



Tema 10: Dinámica analítica

Mecánica Racional, 2º, Grado en Ingeniería Civil

Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

- Principio de d'Alembert
- Ecuaciones de Lagrange
- Sistemas conservativos
- Fuerzas generalizadas para sólidos rígidos
- Lagrangiana
- Teoremas de conservación
- Función de Hamilton
- Aplicación del Principio de Liberación
- Multiplicadores de Lagrange
 - Ligaduras geométricas
 - Ligaduras cinemáticas

Principio de d'Alembert

- Tenemos un sistema de N partículas sometidas a fuerzas aplicadas y ligaduras ideales
- Para cada partícula se cumple la 2ª Ley de Newton

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{\Phi}_i \quad \longrightarrow \quad \vec{F}_i + \vec{\Phi}_i - m_i \vec{a}_i = \vec{0}$$

$\vec{F}_i$: Resultante de las fuerzas activas $\vec{\Phi}_i$: Resultante de las fuerzas de ligadura ideales

- Multiplicamos por un desplazamiento virtual de la partícula

$$(\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

- Sumamos para todas las partículas

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i \cdot \vec{r}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \text{Principio de d'Alembert}$$

- Principio de d'Alembert
- Ecuaciones de Lagrange
- Sistemas conservativos
- Fuerzas generalizadas para sólidos rígidos
- Lagrangiana
- Teoremas de conservación
- Función de Hamilton
- Aplicación del Principio de Liberación
- Multiplicadores de Lagrange
 - Ligaduras geométricas
 - Ligaduras cinemáticas

- Consideramos un sistema de N partículas holónomo con n coordenadas generalizadas **independientes**

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_k, t) \quad i = 1, \dots, N \quad k = 1, \dots, n$$

- Tomamos el Principio de d'Alembert

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ \delta \vec{r}_i &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \end{aligned} \right| \Rightarrow \begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k &= 0 \\ \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right] \delta q_k &= 0 \\ \sum_{k=1}^n \left[\underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}}_{Q_k} - \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}}_{P_k} \right] \delta q_k &= 0 \end{aligned}$$

- Las n coordenadas generalizadas son **independientes**

$$\sum_{k=1}^n [Q_k - P_k] \delta q_k = 0 \quad \longrightarrow \quad P_k = Q_k \quad k = 1, \dots, n$$

- Son n ecuaciones diferenciales, una por coordenada generalizada

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

Fuerza generalizada de la coordenada k

$$P_k = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

Término de inercia generalizado de la coordenada k

- Vamos expresar los términos de inercia como derivadas de la energía cinética

$$P_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \quad k = 1, \dots, n$$

$$P_k = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

- Para una partícula

$$m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right)$$

- Vamos a ver las dos expresiones coloreadas

- Manipulamos $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$

- El sistema es holónomo $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_k, t) \quad k = 1, \dots, n$

- Velocidad de la partícula

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \boxed{\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}} \dot{q}_j + \boxed{\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}}$$

Sólo pueden aparecer las q_k y t

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}(q_k, t) \\ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}(q_k, t) \end{array} \right.$$

- Entonces

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

- Manipulamos $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right)$

- El sistema es holónomo $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_k, t) \quad k = 1, \dots, n$

- Las derivadas parciales son funciones de las q_k y t $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}(q_k, t)$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)$$

- Entonces

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k}$$

- Retomamos el término de inercia de una partícula

$$\begin{aligned}
 m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \\
 &= \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T_i}{\partial q_k}
 \end{aligned}$$

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

- Sumando para todas las partículas

$$P_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \quad k = 1, \dots, n$$

$$T = \sum_{i=1}^n T_i$$

- En un sistema **holónomo** con coordenadas generalizadas **independientes**

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad k = 1, \dots, n$$

- Obtenemos una ecuación diferencial para cada coordenada
- Si hay mas coordenadas generalizadas que grados de libertad, (p. ej. si alguna ligadura es no holónoma) **no** se pueden **separar** los sumandos

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0 \quad n > r$$

- Hay que usar técnicas adicionales para resolver el problema (Principio de Liberación, multiplicadores de Lagrange, etc)

