

Tema 5: Tensor de Inercia

Mecánica Racional, 2º, Grado en Ingeniería Civil

Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingenieros

Universidad de Sevilla

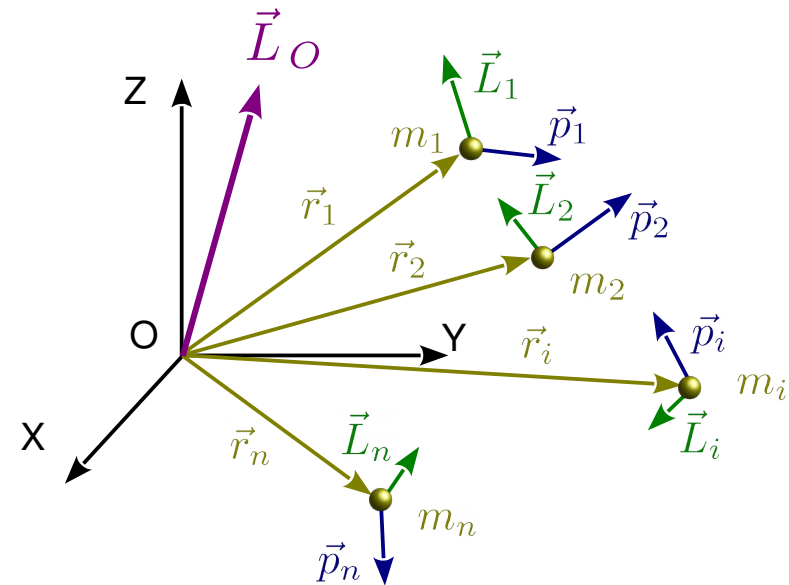
- **Introducción**
- Momentos de inercia de cuerpos continuos
- Tensor de inercia
- Cálculo con diadas
- Teorema de Steiner
- Momento de inercia respecto a un eje
- Ejes principales de inercia
- Algunos ejemplos de tensores de inercia

- El momento angular (o cinético) del sistema respecto a un punto es la suma de los momentos angulares de cada una de las partículas que lo componen respecto al mismo punto

$$\vec{L}_O^{sis} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_{O_i} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$$

- Para un sistema continuo

$$\vec{L}_O^{sis} = \int d\vec{L}_O = \int \vec{r} \times d\vec{p} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm$$

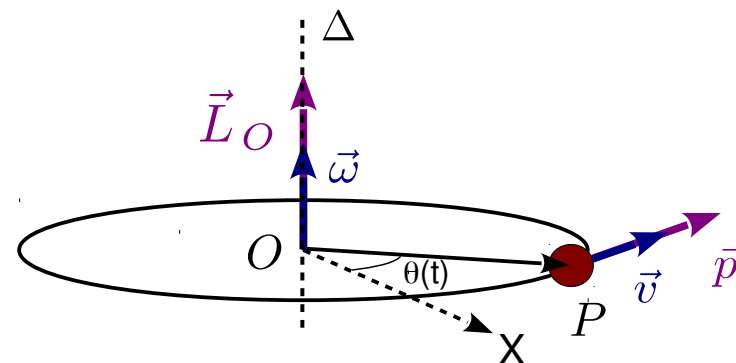


- Movimiento circular de una partícula

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = R \vec{u}_r$$

$$\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta = R \omega \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_T = R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta = R \alpha \vec{u}_\theta$$



$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k} \quad \vec{\alpha} = \ddot{\theta} \vec{k}$$

- Momento angular de la partícula

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP} \times (m\vec{v}) = mR^2 \dot{\theta} \vec{k} = mR^2 \omega \vec{k}$$

- Momento de inercia de la partícula respecto a un eje

$$\vec{L}_O = I \vec{\omega} \quad I = mR^2$$

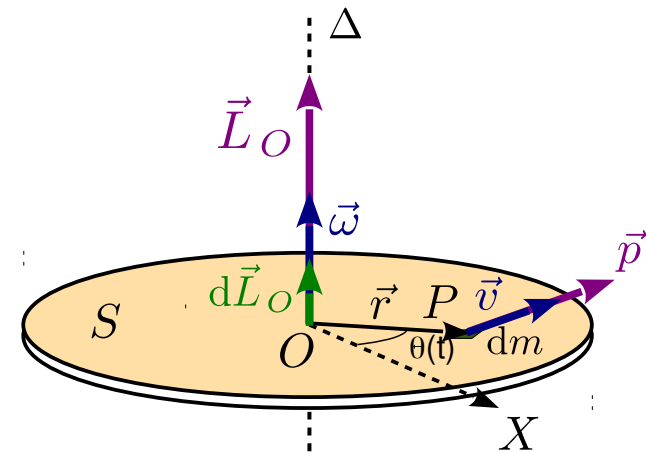
El momento angular describe el movimiento de rotación alrededor de Δ

- Rotación de un disco

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = r \vec{u}_r$$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP} = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$



- Momento angular del disco

$$\vec{L}_O = \int_S d\vec{L}_O = \int_S dm \overrightarrow{OP} \times \vec{v} = \int_S dm r^2 \dot{\theta} \vec{k} = \left(\int_S dm r^2 \right) \vec{\omega}$$

- Momento de inercia del disco respecto al eje Δ

$$\vec{L}_O = I_O \vec{\omega} \quad I_O = \int_S dm r^2$$

¿Son siempre paralelos?

