Tema 8: Sistemas de partículas

FISICA I, 1º, Grado en Ingeniería Civil

Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Índice

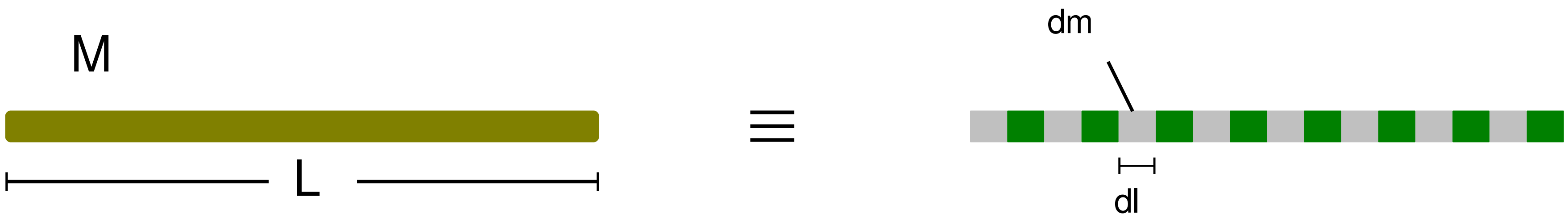
Introducción

- Los sistemas reales son sistemas de partículas
- El comportamiento de los sistemas se puede descomponer en dos partes
  - El movimiento del sistema como un todo (movimiento del centro de masas)
  - El movimiento interno (movimiento respecto al centro de masas)
- Las magnitudes cinéticas (energía, cantidad de movimiento y momento angular) se generalizan para sistemas de partículas
- Bibliografía
  - Tipler, Mosca, Física par la Ciencia y la Tecnología,
  - Wiki de la página web

Índice

- Introducción
- Densidades de masa
- Centro de masas
- Teoremas de conservación
  - Cantidad de movimiento
  - Momento cinético
  - Energía
- Colisiones

- Un cuerpo continuo puede considerase compuesto por un número infinito de masas diferenciales



- Los sumatorios se convierten en diferenciales

$$M = \sum \mathrm{d}m \Longrightarrow \int \mathrm{d}m \qquad L = \sum \mathrm{d}l \Longrightarrow \int \mathrm{d}l$$

- Densidad lineal de masa $\quad \mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}l \qquad M = \int_L \mu\,\mathrm{d}l$

  - Si el cuerpo es homogéneo $\quad \mu = \dfrac{M}{L}$

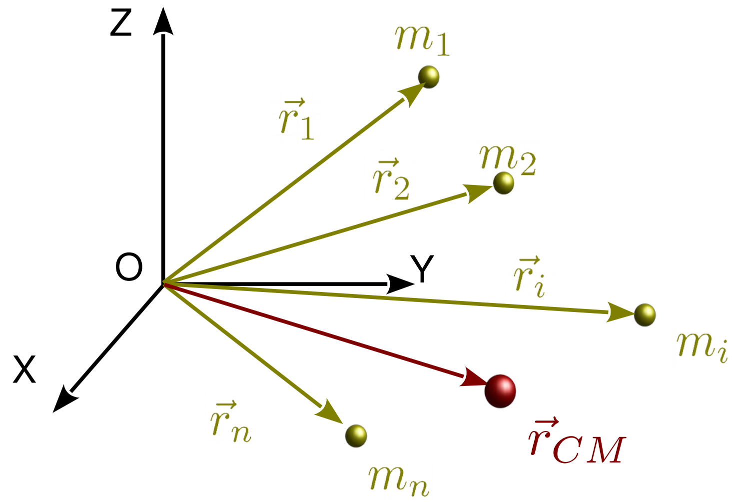
- Densidad superficial de masa $\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}S$ $\qquad M = \int_S \sigma\,\mathrm{d}S$
  - Si el cuerpo es homogéneo $\sigma = \dfrac{M}{S}$

- Densidad volumétrica de masa $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$ $\qquad M = \int_V \rho\,\mathrm{d}V$
  - Si el cuerpo es homogéneo $\rho = \dfrac{M}{V}$

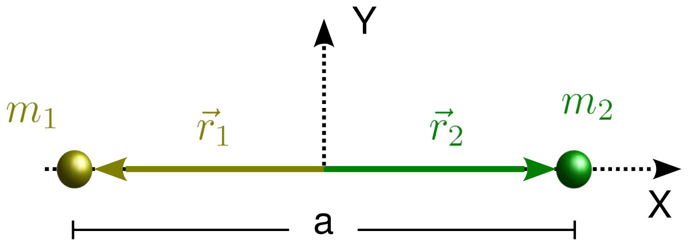
Índice

- Dado un sistema de n partículas, se define la posición de su centro de masas

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M}}$$



- m_i es la masa de cada partícula
- $\mathbf{r}_i$ es el vector de posición de cada partícula
- M es la masa total del sistema

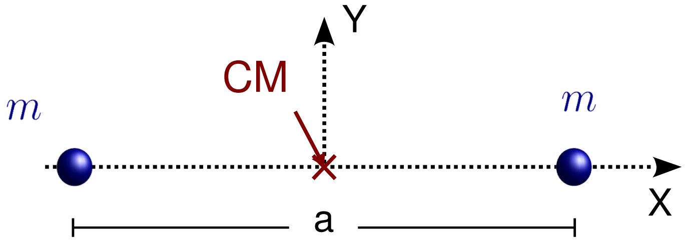


$$\vec{r}_1 = -\frac{a}{2}\,\vec{\imath}$$

$$\vec{r}_2 = +\frac{a}{2}\,\vec{\imath}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)\frac{a}{2}\,\vec{\imath}$$