- Principio de d'Alembert
- Ecuaciones de Lagrange
- **Sistemas conservativos**
- Fuerzas generalizadas para sólidos rígidos
- Lagrangiana
- Teoremas de conservación
- Función de Hamilton
- Aplicación del Principio de Liberación
- Multiplicadores de Lagrange
 - Ligaduras geométricas
 - Ligaduras cinemáticas

- Un sistema es conservativo si todas las **fuerzas y momentos aplicados** son conservativos
 - Puede ocurrir que la energía mecánica no se conserve (ej: vínculo reónomo restringido)
- Si las fuerzas aplicadas son conservativas, las fuerzas generalizadas correspondientes pueden derivarse de una **energía potencial**
 - Consideremos un sistema holónomo con $n=r$ sometido a una sola fuerza conservativa $\vec{F}^C$ aplicada en el punto P

$$\vec{F}^C = \vec{F}^C(q_k, t)$$

$$U = U(q_k, t)$$

$$\delta U = -\vec{F}^C \cdot \delta \vec{r}^P = - \sum_{k=1}^n \vec{F}^C \cdot \frac{\partial \vec{r}^P}{\partial q_k} \delta q_k = - \sum_{i=1}^n Q_k^C \delta q_k$$

$$\delta U = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial q_k} \right) \delta q_k$$

$$Q_k^C = - \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

- En un sistema **holónomo conservativo** con coordenadas generalizadas independientes

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1, \dots, n$$

- Si hay fuerzas aplicadas **no conservativas**, se agrupan en fuerzas generalizadas no conservativas

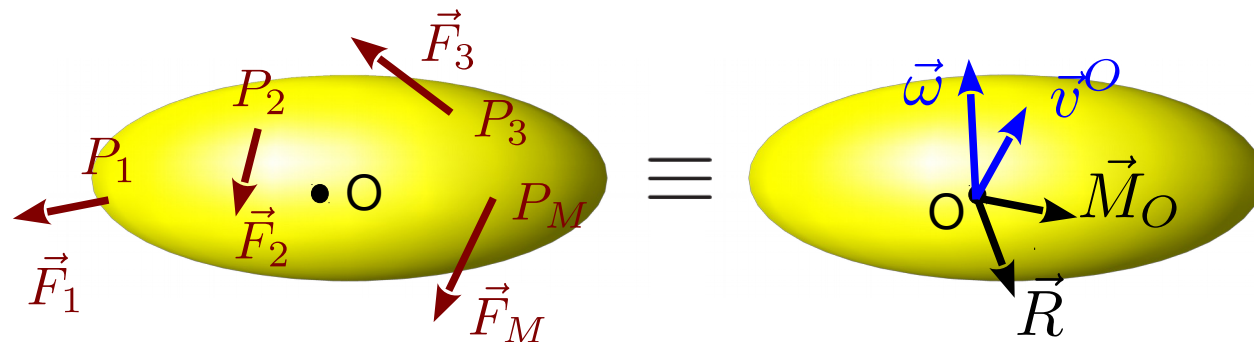
$$Q_k^{NC} = \sum_{i=1}^M \vec{F}_i^{NC} \cdot \delta \vec{r}_i$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k^{NC} \quad k = 1, \dots, n$$

- Principio de d'Alembert
- Ecuaciones de Lagrange
- Sistemas conservativos
- Fuerzas generalizadas para sólidos rígidos
- Lagrangiana
- Teoremas de conservación
- Función de Hamilton
- Aplicación del Principio de Liberación
- Multiplicadores de Lagrange
 - Ligaduras geométricas
 - Ligaduras cinemáticas

Fuerzas generalizadas para un sólido rígido

- Tenemos un sólido rígido sometido a M fuerzas
- Las M fuerzas son un conjunto de vectores deslizantes que pueden reducirse en un punto: **reducción dinámica**



$$\{(\vec{F}_i, \Delta_i)\}_1^M \equiv \{\vec{F}, \vec{M}_O\}$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^M \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^M \overrightarrow{OP} \times \vec{F}_i$$