Rotación de un sólido alrededor de un eje fijo: eje no de simetría

- Vector rotación $\vec{\omega} = \omega(t) \vec{k}$

- Momento angular respecto a O

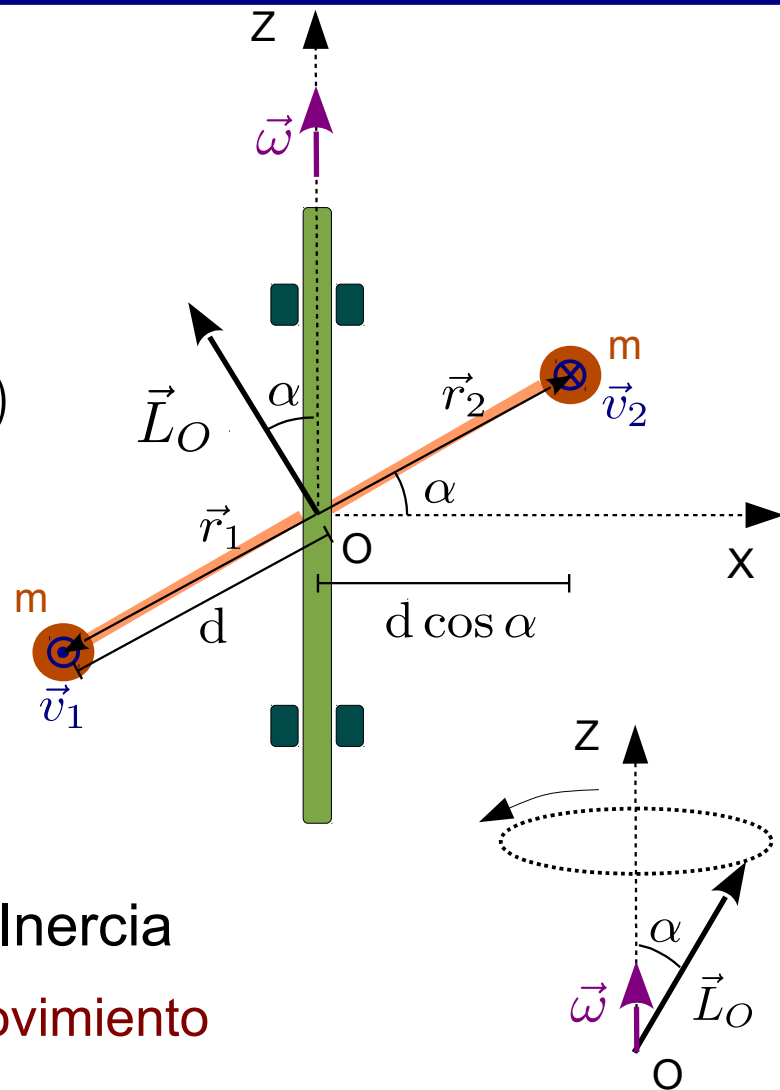
$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = d \cos \alpha \omega$$

$$\vec{L}_O = 2m\omega d^2 \cos \alpha (-\text{sen } \alpha \vec{i} + \text{cos } \alpha \vec{k})$$

- \vec{L}_O y ω NO son paralelos
- Se puede construir una relación lineal

$$\vec{L}_O = \overset{\leftrightarrow}{I}_O \cdot \vec{\omega}$$

- $\overset{\leftrightarrow}{I}_O$ es el **Tensor de Inercia**, o Matriz de Inercia
 - Su papel es similar al de la masa en el movimiento lineal



- Introducción
- Momentos de inercia de cuerpos continuos
- Tensor de inercia
- Cálculo con diadas
- Teorema de Steiner
- Momento de inercia respecto a un eje
- Ejes principales de inercia
- Algunos ejemplos de tensores de inercia

- Momentos de inercia respecto a los planos cartesianos

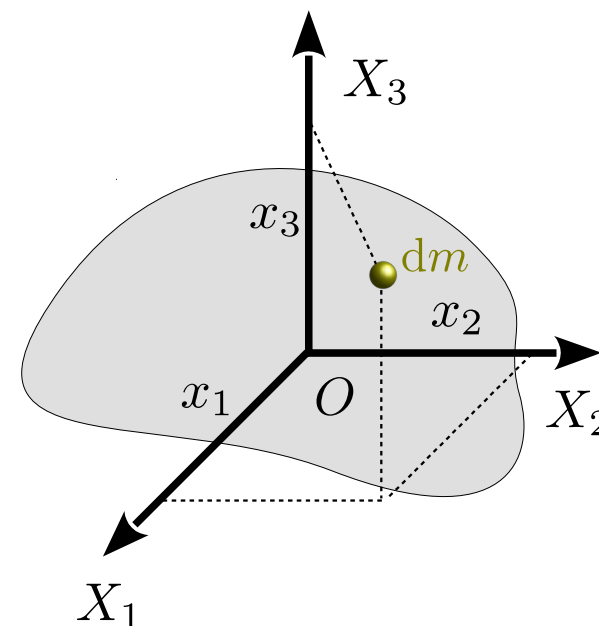
$$I_1 = \int dm x_1^2 \qquad I_2 = \int dm x_2^2 \qquad I_3 = \int dm x_3^2$$

- Momentos de inercia respecto a los ejes cartesianos

$$I_{11} = \int dm (x_2^2 + x_3^2)$$

$$I_{22} = \int dm (x_1^2 + x_3^2)$$

$$I_{33} = \int dm (x_1^2 + x_2^2)$$



- Momento de inercia respecto del origen

$$I_O = \int dm (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \int dm r^2$$