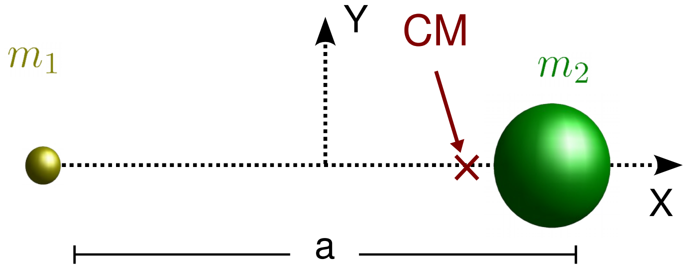
$$m_1 = m_2 = m$$



$$\vec{r}_{CM} = \vec{0}$$

Si el sistema tiene algún plano, línea o punto de simetría, el CM está en él

$$m_1 \ll m_2$$



$$\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) \simeq \frac{m_2 - m_1}{m_2}$$

$$\simeq 1 - \frac{m_1}{m_2}$$

$$\vec{r}_{CM} \simeq \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)\frac{a}{2}\,\vec{\imath}$$

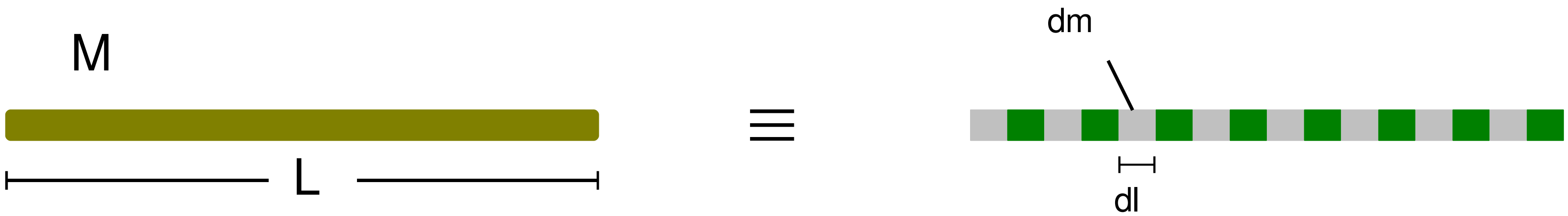
El CM está cerca de la masa mayor

Ejemplo: $m_{tierra} = 5.98\times10^{24}$ kg, $m_{sol} = 1.99\times10^{30}$ kg,

$a = 1.5\times 10^{8}$ km

Calculo del centro de masas por integración

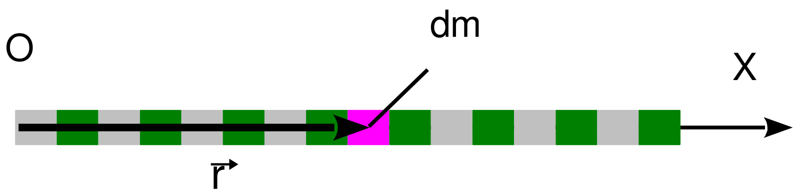
- Un cuerpo continuo puede considerase compuesto por un número infinito de masas diferenciales



- Los sumatorios se convierten en diferenciales

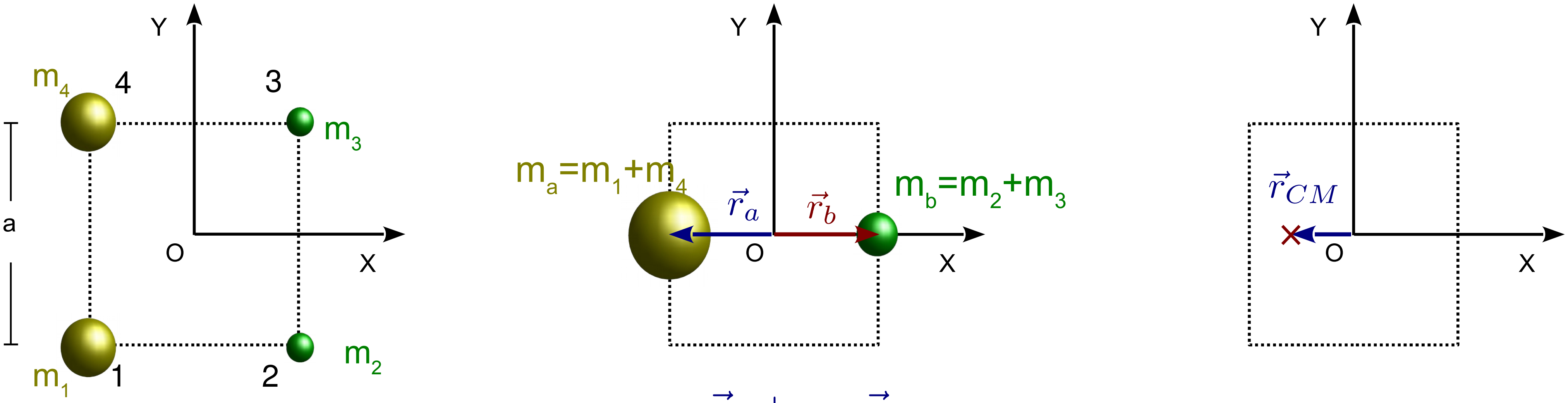
$$M = \sum \mathrm{d}m \Longrightarrow \int \mathrm{d}m \qquad\qquad L = \sum \mathrm{d}l \Longrightarrow \int \mathrm{d}l$$

- Posición del centro de masas



$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int \vec{r}\mathrm{d}m}{M}}$$

- Podemos calcular el CM como una composición de partes del sistema



m_1=m_4

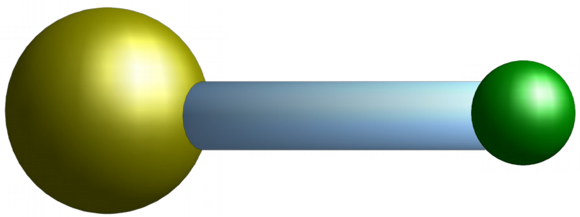
m_2=m_3

$$\vec{r}_a = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_4\vec{r}_4}{m_1 + m_4} = -\frac{a}{2}\vec{\imath}$$

$$\vec{r}_b = \frac{m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_2 + m_3} = \frac{a}{2}\vec{\imath}$$

