N partículas, la descripción completa necesita 3N coordenadas cartesianas (3 por cada partícula)
- Si existen ligaduras sobre las partículas el numero de coordenadas necesarias se reduce
- Coordenadas generalizadas de un sistema son el conjunto de n coordenadas $\{q_k\}_1^n$ que permiten describir unívocamente el estado del sistema
  - n es el número de grados de libertad del sistema
  - Pueden ser cualquier magnitud física. En la práctica suelen ser distancias y ángulos
  - El espacio formado por las n coordenadas es el espacio de configuración

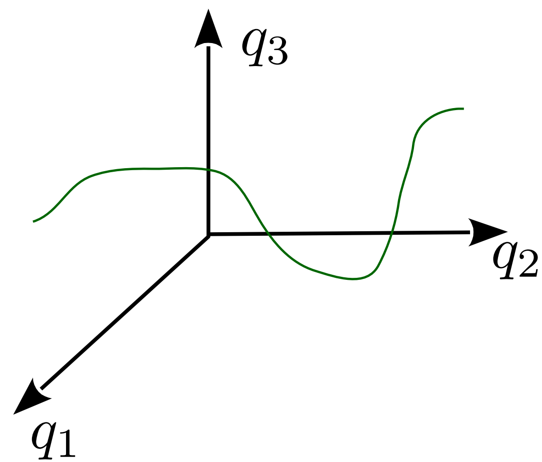
- Bastan tres coordenadas para describir el estado del sistema, aunque éste tenga infinitos puntos materiales

$$\{q_1 = x, q_2 = \theta, q_3 = \rho\} \qquad n = 3$$



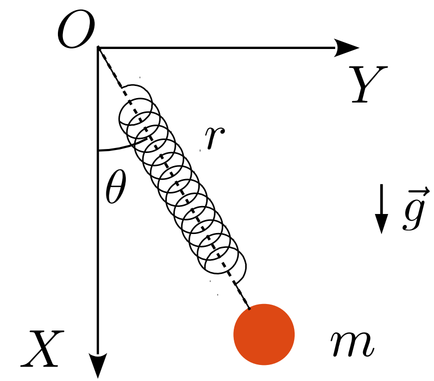
- Cada punto en el espacio de configuraciones es un estado del sistema

- El movimiento del sistema puede describirse como una línea en el espacio de configuraciones

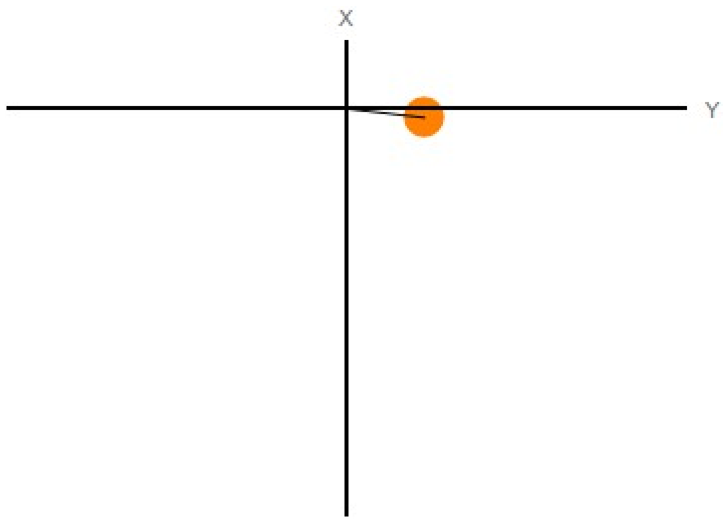


Espacio de las configuraciones: ejemplo

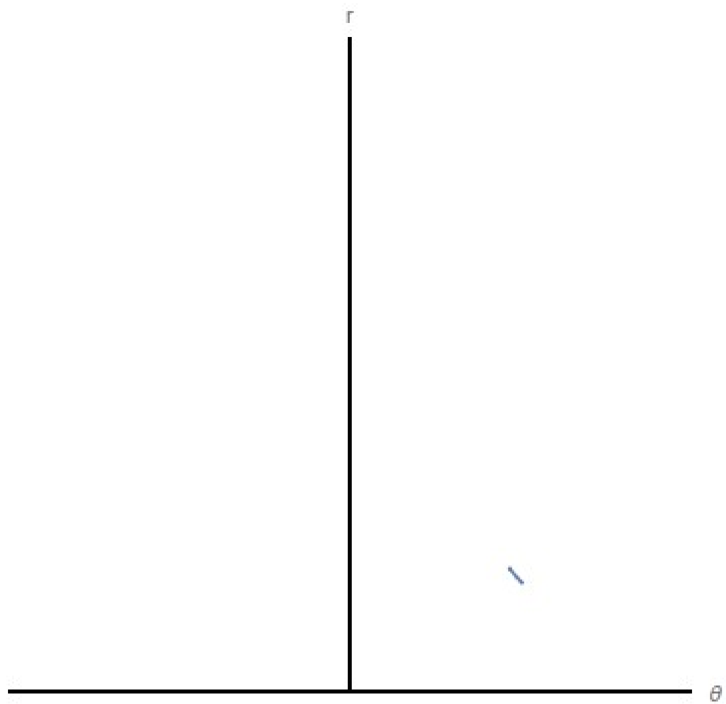
- Muelle con constante elástica k y longitud natural l_0
- Coordenadas generalizadas: $\{ r, \theta \}$ n=2