- El movimiento del sólido está descrito por la **reducción cinemática**

$$R(O) = \{\vec{\omega}, \vec{v}^O\}$$

- La fuerza generalizada para cada coordenada generalizada es

$$Q_k = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{v}^O}{\partial \dot{q}_k} + \vec{M}_O \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_k} \quad k = 1, \dots, n$$

■ Demostración

$$Q_k = \sum_{i=1}^M \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^M \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_i = \overrightarrow{OP_i}$$

$$= \sum_{i=1}^M \vec{F}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (\vec{v}^O + \vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^M \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}^O}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{i=1}^M \vec{F}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^M \vec{F}_i \right) \cdot \frac{\partial \vec{v}^O}{\partial \dot{q}_k} + \left(\sum_{i=1}^M \vec{r}_i \times \vec{F}_i \right) \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_k}$$

$$= \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{v}^O}{\partial \dot{q}_k} + \vec{M}_O \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_k}$$

- Principio de d'Alembert
- Ecuaciones de Lagrange
- Sistemas conservativos
- Fuerzas generalizadas para sólidos rígidos
- Lagrangiana
- Teoremas de conservación
- Función de Hamilton
- Aplicación del Principio de Liberación
- Multiplicadores de Lagrange
 - Ligaduras geométricas
 - Ligaduras cinemáticas

- Consideramos un sistema holónomo con coordenadas generalizadas independientes con fuerzas aplicadas conservativas y no conservativas
 - Consideramos sistemas en que las energías potenciales no dependen de las velocidades $U = U(q_k, t)$

- Función lagrangiana

$$\mathcal{L} = T - U$$

- En general, es función de las coordenadas generalizadas, sus derivadas y el tiempo $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k, t)$

- Consideramos un sistema **holónomo** con coordenadas generalizadas **independientes** con fuerzas aplicadas conservativas y no conservativas

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k^{NC} \quad k = 1, \dots, n$$

- Si todas las fuerzas aplicadas son **conservativas**

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1, \dots, n$$

- Principio de d'Alembert
- Ecuaciones de Lagrange
- Sistemas conservativos
- Fuerzas generalizadas para sólidos rígidos
- Lagrangiana
- Teoremas de conservación
- Función de Hamilton
- Aplicación del Principio de Liberación
- Multiplicadores de Lagrange
 - Ligaduras geométricas
 - Ligaduras cinemáticas

- **Momento generalizado p_k**

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$$

- Si la coordenada es una longitud es una cantidad de movimiento
- Si la coordenada es un ángulo es un momento cinético

- **Coordenada cíclica:** es una coordenada generalizada que no aparece en la Lagrangiana

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$$

- **Sistema cíclico en el tiempo:** el tiempo no aparece explícitamente en la Lagrangiana

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

- En un sistema **conservativo** con coordenadas generalizadas **independientes** y ligaduras **ideales**, para cada coordenada cíclica el correspondiente momento generalizado se conserva

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \implies \frac{d p_k}{dt} = 0 \implies p_k = cte$$

- Principio de d'Alembert
- Ecuaciones de Lagrange
- Sistemas conservativos
- Fuerzas generalizadas para sólidos rígidos-
- Lagrangiana
- Teoremas de conservación
- **Función de Hamilton**
- Aplicación del Principio de Liberación
- Multiplicadores de Lagrange
 - Ligaduras geométricas
 - Ligaduras cinemáticas

- La función de Hamilton o Hamiltoniano de un sistema se define como

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}$$

- En general, es una función de las coordenadas generalizadas, sus derivadas y el tiempo

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_k, \dot{q}_k, t) \quad k = 1, \dots, n$$

- En un sistema conservativo con coordenadas generalizadas independientes y ligaduras ideales, y cíclico en el tiempo, el Hamiltoniano se conserva

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \sum_{k=1}^n (\dot{p}_k \dot{q}_k + p_k \ddot{q}_k) - \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\ \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{aligned}$$