- Relaciones entre los momentos de inercia

$$I_{11} = I_2 + I_3$$

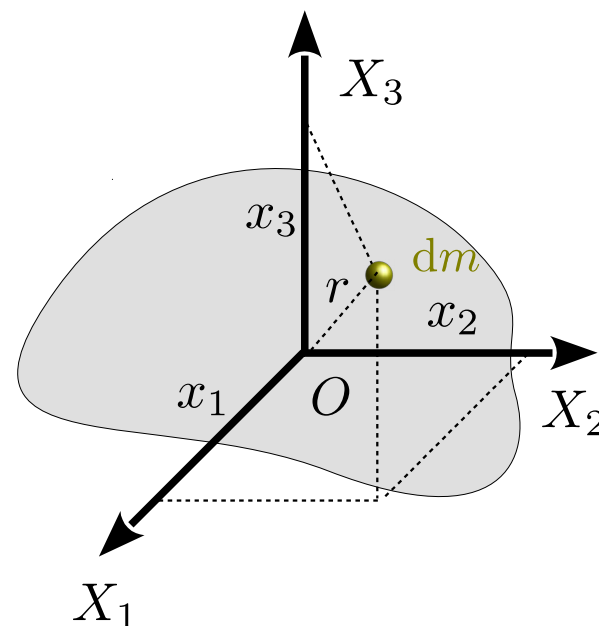
$$I_{22} = I_1 + I_3$$

$$I_{33} = I_1 + I_2$$

$$I_O = (I_{11} + I_{22} + I_{33})/2$$

- También se usa la notación con OXYZ

$$1 \rightarrow x \quad 2 \rightarrow y \quad 3 \rightarrow z$$



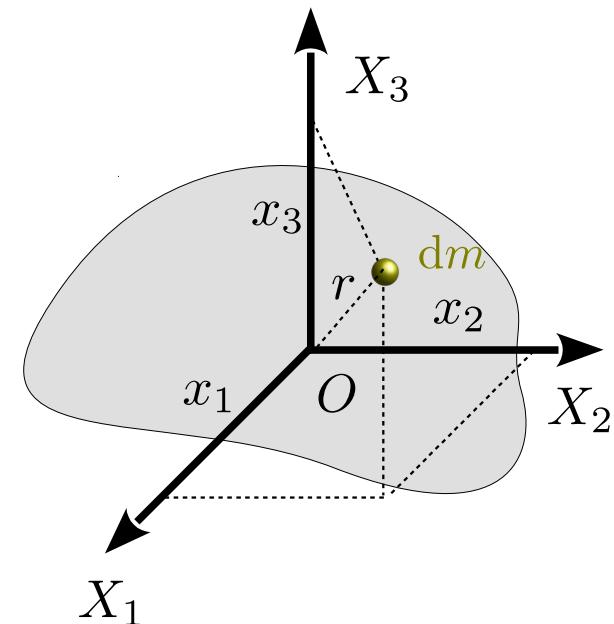
- Productos de inercia

$$P_{12} = \int dm x_1 x_2$$

$$P_{13} = \int dm x_1 x_3$$

$$P_{23} = \int dm x_2 x_3$$

- Pueden ser negativos
- Los momentos son siempre positivos



- Introducción
- Momentos de inercia de cuerpos continuos
- **Tensor de inercia**
- Cálculo con diadas
- Teorema de Steiner
- Momento de inercia respecto a un eje
- Ejes principales de inercia
- Algunos ejemplos de tensores de inercia

$$\overset{\leftrightarrow}{I}_O \equiv \begin{bmatrix} I_{11} & -P_{12} & -P_{13} \\ -P_{21} & I_{22} & -P_{23} \\ -P_{31} & -P_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$$

- Es simétrico $P_{ij} = P_{ji}$
- Es diferente para cada punto del sólido (campo tensorial)
- Es independiente de la base que se use
 - Aunque los coeficientes dependen de la base que se use
- Expresión en forma de índices

$$I_{ij} = \int dm (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \quad i, j = 1, 2, 3$$

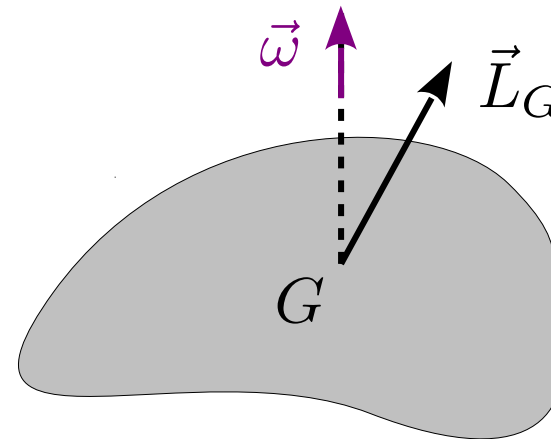
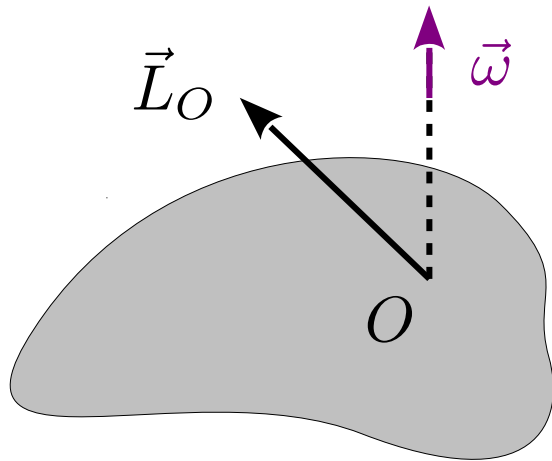
- Dado un sólido con un punto fijo O y vector rotación $\vec{\omega}$

$$\vec{L}_O = \overset{\leftrightarrow}{I}_O \cdot \vec{\omega}$$

- También es cierto respecto al CM, aunque no sea fijo

$$\vec{L}_G = \overset{\leftrightarrow}{I}_G \cdot \vec{\omega}$$

- En general el momento angular y el vector rotación no son paralelos



- Introducción
- Momentos de inercia de cuerpos continuos
- Tensor de inercia
- **Cálculo con diadas**
- Teorema de Steiner
- Momento de inercia respecto a un eje
- Ejes principales de inercia
- Algunos ejemplos de tensores de inercia