Trayectoria en el espacio real



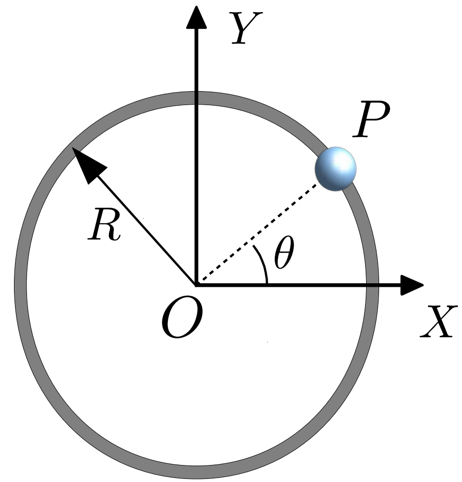
Trayectoria en el espacio de las configuraciones



Índice

- Son relaciones entre las coordenadas de los puntos de un sistema que pueden expresarse como

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{3N}, t) = 0$$



- Las ligaduras geométricas bilaterales son holónomas

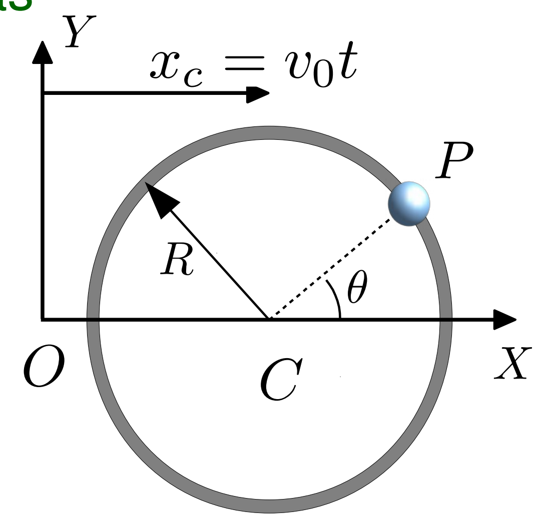
$$z = 0$$
$$x^2 + y^2 = R^2$$

- Si el tiempo no aparece explícitamente son esclerónomas

- Si el tiempo aparece explícitamente son reónomas

$$z = 0$$
$$(x - v_0 t)^2 + y^2 = R^2$$

  - Si hay una ligadura reónoma, el sistema es reónomo



Ligaduras no holónomas

- Son relaciones que no pueden expresarse como $f(x_1, x_2, \ldots, x_{3N}, t) = 0$

- Ligaduras cinemáticas: aparecen las derivadas temporales de las coordenadas

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{3N}, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_{3N}, t) = 0$$

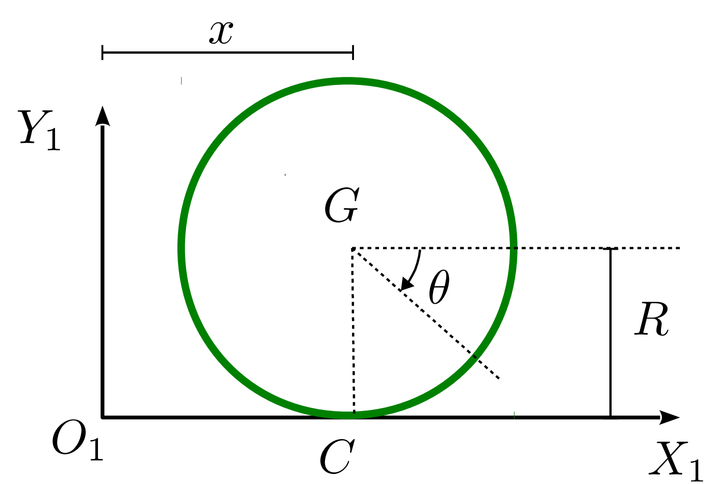
  - Integrables: pueden integrarse para eliminar las derivadas -> son holónomas
    - Rodadura sin deslizamiento en movimiento plano

$$\vec{v}^G = \dot{x}\,\vec{\imath}_1$$

$$\vec{v}^G = \vec{v}^C + \vec{\omega} \times \overrightarrow{CG} \Longrightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \mathrm{d}x = R\mathrm{d}\theta \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x(t) - x(0) = R(\theta(t) - \theta(0))$$