- Si el sistema es **esclerónimo y conservativo**, el Hamiltoniano es la energía mecánica total del sistema

$$\mathcal{H} = T + U$$

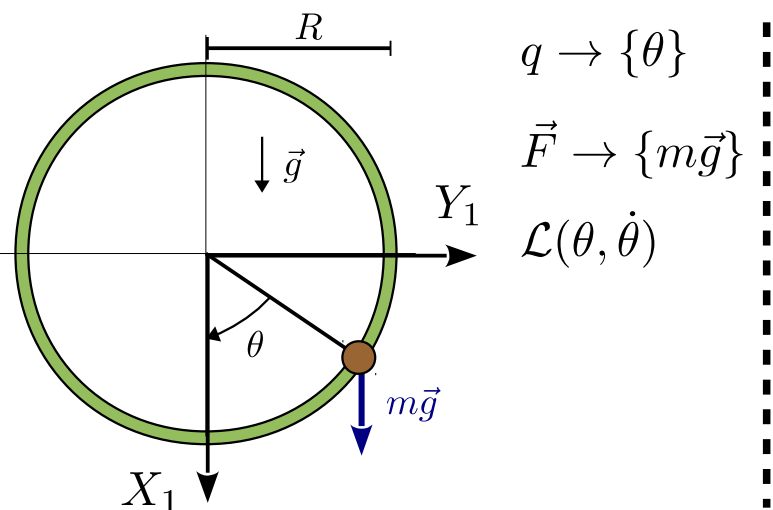
- En un sistema conservativo, con coordenadas generalizadas independientes y cíclico en el tiempo, la energía mecánica se conserva

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \implies E = cte$$

- Principio de d'Alembert
- Ecuaciones de Lagrange
- Sistemas conservativos
- Fuerzas generalizadas para sólidos rígidos-
- Lagrangiana
- Teoremas de conservación
- Función de Hamilton
- Aplicación del Principio de Liberación
- Multiplicadores de Lagrange
 - Ligaduras geométricas
 - Ligaduras cinemáticas

- Consiste en liberar los vínculos del sistema, sustituyéndolos por reacciones vinculares
- Permite calcular reacciones vinculares y/o tratar sistemas con mas coordenadas generalizadas que grados de libertad
- El procedimiento es el siguiente
 - Se libera el sistema rompiendo los vínculos
 - Se aumenta el número de grados de libertad
 - Se sustituyen los vínculos por reacciones vinculares (fuerzas y/o momentos)
 - Se aumenta el número de incógnitas
 - Las reacciones contribuyen a las fuerzas generalizadas
 - Se resuelve el problema liberado
 - Se particulariza para la configuración vinculada original
 - Hay que considerar las relaciones de ligadura como ecuaciones adicionales

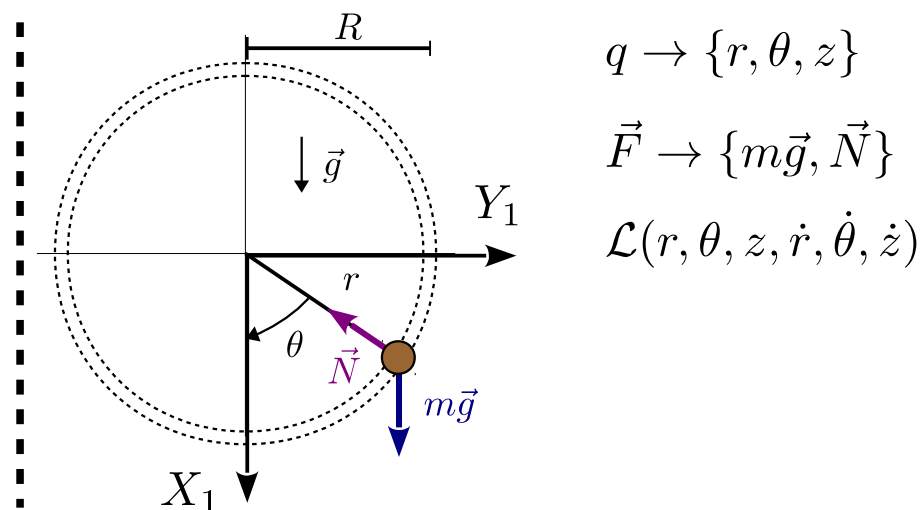
Principio de Liberación: Ejemplo



$$q \rightarrow \{\theta\}$$

$$\vec{F} \rightarrow \{m\vec{g}\}$$

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta})$$



$$q \rightarrow \{r, \theta, z\}$$

$$\vec{F} \rightarrow \{m\vec{g}, \vec{N}\}$$

$$\mathcal{L}(r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z})$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{k}$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

$$U = -mgr \cos \theta$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + mgr \cos \theta$$