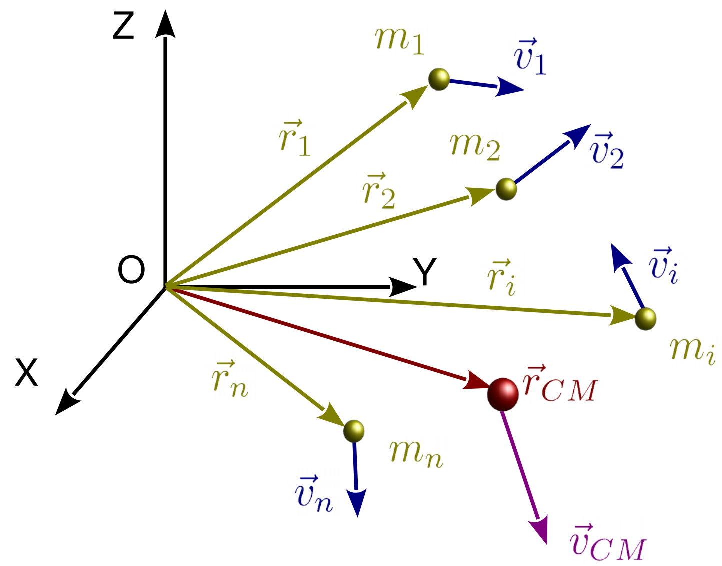
$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_a\vec{r}_a + m_b\vec{r}_b}{m_a + m_b}$$

- De este modo se puede calcular el CM de sistemas complejos



- Si las partículas se mueven la posición del CM varía en el tiempo

$$\vec{r}_{CM}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i(t)}{M}$$



- Derivando en t se obtiene la velocidad del CM

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{CM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{M}$$

Sistema discreto

$$\boxed{M\vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}$$

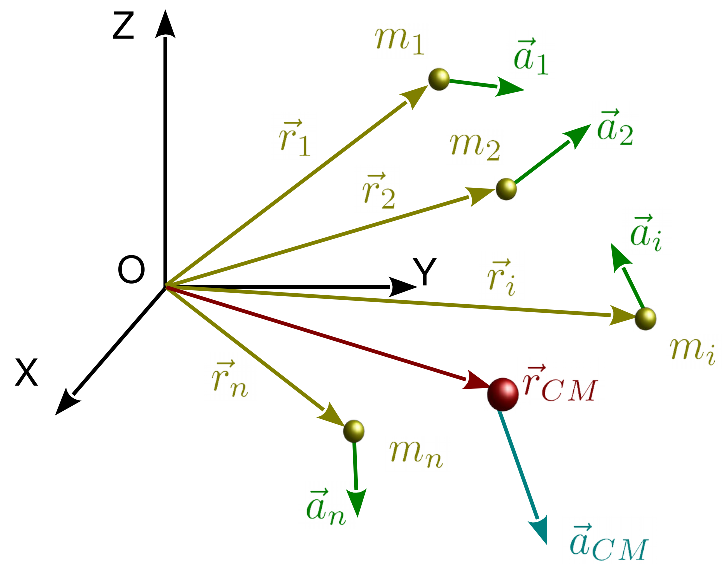
Sistema continuo

$$\boxed{M\vec{v}_{CM} = \int \vec{v}\,\mathrm{d}m}$$

- La aceleración del CM se obtiene derivando su velocidad respecto del tiempo

$$\vec{v}_{CM}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{M}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{CM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i}{M}$$



Sistema discreto

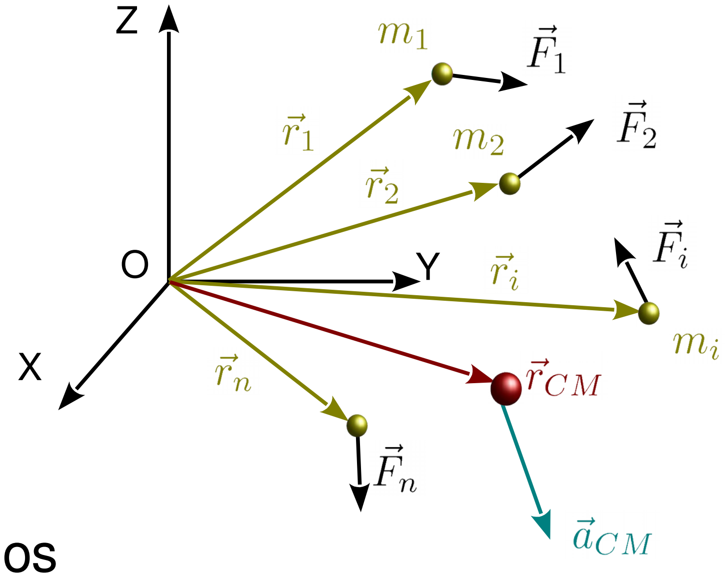
$$\boxed{M\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i}$$

Sistema continuo

$$\boxed{M\vec{a}_{CM} = \int \vec{a}\,\mathrm{d}m}$$

- La fuerza sobre cada partícula tiene una componente externa y otra interna

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}$$

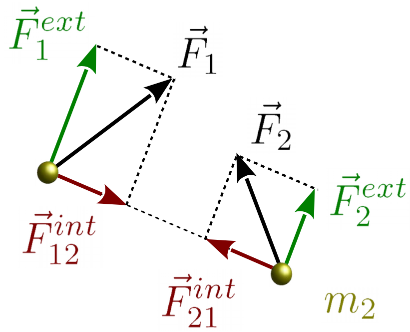


- Aplicando la Segunda Ley a cada partícula

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{int} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{ext}$$

- Por la Tercera Ley, las fuerzas internas se anulan dos a dos

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{int} = \vec{0}$$



Teorema de la Cantidad de Movimiento (T.C.M.)