Ligaduras no holónomas

- Son relaciones que no pueden expresarse como $f(x_1, x_2, \ldots, x_{3N}, t) = 0$
- Ligaduras cinemáticas: aparecen las derivadas temporales de las coordenadas

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{3N}, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_{3N}, t) = 0$$

  - No integrables: no pueden integrarse para eliminar las derivadas -> son no holónomas
    - Rodadura sin deslizamiento en 3D (n=3)

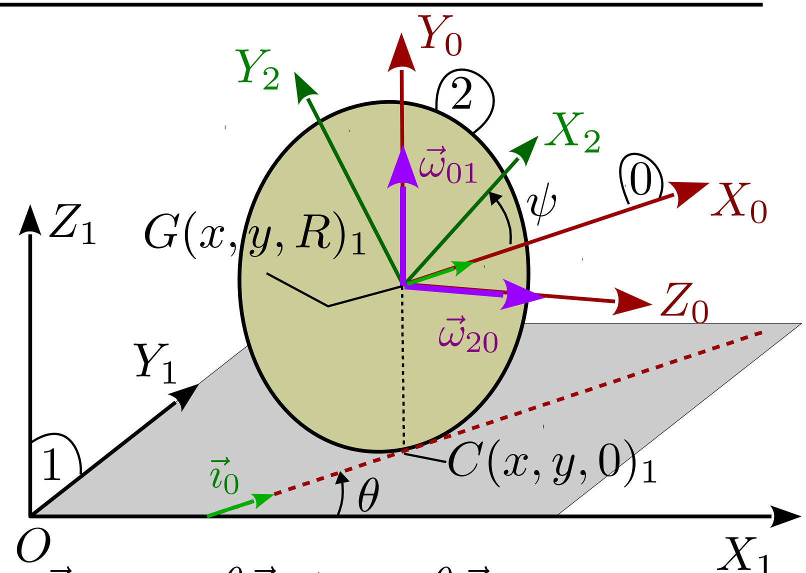
$$\vec{\omega}_{01} = \dot{\theta}\,\vec{\jmath}_0 \qquad \vec{v}^{\,G}_{01} = \dot{x}\,\vec{\imath}_1 + \dot{y}\,\vec{\jmath}_1 \qquad \vec{v}^{\,C}_{01} = \vec{v}^{\,G}_{01} + \cancelto{0}{\vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{GC}} = \dot{x}\,\vec{\imath}_1 + \dot{y}\,\vec{\jmath}_1$$

$$\vec{\omega}_{20} = \dot{\psi}\,\vec{k}_0 \qquad \vec{v}^{\,G}_{20} = \vec{0}$$

$$\vec{v}^{\,C}_{20} = \vec{v}^{\,G}_{20} + \vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{CG} = R\dot{\psi}\,\vec{\imath}_0 = R\dot{\psi}\cos\theta\,\vec{\imath}_1 + R\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{\jmath}_1$$

$$\vec{v}^{\,C}_{21} = \vec{v}^{\,C}_{20} + \vec{v}^{\,C}_{01} = (\dot{x} + R\dot{\psi}\cos\theta)\,\vec{\imath}_1 + (\dot{y} + R\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\vec{\jmath}_1$$

$$\vec{v}^{\,C}_{21} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x} + R\dot{\psi}\cos\theta = 0 \\ \dot{y} + R\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \end{cases}$$



$$\vec{\imath}_0 = \cos\theta\,\vec{\imath}_1 + \mathrm{sen}\,\theta\,\vec{\jmath}_1$$

Ligaduras holónomas y no holónomas

- Ligaduras holónomas
  - Geométricas bilaterales
  - Cinemáticas integrables
  - En ambos casos es posible encontrar funciones que expresan las coordenadas de la partículas del sistema en función de las coordenadas generalizadas y el tiempo

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_n, t) \qquad i = 1, \ldots, N$$

  - Si el tiempo no aparece explícitamente la ligadura es esclerónoma $\dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \vec{0}$
  - Si el tiempo aparece explícitamente la ligadura es reónoma $\dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \neq \vec{0}$
  - Basta con una ligadura reónoma para que el sistema sea considerado reónomo

- Ligaduras no holónomas
  - Geométricas unilaterales
  - Cinemáticas no integrables
  - No es posible encontrar funciones que expresan las coordenadas de la partículas del sistema en función de las coordenadas generalizadas y el tiempo
  - Si el tiempo no aparece explícitamente la ligadura es esclerónoma $$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \vec{0}$$
  - Si el tiempo aparece explícitamente la ligadura es reónoma $$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \neq \vec{0}$$
  - Basta con una ligadura reónoma para que el sistema sea considerado reónomo