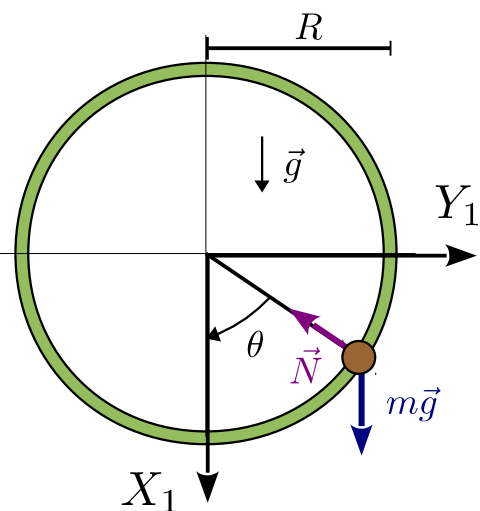
$$\vec{N} = N_r \vec{u}_r + N_z \vec{k}$$

$$Q_r = \vec{N} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{r}} = N_r$$

$$Q_\theta = \vec{N} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

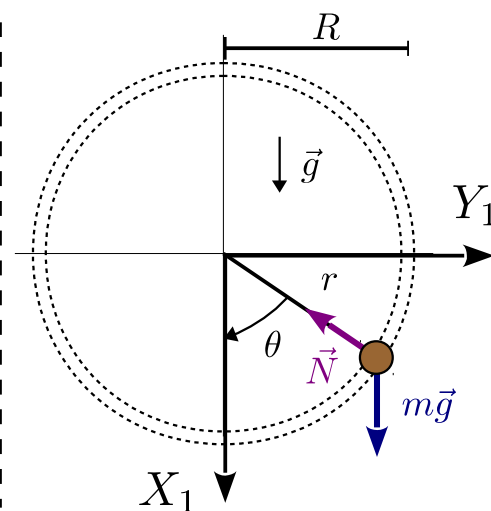
$$Q_z = \vec{N} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{z}} = N_z$$

Principio de Liberación: Ejemplo



$$q \rightarrow \{\theta\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r = R \\ \dot{r} = \ddot{r} = 0 \\ z = 0 \\ \dot{z} = \ddot{z} = 0 \end{array} \right.$$



$$q \rightarrow \{r, \theta, z\}$$

$$\vec{F} \rightarrow \{m\vec{g}, \vec{N}\}$$

$$\mathcal{L}(r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = Q_r \quad \Rightarrow \quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta = N_r$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = Q_\theta \quad \Rightarrow \quad mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr \sin \theta = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = Q_z \quad \Rightarrow \quad m\ddot{z} = N_z$$

$$N_r = -m(R\dot{\theta}^2 + g \cos \theta)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \sin \theta$$

$$N_z = 0$$

- Principio de d'Alembert
- Ecuaciones de Lagrange
- Sistemas conservativos
- Fuerzas generalizadas para sólidos rígidos-
- Lagrangiana
- Teoremas de conservación
- Función de Hamilton
- Aplicación del Principio de Liberación
- Multiplicadores de Lagrange
 - Ligaduras geométricas
 - Ligaduras cinemáticas

- Se usan para tratar problemas con más coordenadas generalizadas que grados de libertad
 - Sistemas con ligaduras holónomas en los que conviene no eliminar alguna ligadura
 - Sistemas con ligaduras no holónomas
- Es similar al Principio de Liberación, pero las reacciones vinculares se añaden directamente en el espacio de configuración
 - Permite tratar problemas generales más allá de la Mecánica
- Consideraremos por separado ligaduras geométricas y cinemáticas lineales
 - Ligaduras geométricas

$$f_j(q_k, t) = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

- Ligaduras cinemáticas lineales

$$g_l(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_{k=1}^n a_{lk} \dot{q}_k + b_l = 0 \quad l = 1, \dots, p$$