- Vector y su traspuesto

$$\vec{a} = [a_1, a_2, a_3] \qquad \vec{a}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

- Las dos formas son equivalentes

- Si es necesario, se indica la base con un subíndice

$$\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]_1$$

- Producto escalar de dos vectores

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}^T = [a_1, a_2, a_3] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

- Producto diádico de dos vectores

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a}^T \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} [b_1, b_2, b_3] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$$

- No hay puntos entre los vectores
 - Es un tensor
 - No es conmutativo
- Producto escalar de un producto diádico por un vector

$$(\vec{a}\vec{b}) \cdot \vec{c}^T = (\vec{a}\vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

$$\vec{c} \cdot (\vec{a}\vec{b}) = (\vec{c} \cdot \vec{a}) \vec{b}$$

- Tensor unidad

$$\overset{\leftrightarrow}{U} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\leftrightarrow}{U} \cdot \vec{a}^T = \overset{\leftrightarrow}{U} \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot \overset{\leftrightarrow}{U} = \vec{a}$$

- Integral de una matriz

$$\left(\int dm \overset{\leftrightarrow}{A} \right)_{ij} = \int dm \left(\overset{\leftrightarrow}{A}_{ij} \right)$$

- Tensor de inercia con diadas $\vec{r} = [x_1, x_2, x_3]$

$$\overset{\leftrightarrow}{I}_O = \overset{\leftrightarrow}{U} \int dm r^2 - \int dm \vec{r} \vec{r}$$

- Introducción
- Momentos de inercia de cuerpos continuos
- Tensor de inercia
- Cálculo con diadas
- Teorema de Steiner
- Momento de inercia respecto a un eje
- Ejes principales de inercia
- Algunos ejemplos de tensores de inercia

- Para momentos de inercia

$$I_{ii}(A) = I_{ii}(G) + M d_{ii}^2$$

- Para productos de inercia

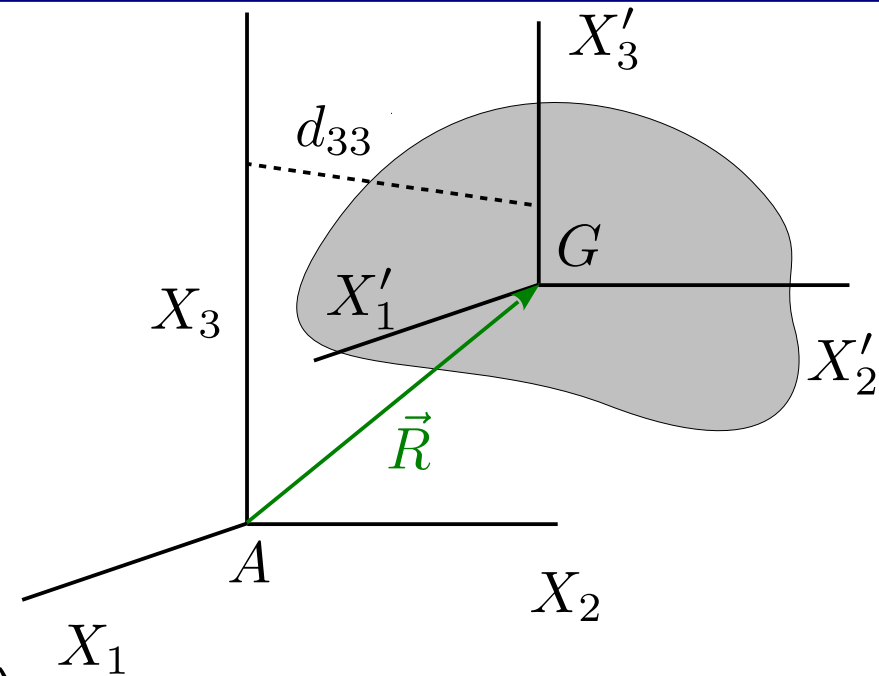
$$P_{ij}(A) = P_{ij}(G) + M R_i R_j$$

- Generalizado (para el tensor de inercia)

$$I_{ij}(A) = I_{ij}(G) + M [R^2 \delta_{ij} - R_i R_j]$$

$$\overset{\leftrightarrow}{I}_A = \overset{\leftrightarrow}{I}_G + M [R^2 \overset{\leftrightarrow}{U} - \vec{R} \vec{R}]$$

- El sentido de \mathbf{R} no afecta al resultado



$$\vec{R} = \overrightarrow{AG} = [R_1, R_2, R_3]_{\{X_1 X_2 X_3\}}$$

- Introducción
- Momentos de inercia de cuerpos continuos
- Tensor de inercia
- Cálculo con diadas
- Teorema de Steiner
- **Momento de inercia respecto a un eje**
- Ejes principales de inercia
- Algunos ejemplos de tensores de inercia