Índice

Velocidades virtuales

- Velocidad real de un punto del sistema: $\vec{v}_i$
- Consideramos un sistema holónomo: $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_n, t)$
- Expresada en función de las velocidades generalizadas: $\dot{q}_k$

$$\vec{v}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

$$\vec{v}_i^{\,*} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

Velocidad virtual

$$\vec{v}_i^{\,arr} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

Velocidad de arrastre

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^{\,*} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \qquad i = 1, \ldots, N$$

- Las velocidades de arrastre son las debidas a los vínculos reónomos
- Las velocidades virtuales son las velocidades compatibles con los vínculos. Son las velocidades posibles si congelamos el tiempo
- En sistemas escleronómos, las velocidades virtuales y las posibles coinciden

$$\{\rho\,\mathrm{libre},\ \theta=\omega_0 t\}\quad n=1$$

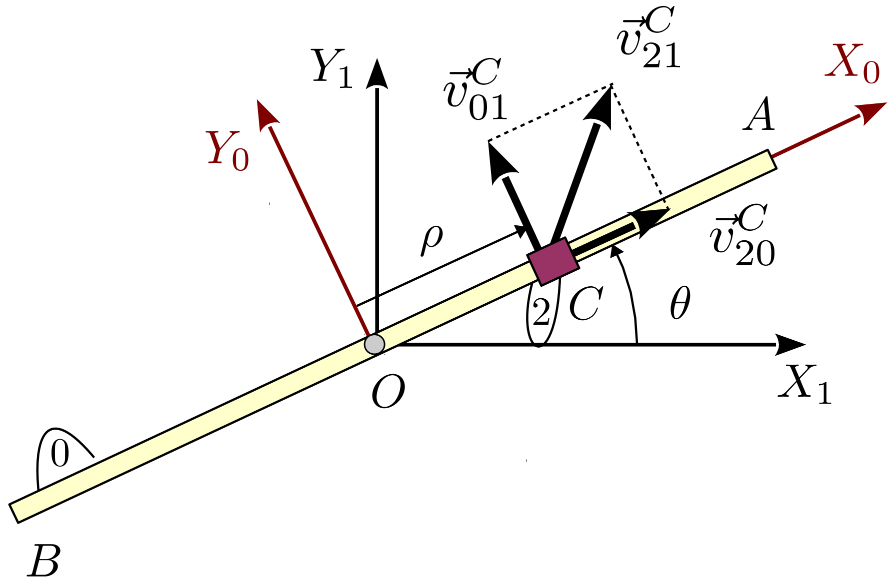
$$\vec{v}^{\,C}_{21}=\vec{v}^{\,C}_{20}+\vec{v}^{\,C}_{01}=\vec{v}^{\,*}_{C}+\vec{v}^{\,arr}_{C}$$

$$\{\rho=v_0 t,\ \theta\,\mathrm{libre}\}\quad n=1$$

$$\vec{v}^{\,C}_{21}=\vec{v}^{\,C}_{20}+\vec{v}^{\,C}_{01}=\vec{v}^{\,arr}_{C}+\vec{v}^{\,*}_{C}$$

$$\{\rho\,\mathrm{libre},\ \theta\,\mathrm{libre}\}\quad n=2$$

$$\vec{v}^{\,C}_{21}=\vec{v}^{\,*}_{C}$$



Desplazamientos virtuales

- Son los desplazamientos posibles de los puntos del sistema que sean compatibles con las ligaduras, a un tiempo congelado

$$\mathrm{d}\vec{r}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\mathrm{d}t = \delta\vec{r}_i + \mathrm{d}_t\vec{r}_i \quad i = 1, \ldots, N$$

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k$$

Desplazamiento virtual: $\delta\vec{r}_i = \vec{v}_i^{\,*}\mathrm{d}t$

$$\mathrm{d}_t\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\mathrm{d}t$$

Desplazamiento de arrastre: $\mathrm{d}_t\vec{r}_i = \vec{v}_i^{\,arr}\mathrm{d}t$

- En sistemas esclerónomos los desplazamientos virtuales y los posibles coinciden

- Las fuerzas aplicadas al sistema no cambian durante el desplazamiento virtual

- Consideramos sistemas de sólidos rígidos descritos por un conjunto de coordenadas generalizadas $\{q_1,\ldots, q_n\}$
- Un desplazamiento virtual del sistema es un conjunto de variaciones infinitesimales de las coordenadas $\{\delta q_1,\ldots, \delta q_n\}$
  - El desplazamiento virtual de cualquier punto de los sólidos puede expresarse en función de los δq_i