- Principio de d'Alembert
- Ecuaciones de Lagrange
- Sistemas conservativos
- Fuerzas generalizadas para sólidos rígidos-
- Lagrangiana
- Teoremas de conservación
- Función de Hamilton
- Aplicación del Principio de Liberación
- Multiplicadores de Lagrange
 - Ligaduras geométricas
 - Ligaduras cinemáticas

Multiplicadores de Lagrange: ligaduras geométricas

- Una ligadura geométrica no involucra a las velocidades

$$f_j(q_k, t) = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

- Ej: $f_1(x, y, t) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$

- Puede interpretarse como una restricción a los movimientos virtuales posibles

$$\delta f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y = \left[\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \nabla f_1 \cdot \delta \vec{r} = 0$$

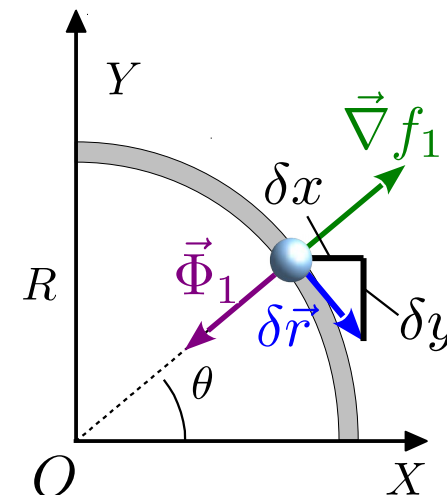
$$\rightarrow 2x \delta x + 2y \delta y = 0 \rightarrow \delta y = -(x/y) \delta x$$

- La ligadura es impuesta por una fuerza de reacción vincular normal al vínculo

$$\vec{\Phi}_1 \cdot \delta \vec{r} = 0 \quad \vec{\Phi}_1 = \lambda \vec{\nabla} f_1$$

- El gradiente da la dirección perpendicular al vínculo, es decir, de la fuerza

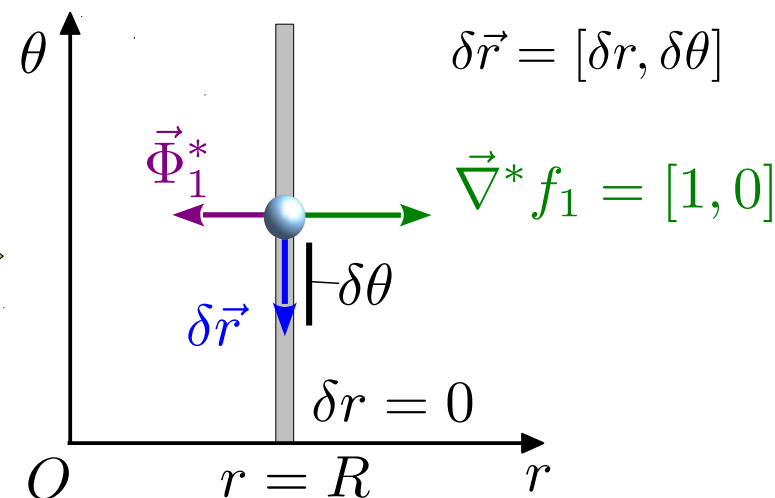
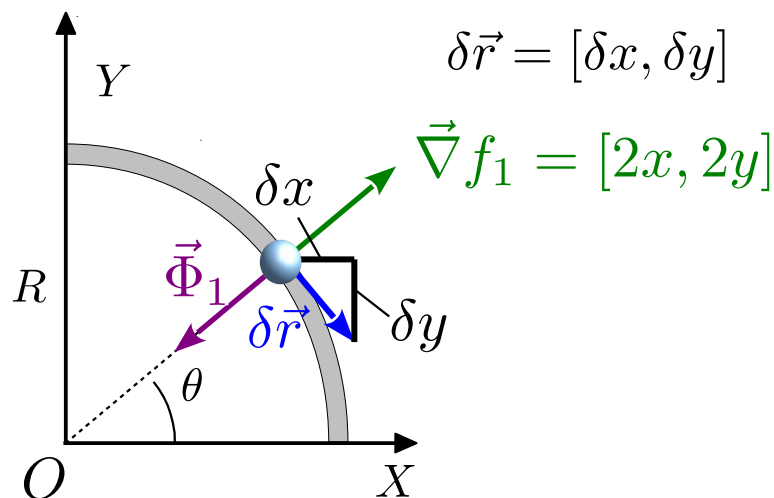
- Al desvincular aparece un parámetro λ que se ajusta para que el vínculo se respete