El centro de masas se mueve como una partícula con toda la masa del sistema sometida a la acción de la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema

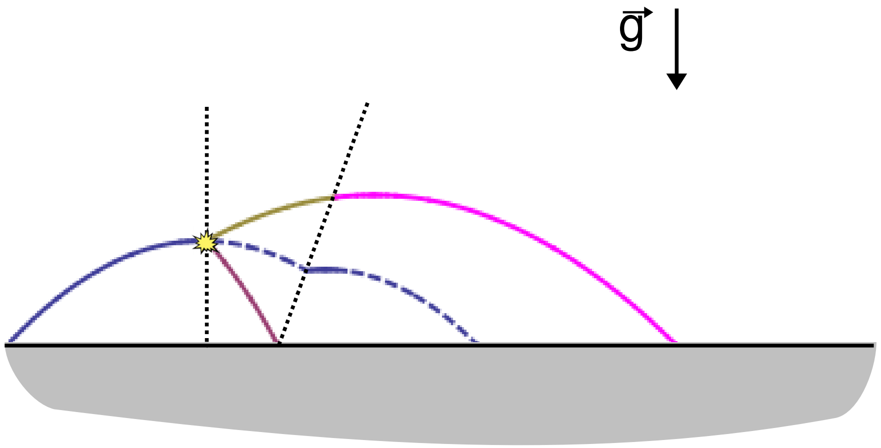
$$M\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{ext} = \vec{F}_{neta}^{ext}$$

- El movimiento del sistema como un todo puede describirse como el movimiento de su centro de masas sometido a la fuerza externa total sobre el sistema

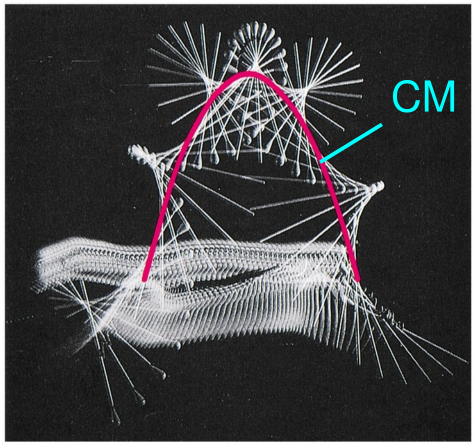
- El movimiento interno del sistema es el movimiento relativo a un sistema de referencia solidario con el centro de masas

Ejemplos de movimiento del CM

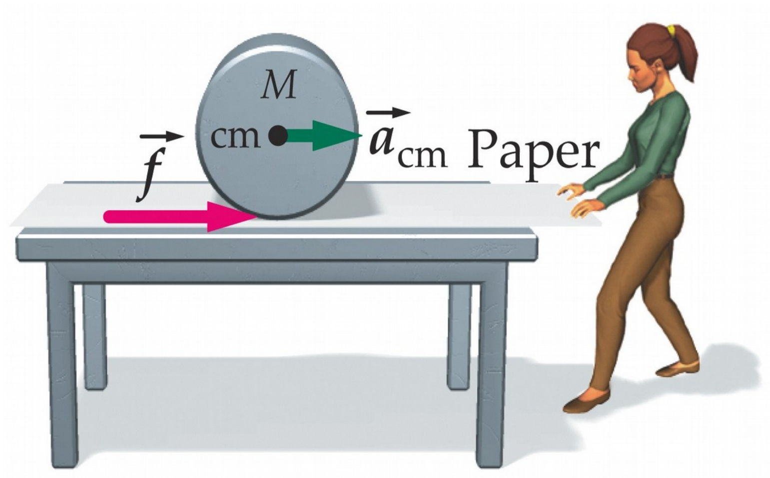
- Explosión de una granada en dos trozos de la misma masa



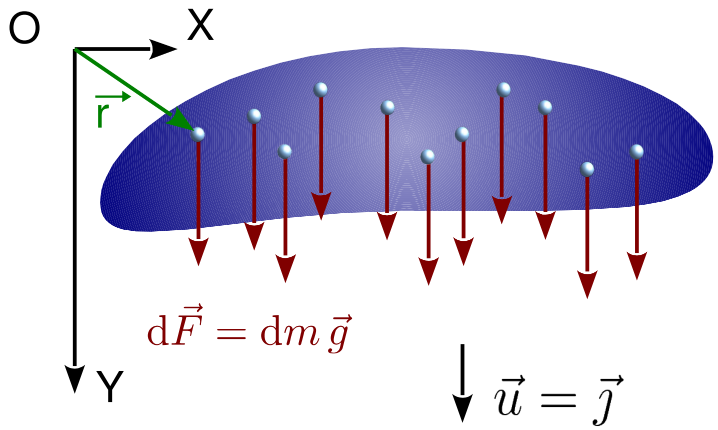
- Bastón lanzado al aire



- Cilindro sobre una mesa



- Si el campo gravitatorio es uniforme el centro de masas y el centro de gravedad coinciden

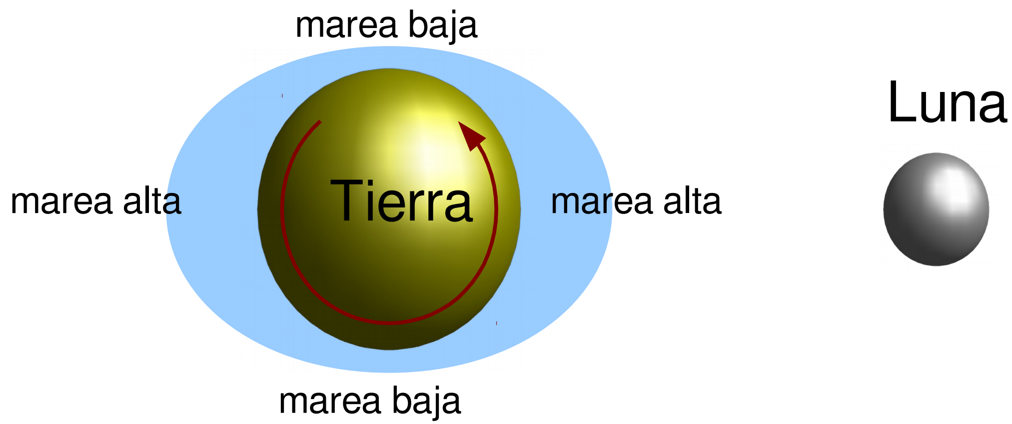


  - El centro de gravedad es el centro de un sistema de vectores deslizantes paralelos

$$\mathrm{d}\vec{F} = (\mathrm{d}m\, g)\,\vec{\jmath} \qquad \vec{r}_{CM}(t) = \vec{r}_{CG}(t) = \frac{\displaystyle\int_{vol} \vec{r} g\,\mathrm{d}m}{\displaystyle\int_{vol} g\,\mathrm{d}m}$$

- Si el campo gravitatorio es **no** uniforme el centro de masas y el centro de gravedad **no** coinciden