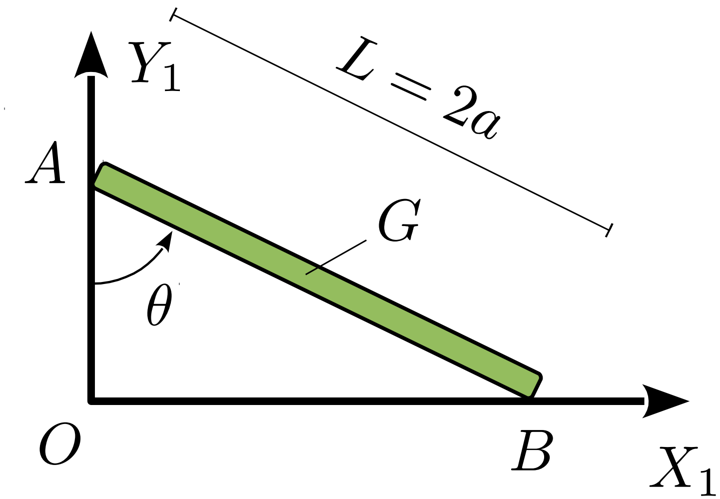
$$\{\theta\} \quad n = 1$$

$$\vec{r}_B = \overrightarrow{OB} = 2a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{\imath}_1$$

$$\delta\vec{r}_B = \frac{\partial \vec{r}_B}{\partial\theta}\delta\theta = (2a\cos\theta\,\vec{\imath}_1)\delta\theta$$

$$\vec{r}_G = \overrightarrow{OG} = a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{\imath}_1 + a\cos\theta\,\vec{\jmath}_1$$

$$\delta\vec{r}_G = \frac{\partial \vec{r}_G}{\partial\theta}\delta\theta = a(\cos\theta\,\vec{\imath}_1 - \,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{\jmath}_1)\delta\theta$$

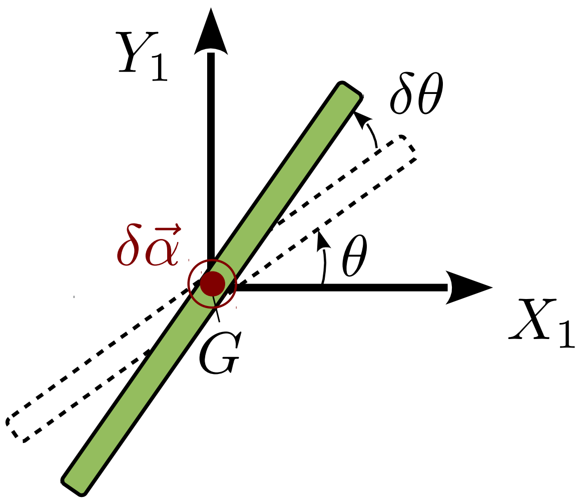


Desplazamientos virtuales de un sistema de sólidos rígidos

- Para sólidos rígidos también es interesante considerar rotaciones virtuales
- Una rotación virtual se representa por un vector paralelo al eje de la rotación, con sentido dado por la regla de la mano derecha, y con componente sobre el eje de giro dada por el ángulo girado
  - La rotación virtual puede expresarse en función de los δq_i

$$\{\theta\} \quad n = 1$$

$$\delta\vec{\alpha} = \delta\theta\,\vec{k}$$



Ligaduras ideales

- Un sistema está sometido a ligaduras ideales si el trabajo total realizado por ellas en un desplazamiento virtual del sistema es nulo

$$\delta W_{vin} = \sum_{i=1}^{M} \vec{\Phi}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

- Ejemplos de ligaduras ideales
  - Vínculos lisos
  - Vínculos rugosos estáticos (incluye rodadura sin deslizamiento)
  - Vínculo interno de rigidez en sólidos rígidos
- Ejemplos de ligaduras no ideales
  - Vínculos rugosos en régimen dinámico (con deslizamiento relativo)
  - Vínculos unilaterales

Índice

Principio de los trabajos (P.T.V.) virtuales para un sistema de partículas

Un sistema de partículas sometido a ligaduras ideales está en equilibrio si y sólo si el trabajo total realizado por las fuerzas aplicadas sobre el sistema es cero en cualquier desplazamiento virtual del sistema

$$\delta W = \sum_{i=1}^{M} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

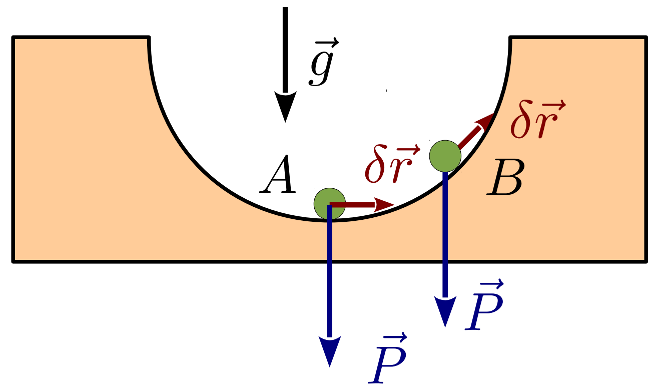
- Demostración a partir de la Segunda Ley de Newton