- ¿Cómo se ve el mismo problema en el espacio de configuración $\{r, \theta\}$?

$$f_1(x, y, z, t) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

$$f_1(r, \theta, t) = r - R = 0$$



- El gradiente en el espacio de configuración da la dirección **perpendicular al vínculo** en el espacio de configuración
- La fuerza generalizada de ligadura en el espacio de configuración es

$$\begin{array}{l} \vec{\Phi}_1^* = \lambda_1 \vec{\nabla}^* f_1 \\ \vec{\nabla}^* f_1 = \left[\frac{\partial f_1}{\partial r}, \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \right] \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} Q_r^* = \lambda_1 (\partial f_1 / \partial r) \\ Q_\theta^* = \lambda_1 (\partial f_1 / \partial \theta) \end{array} \right| \quad \text{Ej:} \quad \begin{array}{l} Q_r^* = \lambda_1 \\ Q_\theta^* = 0 \end{array}$$

Multiplicadores de Lagrange: ligaduras geométricas; protocolo

- Problema general con n coordenadas generalizadas, m vínculos geométricos y r grados de libertad

$$\{q_k\}_{k=1}^n \quad \{f_j(q_k, t) = 0\}_{j=1}^m \quad r = n - m$$

- Se construye la lagrangiana, incluyendo las fuerzas conservativas
- Se construyen las fuerzas generalizadas para incluir las fuerzas no conservativas, una por cada coordenada generalizada
- Se añade una fuerza generalizada de ligadura por cada vínculo
 - Cada ligadura añade un término a cada fuerza generalizada
 - Cada ligadura añade un **multiplicador de Lagrange** (una **incógnita**)
- Se construyen las ecuaciones de Lagrange (n ecuaciones)

$$\mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k, t)$$

$$Q_k^{NC}$$

$$\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k^{NC} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_k}$$

Ecuaciones: $(n+m)$

Incógnitas: $(n+m)$

$$\{q_1, \dots, q_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m\}$$

- Se añaden las m ecuaciones de ligadura

$$\{f_j(q_k, t) = 0\}_{j=1}^m$$

- Principio de d'Alembert
- Ecuaciones de Lagrange
- Sistemas conservativos
- Fuerzas generalizadas para sólidos rígidos-
- Lagrangiana
- Teoremas de conservación
- Función de Hamilton
- Aplicación del Principio de Liberación
- Multiplicadores de Lagrange
 - Ligaduras geométricas
 - Ligaduras cinemáticas

- Una ligadura cinemática lineal involucra a las velocidades

$$g_l(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_{k=1}^n a_{lk} \dot{q}_k + b_l = 0 \quad l = 1, \dots, p$$

- También se pueden interpretar como una restricción a los desplazamientos

- En un desplazamiento real

$$dg_l = \sum_{k=1}^n a_{lk} dq_k + b_l dt = 0 \quad l = 1, \dots, p$$

- En un desplazamiento virtual el tiempo se congela

$$\delta g_l = \sum_{k=1}^n a_{lk} \delta q_k = 0, \quad a_{lk} = \frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_k}, \quad l = 1, \dots, p$$

- La fuerza generalizada en el espacio de las configuraciones es

$$\vec{\Phi}_l^* = \mu_l \vec{\nabla}^* g_l \quad \vec{\nabla}^* g_l = \left[\frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_1}, \dots, \frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_n} \right] = [a_{l1} \dots, a_{ln}]$$