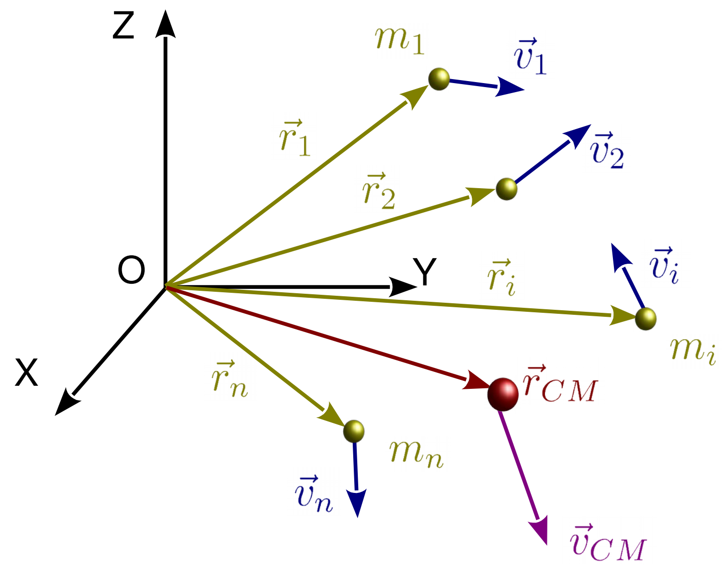
  - El sistema de vectores no es paralelo
  - Aparecen fuerzas de marea



Índice

- Introducción
- Densidades de masa
- Centro de masas
- Teoremas de conservación
  - Cantidad de movimiento
  - Momento cinético
  - Energía
- Colisiones

- La cantidad de movimiento del sistema es la suma de la cantidad de movimiento de cada una de las partículas que lo componen



$$\boxed{\vec{P}_{sis} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{v}_i} \qquad \boxed{\vec{P}_{sis} = \int \mathrm{d}\vec{p} = \int \vec{v}\,\mathrm{d}m}$$

- En función de la velocidad del centro de masas

$$\vec{P}_{sis} = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{v}_i = M\,\vec{v}_{CM}$$

- Derivando respecto al tiempo (suponiendo M constante en el tiempo)

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}_{sis}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\vec{v}_{CM}) = M\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{CM}}{\mathrm{d}t} = M\,\vec{a}_{CM}$$

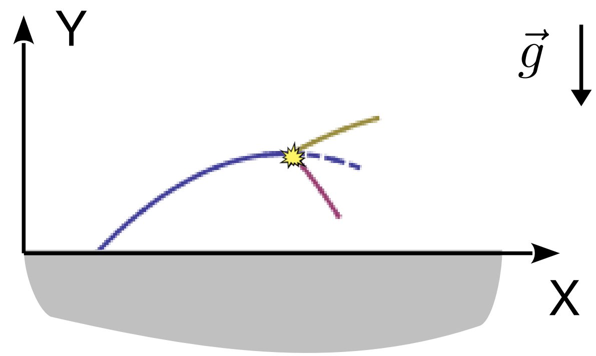
$$M\,\vec{a}_{CM} = \sum_{j=1}^{m} \vec{F}_j^{ext} = \vec{F}_{neta}^{ext}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{P}_{sis}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{neta}^{ext}}$$

La cantidad de movimiento de un sistema se conserva si la fuerza neta sobre él es nula

$$\vec{F}^{ext}_{neta} = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{P}_{sis}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \vec{P}_{sis} = \vec{cte}$$

- Si alguna componente de la fuerza es nula se conserva el momento lineal en esa componente



Antes de la explosión $\vec{F}^{ext}_{neta} = -M g\,\vec{\jmath}$

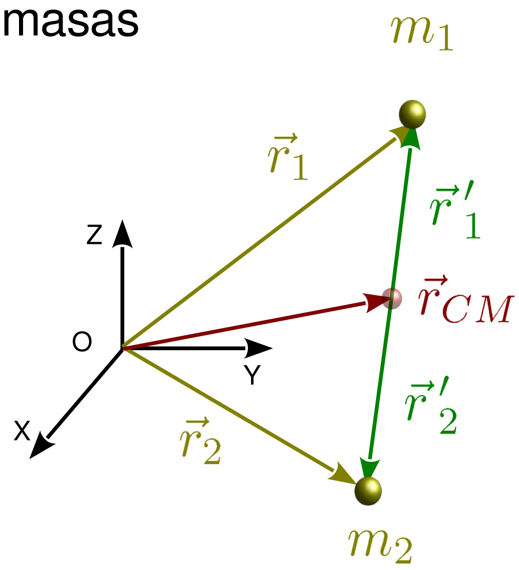
Después de la explosión

$$\vec{F}^{ext}_{neta} = -m_1 g\,\vec{\jmath} - m_2 g\,\vec{\jmath} = -(m_1 + m_2)\,g\,\vec{\jmath} = -M g\,\vec{\jmath}$$

$$F^{ext}_x = 0 \Longrightarrow P_x = cte \Longrightarrow M\,v^{CM}_x = cte \Longrightarrow v^{CM}_x = cte$$

- Consideramos un sistema de referencia que se mueve con el centro de masas

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{CM} + \vec{r}\,'_1 \qquad \vec{v}_1 = \vec{v}_{CM} + \vec{v}\,'_1$$
$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{CM} + \vec{r}\,'_2 \quad \longrightarrow \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_{CM} + \vec{v}\,'_2$$



- Cantidad de movimiento del sistema

$$\begin{aligned}\vec{P}_{sis} &= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1(\vec{v}_{CM} + \vec{v}\,'_1) + m_2(\vec{v}_{CM} + \vec{v}\,'_2)\\ &= (m_1+m_2)\vec{v}_{CM} + m_1\vec{v}\,'_1 + m_2\vec{v}\,'_2\\ &= M\vec{v}_{CM} + \vec{p}\,'_1 + \vec{p}\,'_2\\ &= M\vec{v}_{CM} + \vec{P}\,'_{sis}\end{aligned}$$

Pero también... $= M\vec{v}_{CM}$

$$\longrightarrow \quad \vec{P}\,'_{sis} = \vec{p}\,'_1 + \vec{p}\,'_2 = \vec{0}$$