$$\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i = 0 \quad \forall\, i$$

$$\to \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

$$\to \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \cancelto{0}{\sum_{i=1}^{N} \vec{\Phi}_i \cdot \delta\vec{r}_i} = 0$$

$$\to \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$



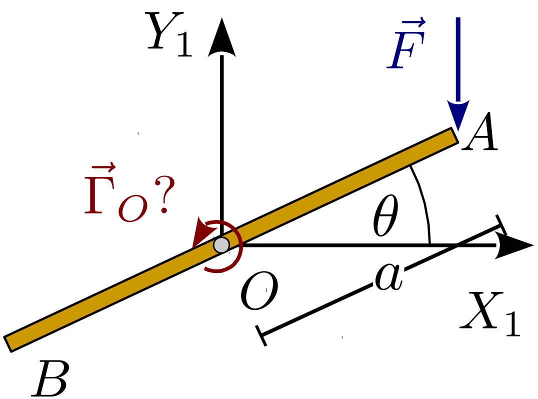
A es posición de equilibrio

B no es posición de equilibrio

Un sistema de sólidos rígidos sometido a ligaduras ideales está en equilibrio si y sólo si el trabajo total realizado por las fuerzas y momentos aplicados sobre el sistema es cero en cualquier desplazamiento virtual del sistema

$$\delta W = \sum_{i=1}^{M} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{j=1}^{P} \vec{M}_j \cdot \delta\vec{\theta}_j = 0$$

$\{\theta\} \quad n = 1$



$$\vec{r}_A = a\,(\cos\theta\,\vec{\imath}_1 + \operatorname{sen}\theta\,\vec{\jmath}_1)$$

$$\delta\vec{r}_A = \frac{\partial\vec{r}_A}{\partial\theta}\delta\theta = a\delta\theta\,(-\operatorname{sen}\theta\,\vec{\imath}_1 + \cos\theta\,\vec{\jmath}_1)$$

$$\vec{F}\cdot\delta\vec{r}_A = -aF\delta\theta\cos\theta$$

$$\vec{\theta} = \theta\,\vec{k}_1$$

$$\delta\vec{\theta} = \delta\theta\,\vec{k}_1$$

$$\vec{\Gamma}_O\cdot\delta\vec{\theta} = \Gamma_O\delta\theta$$

$$\delta W = \vec{F}\cdot\delta\vec{r}_A + \vec{\Gamma}_O\cdot\delta\vec{\theta} = (-aF\cos\theta + \Gamma_O)\delta\theta = 0 \to \Gamma_O = aF\cos\theta \to \vec{\Gamma}_O = aF\cos\theta\vec{k}_1$$

Principio de las potencias virtuales (P.P.V.)

- Es similar al P.T.V, pero se usan velocidades y rotaciones virtuales
- Para un sistema de partículas

Un sistema de partículas sometido a ligaduras ideales está en equilibrio si y sólo si la potencia total realizada por las fuerzas aplicadas sobre el sistema es cero en cualquier desplazamiento virtual del sistema

$$P = \sum_{i=1}^{M} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i^* = 0$$

- Para un sistema de sólidos rígidos

Un sistema de sólidos rígidos sometido a ligaduras ideales está en equilibrio si y sólo si la potencia total realizada por las fuerzas y momentos aplicados sobre el sistema es cero en cualquier desplazamiento virtual del sistema

$$P = \sum_{i=1}^{M} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i^* + \sum_{j=1}^{P} \vec{M}_j \cdot \vec{\omega}_j^* = 0$$

Índice

Fuerzas generalizadas

- Los desplazamientos y las rotaciones virtuales se pueden expresar en función de las coordenadas generalizadas para sistemas holónomos

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_n) \rightarrow \delta\vec{r}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\, \delta q_k$$

$$\vec{\theta}_j = \vec{\theta}_j(q_1, \ldots, q_n) \rightarrow \delta\vec{\theta}_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{\theta}_j}{\partial q_k}\, \delta q_k$$

Fuerzas generalizadas

- Sustituimos en el Principio de los Trabajos Virtuales

$$\delta W = \sum_{i=1}^{M} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{j=1}^{P} \vec{M}_j \cdot \delta\vec{\theta}_j = 0$$

$$\delta W = \sum_{i=1}^{M} \vec{F}_i \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\,\delta q_k + \sum_{j=1}^{P} \vec{M}_j \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{\theta}_j}{\partial q_k}\,\delta q_k$$