- Momento de inercia respecto a un eje

$$I_{\Delta}(O) = \int dm a^2(\vec{r})$$

- Teorema de los ejes paralelos

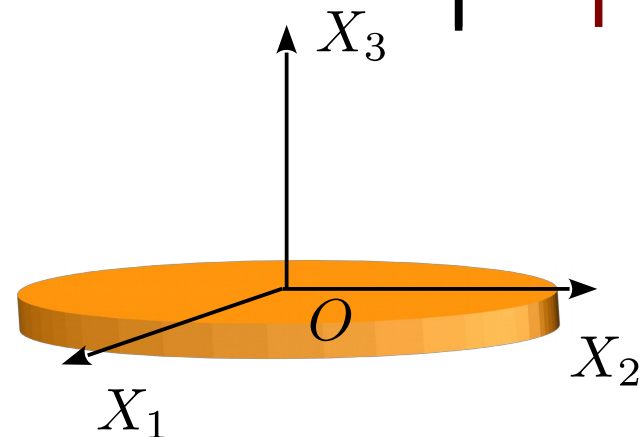
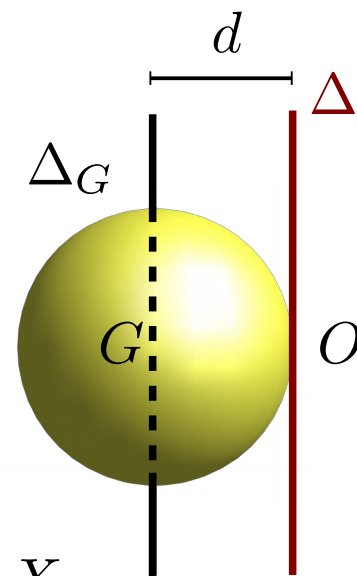
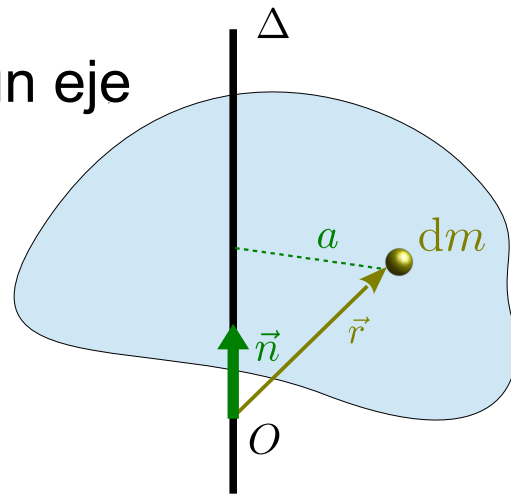
$$I_{\Delta}(O) = I_{\Delta}(G) + M d^2$$

- $I_{\Delta}(O)$ es un eje paralelo a $I_{\Delta}(G)$ y d es la distancia entre ellos

- Teorema de los ejes perpendiculares

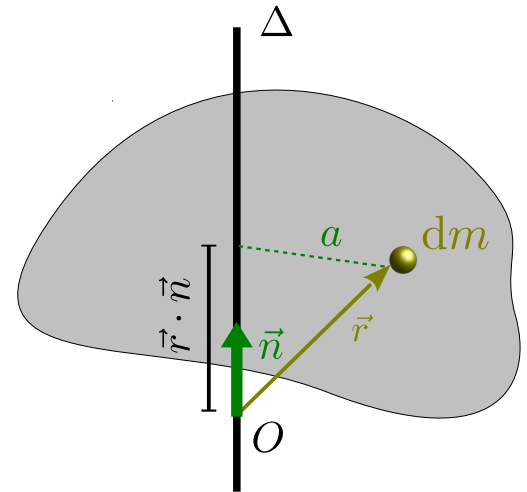
$$I_{33}(O) = I_{11}(O) + I_{22}(O)$$

- Sólo para figuras planas



- Momento respecto a un eje cualquiera en función del tensor de inercia

$$I_{\vec{n}}(O) = \vec{n} \cdot \overset{\leftrightarrow}{I}_O \cdot \vec{n}^T = \vec{n} \cdot \overset{\leftrightarrow}{I}_O \cdot \vec{n}$$



▪ Demostración

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \overset{\leftrightarrow}{I}_O \cdot \vec{n} &= \vec{n} \cdot \overset{\leftrightarrow}{U} \cdot \vec{n} \int dm r^2 - \int dm \vec{n} \cdot \vec{r} \vec{r} \cdot \vec{n} \\ &= \int dm (r^2 - (\vec{r} \cdot \vec{n})^2) \\ &= \int dm a^2 \end{aligned}$$

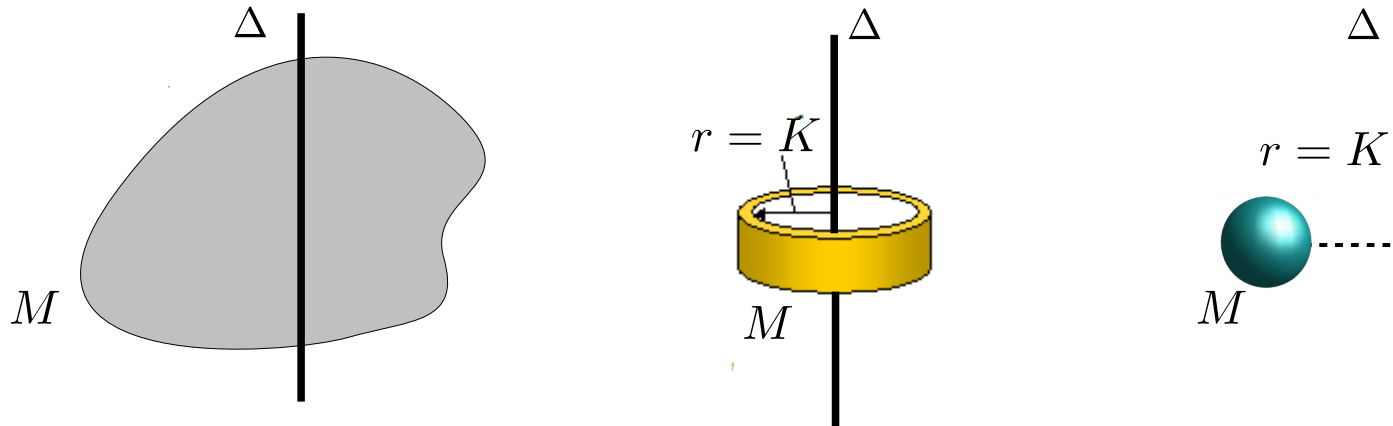
$$\vec{n} \cdot \overset{\leftrightarrow}{U} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot (\overset{\leftrightarrow}{U} \cdot \vec{n}) = \vec{n} \cdot \vec{n} = 1$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} \vec{r}) \cdot \vec{n} = (\vec{n} \cdot \vec{r})(\vec{r} \cdot \vec{n}) = (\vec{r} \cdot \vec{n})^2$$