- La cantidad de movimiento del sistema respecto del centro de masas es cero

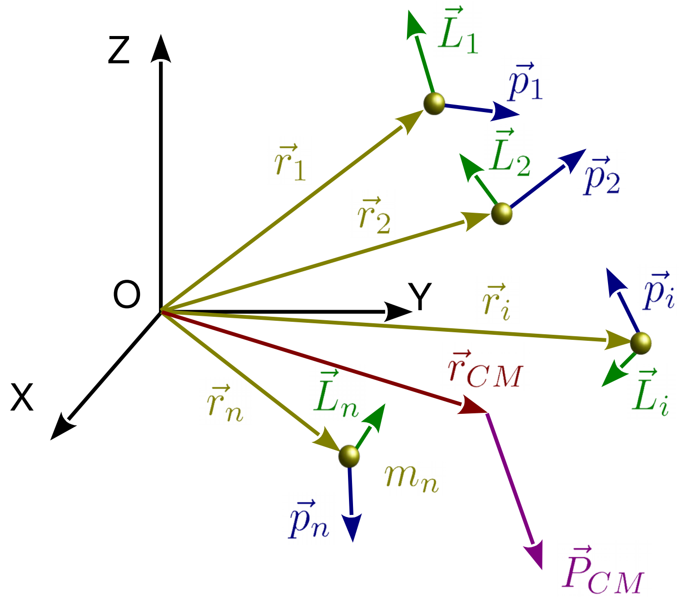
$$\boxed{\vec{P}\,'_{sis} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}\,'_i = \vec{0}}$$

- Introducción
- Densidades de masa
- Centro de masas
- Teoremas de conservación
  - Cantidad de movimiento
  - Momento cinético
  - Energía
- Colisiones

- El momento angular del sistema respecto a un punto es la suma de los momentos angulares de cada una de las partículas que lo componen respecto al mismo punto

$$\boxed{\vec{L}_O^{sis} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times (m_i\,\vec{v}_i)}$$

$$\boxed{\vec{L}_O^{sis} = \int \mathrm{d}\vec{L}_O = \int \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{p} = \int \vec{r} \times \vec{v}\,\mathrm{d}m}$$



- Teorema del Momento Cinético (T.C.M.)

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O^{sis}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_O^{ext}}$$

- El momento angular de un sistema se puede dividir en dos partes

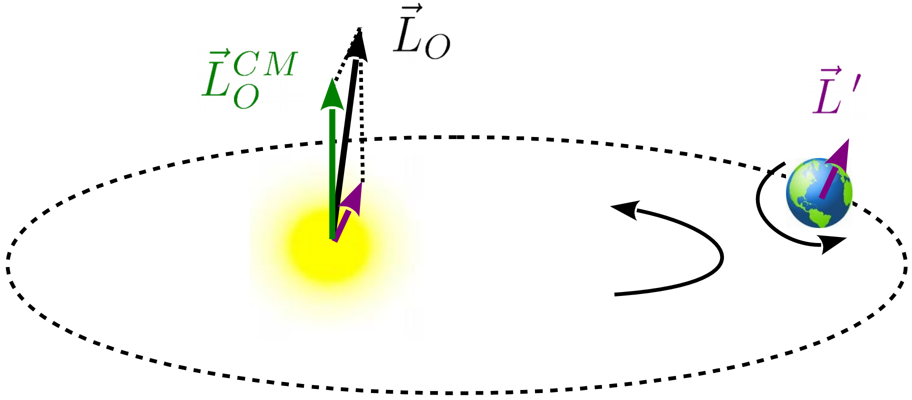
$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{L}_O^{CM} + \vec{L}'} \qquad \boxed{\mathrm{d}\vec{L}'/\mathrm{dt} = \vec{M}_{CM}^{ext}}$$

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$ Momento angular total del sistema respecto al punto O

$$\vec{L}_O^{CM} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}_{sis} = \vec{r}_{CM} \times (M\vec{V}_{CM})$$ Momento angular del CM respecto al punto O

$$\vec{L}\,' = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}\,'_i \times \vec{p}\,'_i$$ Momento angular del sistema respecto al CM

- Ejemplo: rotación de la Tierra alrededor del Sol y de su eje



$$|\vec{L}_O^{CM}| \simeq M_T d_{TS}^2 \omega_{tras} \simeq 10^{40}\ \mathrm{kgm}^2/\mathrm{s}$$

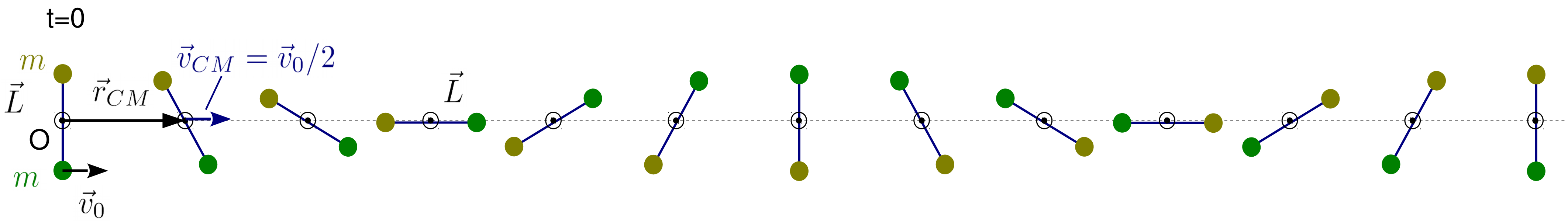
$$|\vec{L}\,'| \simeq \frac{2}{5} M_T R_T^2 \omega_{rot} \simeq 10^{33}\ \mathrm{kgm}^2/\mathrm{s}$$

Conservación del momento angular de un sistema

El momento angular de un sistema respecto a un punto se conserva si el momento resultante del sistema de fuerzas externas que actúa sobre él respecto al mismo punto se anula