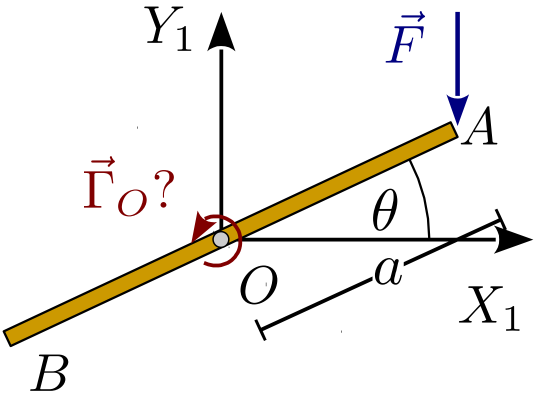
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{M} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\,\delta q_k + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{P} \vec{M}_j \cdot \frac{\partial \vec{\theta}_j}{\partial q_k}\,\delta q_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{M} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + \sum_{j=1}^{P} \vec{M}_j \cdot \frac{\partial \vec{\theta}_j}{\partial q_k} \right)}_{Q_k} \delta q_k$$

- El principio de los trabajos virtuales se expresa

$$\delta W = \sum_{k=1}^{n} Q_k \cdot \delta q_k = 0 \qquad Q_k = \sum_{i=1}^{M} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + \sum_{j=1}^{P} \vec{M}_j \cdot \frac{\partial \vec{\theta}_i}{\partial q_k}$$

  - En general no son fuerzas como en dinámica
  - Cada grado de libertad lleva asociada una fuerza generalizada, que puede mezclar varias fuerzas y momentos físicos aplicados en puntos diferentes del sólido



$$\{\theta\} \quad n = 1$$

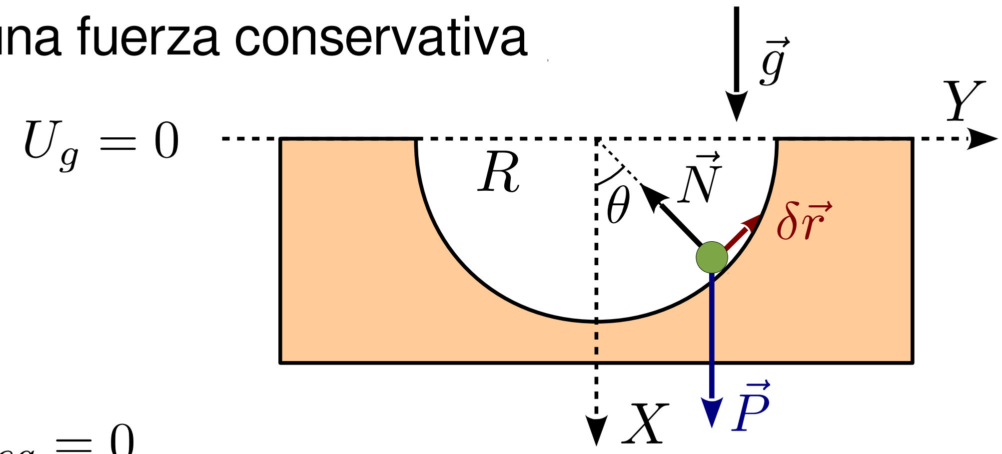
$$\vec{r}_A = a\,(\cos\theta\,\vec{\imath}_1 + \operatorname{sen}\theta\,\vec{\jmath}_1) \qquad \vec{\theta} = \theta\,\vec{k}_1$$

$$Q_\theta = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}_A}{\partial \theta} + \vec{\Gamma}_O \cdot \frac{\partial \vec{\theta}}{\partial \theta} = -aF\cos\theta + \Gamma_O$$

$$\delta W = Q_\theta \delta\theta = 0 \Longrightarrow (-aF\cos\theta + \Gamma_O)\delta\theta = 0 \Longrightarrow \vec{\Gamma}_O = aF\cos\theta\,\vec{k}_1$$

Índice

- Supongamos una partícula sometido a una fuerza conservativa



- P.T.V. $\{\theta\}$ $n = 1$

$$\vec{r}(\theta) = R\cos\theta\,\vec{\imath} + R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\delta\vec{r}(\theta) = (-R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{\imath} + R\cos\theta\,\vec{\jmath})\,\delta\theta$$

$$\vec{P}\cdot\delta\vec{r} = 0 \Longrightarrow -mgR\,\mathrm{sen}\,\theta_{eq} = 0 \Longrightarrow \theta_{eq} = 0$$

- Al ser una fuerza conservativa podemos asociarle una energía potencial

$$U_g = -mgR\cos\theta = U(\theta) \qquad \delta U_g = -\delta W_g = -\vec{P}\cdot\delta\vec{r}$$

- El P.T.V. puede reinterpretarse como minimización de la energía potencial

$$\vec{P}\cdot\delta\vec{r} = 0 \Longleftrightarrow \delta U_g = 0 \Longrightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)\delta\theta = 0 \Longrightarrow \frac{\partial U}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = 0 \Longrightarrow mgR\,\mathrm{sen}\,\theta_{eq} = 0 \Longrightarrow \theta_{eq} = 0$$