- Radio de giro de un sólido respecto a un eje Δ

$$K = \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{M}}$$

- Una masa puntual M situada a una distancia K del eje, o una cáscara cilíndrica de masa M y radio K , tienen el mismo momento de inercia respecto al eje que el sólido



- Se usa para dar el momento de inercia respecto a un eje de sólidos con forma complicada

$$K \implies I_{\Delta} = MK^2$$

- Introducción
- Momentos de inercia de cuerpos continuos
- Tensor de inercia
- Cálculo con diadas
- Teorema de Steiner
- Momento de inercia respecto a un eje
- Ejes principales de inercia
- Algunos ejemplos de tensores de inercia

- Los coeficientes de la matriz de inercia dependen de la base que se use
- La matriz de inercia es simétrica con coeficientes reales
 - Es diagonalizable y los autovalores son reales
- Siempre se puede encontrar un sistema de ejes perpendiculares en el cual la matriz de inercia es diagonal

$$\overset{\leftrightarrow}{I}_O \equiv \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}_{\vec{u}_i} \equiv \begin{bmatrix} I_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & I_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & I_{33}^* \end{bmatrix}_{\vec{u}_i^*}$$

- I_{ii}^* son los autovalores de la matriz: **momentos principales de inercia**
- \vec{u}_i^* son los autovectores de la matriz: **direcciones principales de inercia**

- Los autovectores son los ejes principales de inercia (o direcciones de inercia)
 - Si el cuerpo gira en torno a un eje principal de inercia, el momento angular y el vector rotación son paralelos

$$\vec{I}_O \cdot (\omega \vec{u}_1^*) = \begin{bmatrix} I_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & I_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & I_{33}^* \end{bmatrix}_{\vec{u}_i^*} \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\vec{u}_i^*} = I_{11}^* (\omega \vec{u}_1^*)$$

$$\vec{I}_O \cdot (\omega \vec{u}_2^*) = \begin{bmatrix} I_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & I_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & I_{33}^* \end{bmatrix}_{\vec{u}_i^*} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix}_{\vec{u}_i^*} = I_{22}^* (\omega \vec{u}_2^*)$$

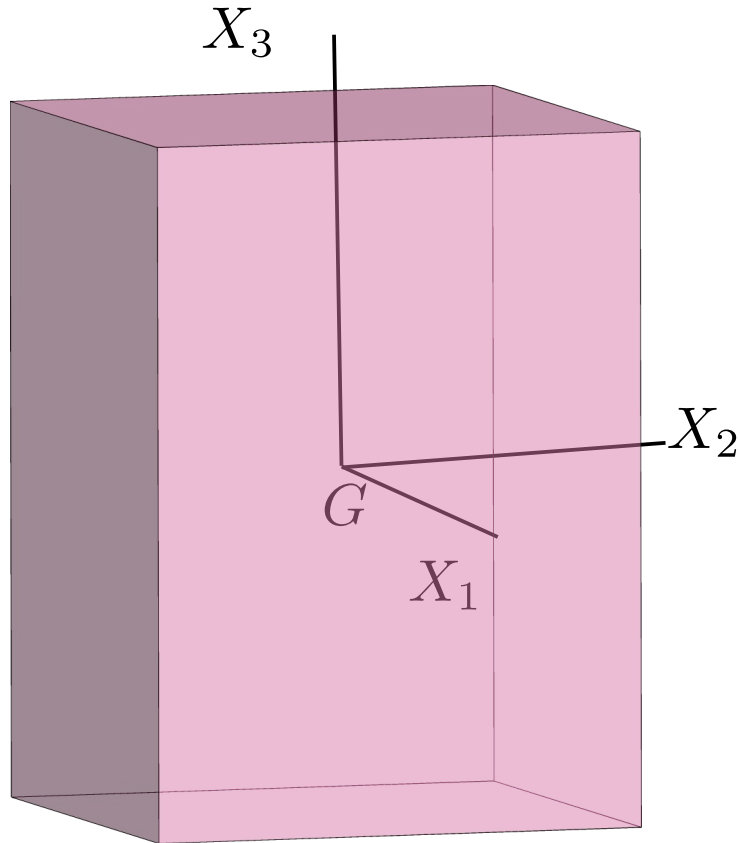
$$\vec{I}_O \cdot (\omega \vec{u}_3^*) = \begin{bmatrix} I_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & I_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & I_{33}^* \end{bmatrix}_{\vec{u}_i^*} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}_{\vec{u}_i^*} = I_{33}^* (\omega \vec{u}_3^*)$$

- Si \mathbf{u}_k es dirección principal de inercia en A entonces $P_{ik}(A) = 0 \quad \forall i$
- Todo eje baricentral que es E.P.I. en un punto lo es en todos
- Todo eje que es E.P.I. en dos o mas puntos es baricentral
 - Un eje baricentral es E.P.I. en un todos sus puntos o en ninguno
 - Un eje no baricentral es E.P.I. en ningún punto o sólo en uno
- Todo eje perpendicular a un plano de simetría es E.P.I. en el punto de corte
- Todo eje de simetría es E.P.I. en todos sus puntos
- Sólo para sólidos planos
 - Todo eje perpendicular al plano del sólido es E.P.I. en el punto de corte
 - Si A es un punto del sólido y AX_3 la dirección perpendicular se tiene

$$\overset{\leftrightarrow}{I}_A = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \quad I_{33} = I_{11} + I_{22}$$