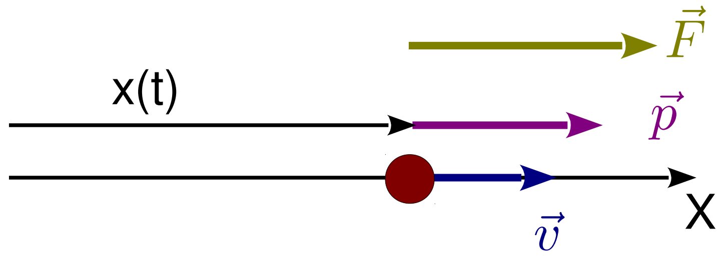
$$\vec{M}_O^{ext} = \vec{0} \;\longrightarrow\; \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O^{sis}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \;\longrightarrow\; \vec{L}_O^{sis} = \vec{cte}$$

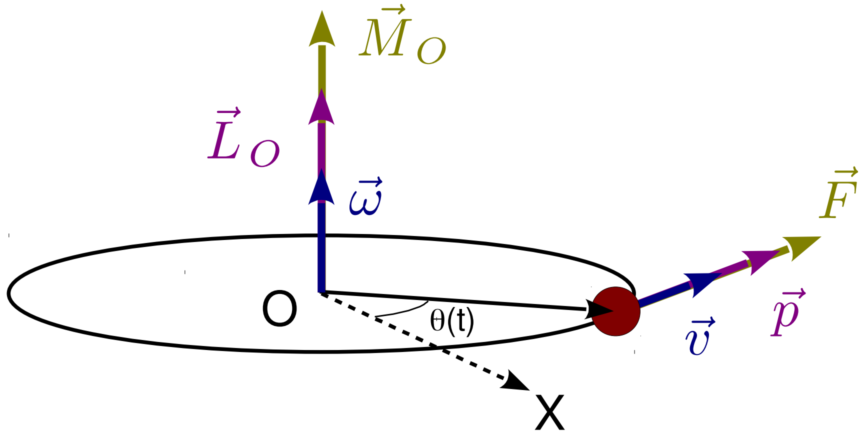
- Ejemplo



- Después del impulso inicial la fuerza neta externa es nula
- Se conserva la cantidad de movimiento y el momento angular del sistema

$$\vec{L} = \vec{L}^{CM} + \vec{L}' = \cancelto{0}{\vec{r}_{CM} \times (M\vec{v}_{CM})} + \vec{L}' = \vec{L}'$$





$$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{\imath}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{\imath}$$

$$\vec{p} = m\,\dot{x}\,\vec{\imath} = m\vec{v}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{k} \qquad (\vec{v} = R\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = R\,\omega\,\vec{u}_\theta)$$

$$\vec{\alpha} = \ddot{\theta}\,\vec{k} \qquad (\vec{a}_T = R\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta = R\,\alpha\,\vec{u}_\theta)$$

$$\vec{L}_O = mR^2\,\dot{\theta}\,\vec{k} = mR^2\,\omega\,\vec{k} = mR^2\,\vec{\omega}$$

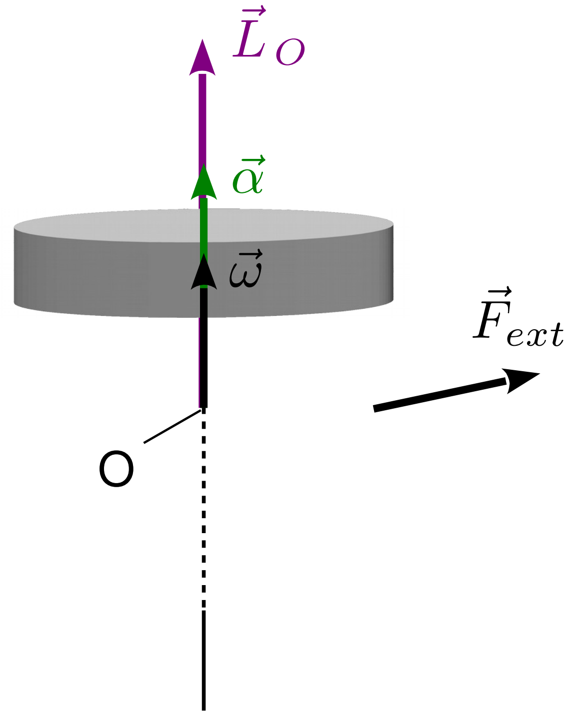
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_O$$

$$E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,mR^2\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\,mR^2\,\omega^2$$

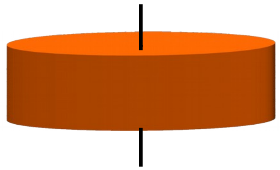
- Si el eje de rotación es un eje de simetría del sólido

$$\vec{L}_O = I_{eje}\,\vec{\omega}$$

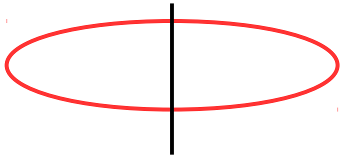
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = I_{eje}\,\vec{\alpha} = \vec{M}_O^{ext}$$



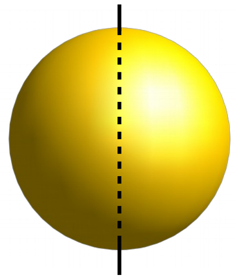
- Ejemplos de momentos de inercia



Disco o cilindro $I_{eje} = \frac{1}{2}MR^2$



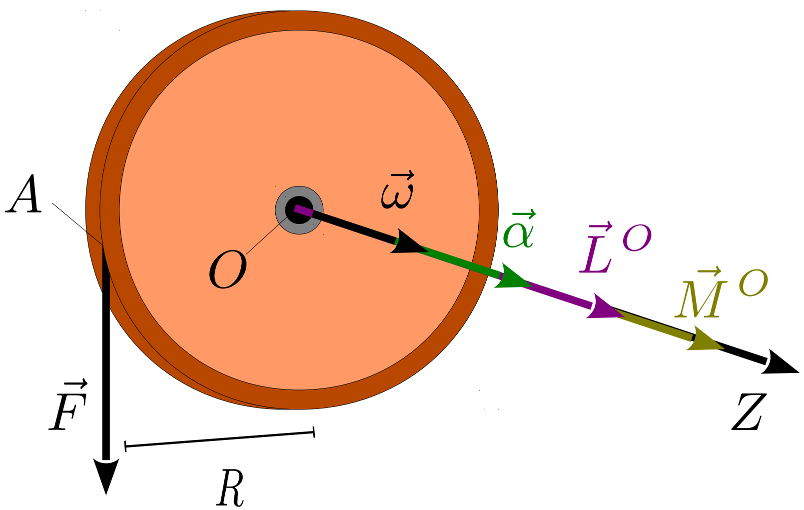
Aro o cilindro hueco $I_{eje} = MR^2$



Esfera hueca $I_{eje} = \frac{2}{3}MR^2$

Esfera maciza $I_{eje} = \frac{2}{5}MR^2$

- Queremos calcular la aceleración angular de una polea de masa M y radio R, que parte del reposo, a la que se le aplica una fuerza constante F tangente a la polea