Fuerzas conservativas: condición de equilibrio

- Si un sistema está sometido a varias fuerzas conservativas, definimos una energía potencial total como la suma de la energía asociada a cada fuerza

$$U = U(q_1, \ldots, q_n, t)$$

- En este caso, el P.T.V. equivale a decir que las posiciones de equilibrio corresponden a las configuraciones que hacen extremal la energía potencial total

$$\delta U = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_k} \delta q_k = 0$$

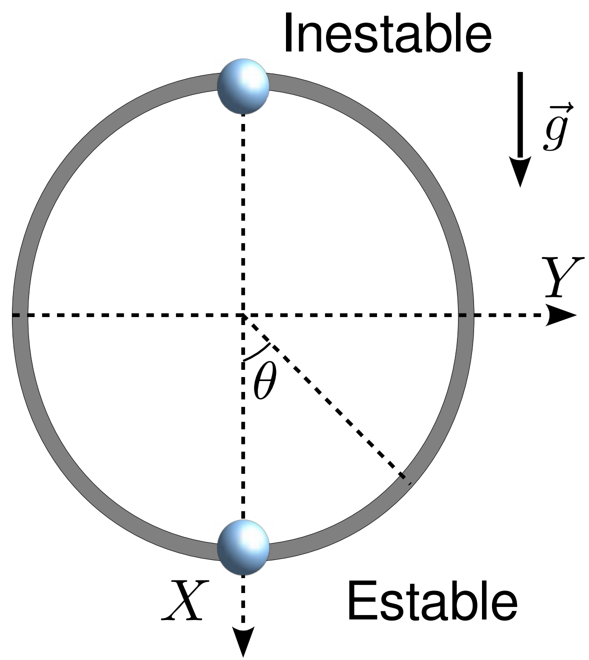
- Si las *n* coordenadas generalizadas son independientes la condición de equilibrio es

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial q_k} = 0 \qquad k = 1, \ldots, n}$$

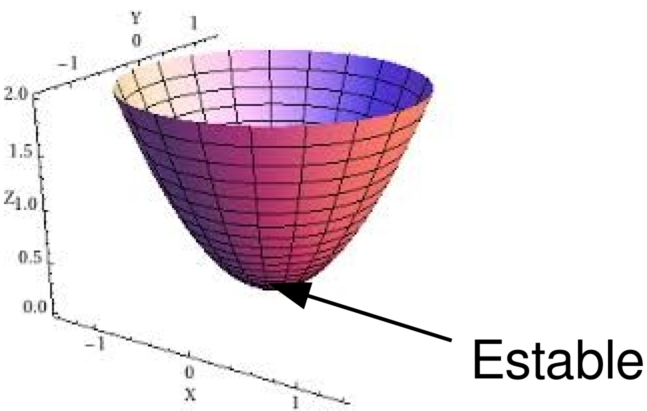
  - Obtenemos *n* ecuaciones para *n* incógnitas: los valores de equilibrio de q_k

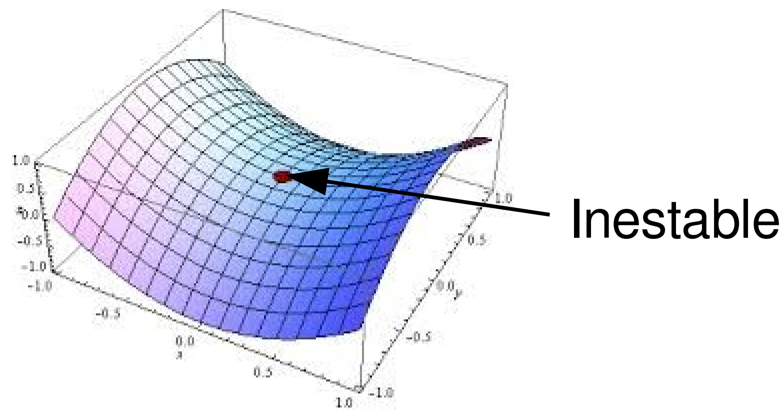
- La condición de equilibrio encuentra extremos de U

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow mgR \operatorname{sen} \theta_{eq} = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta_{eq} = 0 \\ \theta_{eq} = \pi \end{array} \right.$$



- Para que el equilibrio sea estable la energía potencial debe ser mínima
- En sistemas con varios grados de libertad debe ser un mínimo absoluto para ser estable





Fuerzas conservativas y no conservativas a la vez

- Si sobre el sistema actúan fuerzas y/o pares no conservativos, los elementos no conservativos se agrupan en fuerzas generalizadas no conservativas

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k^{NC} \qquad k = 1, ..., n$$

- Las fuerzas generalizadas no conservativas son

$$Q_k^{NC} = \sum_{i=1}^{M} \vec{F}_i^{NC} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + \sum_{j=1}^{P} \vec{M}_j^{NC} \cdot \frac{\partial \vec{\theta}_i}{\partial q_k}$$