- Introducción
- Momentos de inercia de cuerpos continuos
- Tensor de inercia
- Cálculo con diadas
- Teorema de Steiner
- Momento de inercia respecto a un eje
- Ejes principales de inercia
- Algunos ejemplos de tensores de inercia

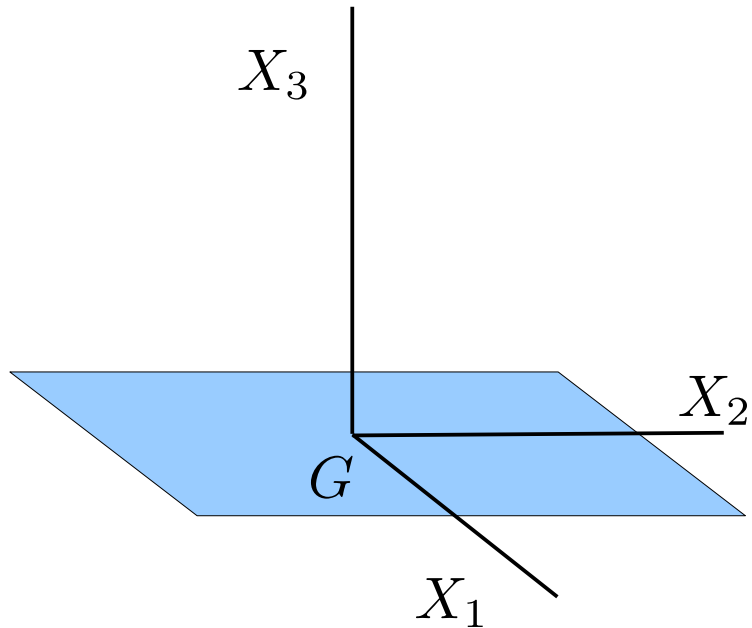
- Paralelepípedo con tres caras diferentes



$$\vec{I}_G = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

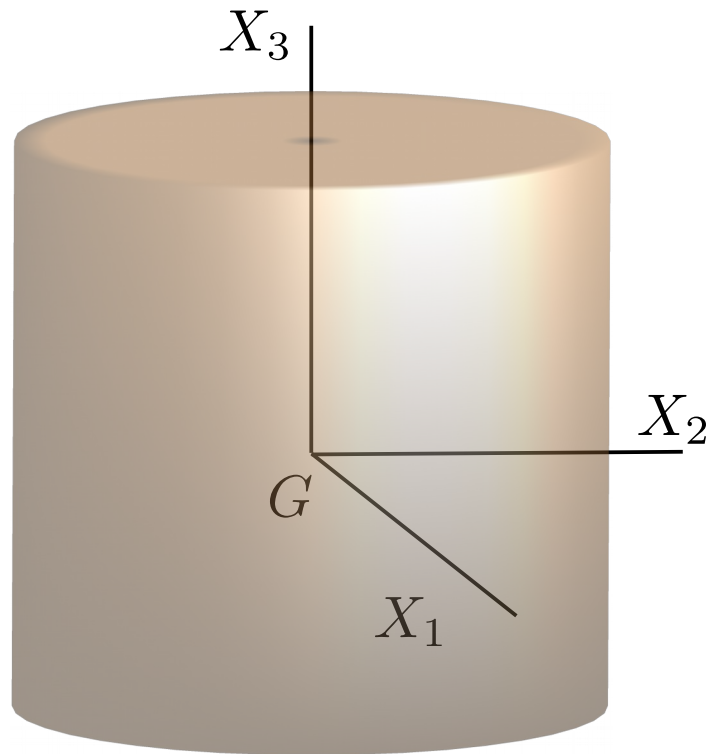
- Para un cubo $I_{11} = I_{22} = I_{33}$

- Placa rectangular



$$\vec{I}_G = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

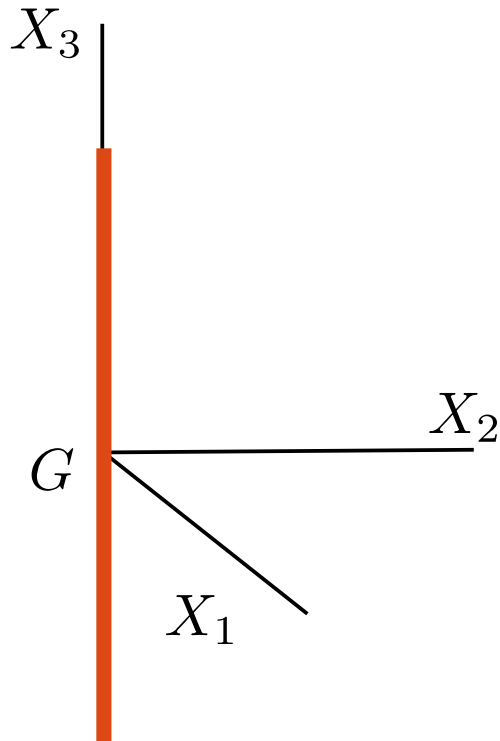
■ Cilindro



$$\vec{I}_G = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{11} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

- Hay un autovalor doble
- Todas las direcciones perpendiculares a X_3 son E.P.I.