Multiplicadores de Lagrange: ligaduras cinemáticas; protocolo

- Problema general con n coordenadas generalizadas, p vínculos cinemáticos y r grados de libertad

$$\{q_k\}_{k=1}^n \quad \{g_l(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_{k=1}^n a_{lk} \dot{q}_k + b_l = 0\}_{l=1}^p \quad r = n - p$$

- Se construye la lagrangiana, incluyendo las fuerzas conservativas

$$\mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k, t)$$

- Se construyen las fuerzas generalizadas para incluir las fuerzas no conservativas, una por cada coordenada generalizada

$$Q_k^{NC}$$

- Se añade una fuerza generalizada de ligadura por cada vínculo

- Cada ligadura añade un término a cada fuerza generalizada

- Cada ligadura añade un multiplicador de Lagrange: una **incógnita**

$$\mu_l \frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_k} = \mu_l a_{lk}$$

- Se construyen las ecuaciones de Lagrange (n ecuaciones)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k^{NC} + \sum_{l=1}^p \mu_l \frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_k}$$

Ecuaciones: $(n+p)$

Incógnitas: $(n+p)$

- Se añaden las p ecuaciones de ligadura

$$\{g_l(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_{k=1}^n a_{lk} \dot{q}_k + b_l = 0\}_{l=1}^p$$

$$\{q_1, \dots, q_n, \mu_1, \dots, \mu_p\}$$

Multiplicadores de Lagrange: ligaduras geométricas y cinemáticas

- Hay que añadir una fuerza generalizada (un multiplicador de Lagrange) por cada vínculo, ya sea geométrico o cinemático

$$\begin{aligned} \{q_k\}_{k=1}^n \quad & \{f_j(q_k, t) = 0\}_{j=1}^m \\ & r = n - m - p \\ & \{g_l(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_{k=1}^n a_{lk} \dot{q}_k + b_l = 0\}_{l=1}^p \end{aligned}$$

- Se construyen las ecuaciones de Lagrange, las fuerzas generalizadas, las contribuciones a las fuerzas generalizadas de los vínculos y se añaden las ecuaciones de los vínculos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k^{NC} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_k} + \sum_{l=1}^p \mu_l \frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_k}$$

$$\{f_j(q_k, t) = 0\}_{j=1}^m$$

$$\{g_l(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_{k=1}^n a_{lk} \dot{q}_k + b_l = 0\}_{l=1}^p$$

Ecuaciones: $(n + m + p)$
Incógnitas: $(n + m + p)$
 $\{q_1, \dots, q_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_p\}$

- Los multiplicadores de Lagrange son las **contribuciones** de los vínculos a las fuerzas generalizadas
 - Como en las fuerzas vinculares en mecánica, se ajustan para que los vínculos sean respetados
 - Pueden ser una componente de una fuerza, de un momento de fuerza, o cualquier magnitud física
 - Para identificarlos, podemos igualar la potencia mecánica con la potencia analítica en un desplazamiento virtual

$$P_{\text{vec}} = \sum_{i=1}^N \left(\vec{\Phi}_i^{\text{geo}} + \vec{\Phi}_i^{\text{cin}} \right) \cdot \vec{v}_i^*$$

$$P_{\text{ana}} = \sum_{k=1}^n \left(Q_k^{\text{geo}} + Q_k^{\text{cin}} \right) \dot{q}_k$$

$$\vec{v}_i^* = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k$$

- En un sólido rígido $P_{\text{vec}} = \vec{\Phi} \cdot \vec{v}^O + \vec{\Gamma}_O \cdot \vec{\omega}$

- Otra posibilidad es calcular las fuerzas generalizadas a partir de las reacciones físicas e igualarlas a las calculadas con los multiplicadores de Lagrange

$$Q_k = Q_k^{\text{geo}} + Q_k^{\text{cin}} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} + \sum_{j=1}^p \mu_j \frac{\partial g_j}{\partial \dot{q}_k}$$

$$Q_k = Q_k^{\text{geo}} + Q_k^{\text{cin}} = \sum_{i=1}^N (\vec{\Phi}_i^{\text{geo}} + \vec{\Phi}_i^{\text{cin}}) \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k}$$