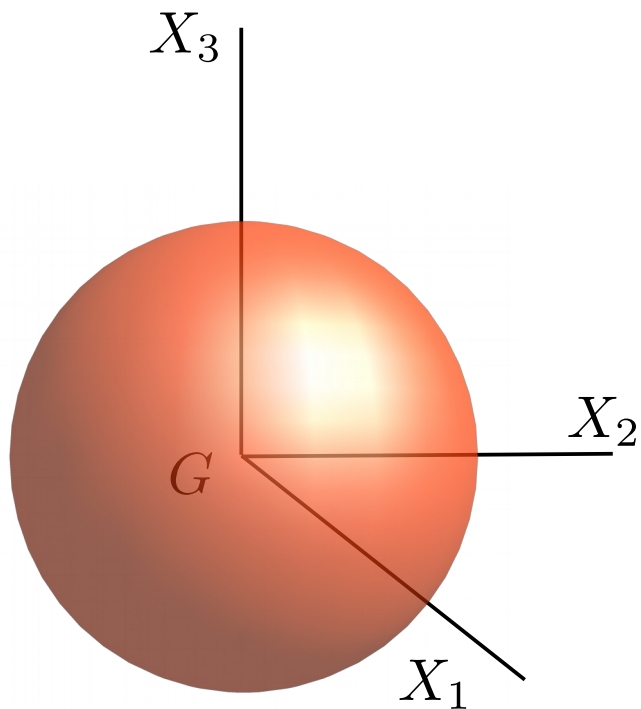
- Varilla de grosor despreciable



$$\vec{I}_G = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Es un caso degenerado: $I_{33}=0$
- Todas las direcciones perpendiculares a X_3 son E.P.I.
- Sólo tiene 5 grados de libertad

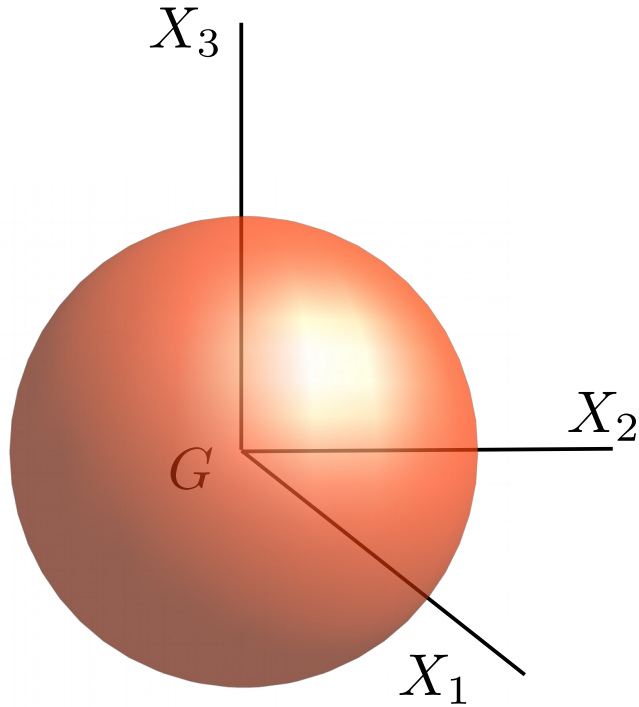
- Esfera



$$\vec{I}_G = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{11} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} \end{bmatrix}$$

- Los tres momentos principales son iguales
- Todas las direcciones son E.P.I. en G

- Utilizamos simetrías



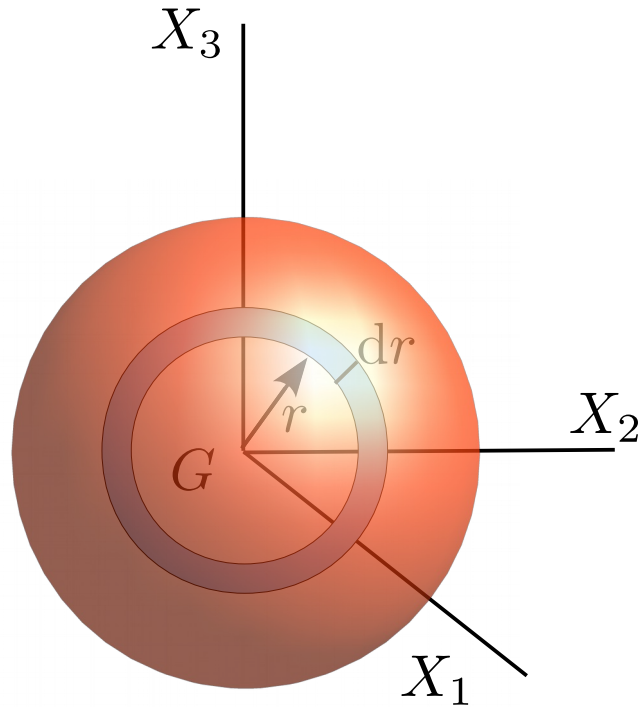
$$\left. \begin{aligned} I_G &= (I_{11} + I_{22} + I_{33})/2 \\ I_{11} &= I_{22} = I_{33} \end{aligned} \right| \implies I_{11} = 2I_G/3$$

$$I_G = \int_M dm R^2 = R^2 \int dm = MR^2$$

$$I_{11} = \frac{2}{3}MR^2$$

$$\vec{I}_G = \frac{2}{3}MR^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Utilizamos simetrías



$$\rho_M = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

$$\left. \begin{aligned} I_G &= (I_{11} + I_{22} + I_{33})/2 \\ I_{11} &= I_{22} = I_{33} \end{aligned} \right| \implies I_{11} = 2I_G/3$$

$$I_G = \int_M dm r^2$$

$$dm = \rho_M dV = \rho_M 4\pi r^2 dr$$

$$I_G = \int_0^R dr \rho_M 4\pi r^4 = \frac{3}{5} MR^2$$

$$I_{11} = \frac{2}{5} MR^2$$

$$\vec{I}_G = \frac{2}{5} MR^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$