$$\omega(t=0)=0$$

$$\vec{L}_O = I\,\omega\,\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA}\times\vec{F} = R\,F\,\vec{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = I\,\alpha\,\vec{k} = R\,F\,\vec{k}$$

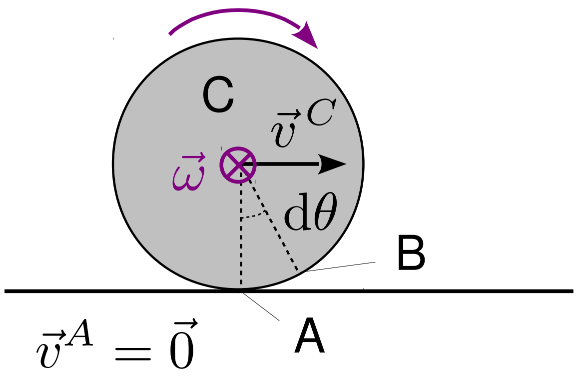
$$\alpha = \frac{R\,F}{I} = \mathrm{cte} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{R\,F}{I}\,t$$

- Si modelamos la polea como un disco de radio R y masa M

$$I = \frac{1}{2}\,M\,R^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\,F}{M\,R}\,t$$

Disco que rueda sin deslizar, con contacto puntual

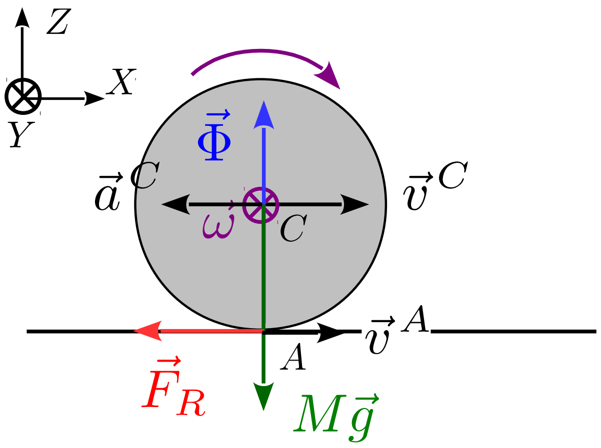
- Rodadura sin deslizamiento: el punto de contacto tiene velocidad nula



$$v^C = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{R\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R\,\omega$$

$$a^C = \frac{\mathrm{d}v^C}{\mathrm{d}t} = R\,\alpha$$

- Valores iniciales $v^C(0) = v^C(0) = v_0$ $\omega(0) = 0$
  - La fuerza de rozamiento se opone al deslizamiento en A



$$I = MR^2/2$$

- Análisis dinámico
  - Fuerzas

$$\vec{\Phi} = N\,\vec{k}$$

$$M\vec{g} = -Mg\,\vec{k}$$

$$\vec{F}_R = -f\,\vec{\imath} = -\mu_d|\vec{\Phi}|\,\vec{\imath}$$

  - Cinemática

$$\vec{v}^C = v\,\vec{\imath} \qquad \vec{a}^C = a\,\vec{\imath}$$

$$\vec{\omega} = \omega\,\vec{\jmath} \qquad \vec{\alpha} = \alpha\,\vec{\jmath}$$

  - T.C.M.

$$M\vec{a}^C = M\vec{g} + \vec{\Phi} + \vec{F}_R$$

$$\vec{\Phi} = Mg\,\vec{k}$$

$$\vec{a}^C = -\mu_d g\,\vec{\imath}$$

$$\vec{v}^C = (v_0 - \mu_d g t)\,\vec{\imath}$$

  - T.M.C.

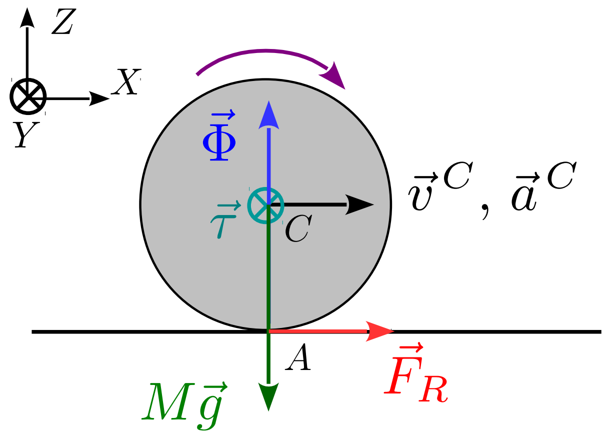
$$I\vec{\alpha} = \overrightarrow{CA} \times \vec{F}_R$$

$$\vec{\alpha} = (2\mu_d g/R)\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{\omega} = t\,(2\mu_d g/R)\,\vec{\jmath}$$

- El rozamiento aumenta la velocidad de rotación, y disminuye la de traslación, hasta que se alcanza la condición de rodadura sin deslizamiento
- A partir de ese momento las aceleraciones se anulan

¿Cuando rueda sin deslizar? $v^C = \omega R \Longrightarrow t_{rod} = v_0/3\mu_d g$



- Valores iniciales $v^C(0) = 0$ $\omega(0) = 0$
  - La fuerza de rozamiento se opone al deslizamiento que crearía en A el par aplicado
- Análisis dinámico
  - Fuerzas y par

$$\vec{\Phi} = N\,\vec{k}$$
$$M\vec{g} = -Mg\,\vec{k}$$
$$\vec{F}_R = f\,\vec{\imath}$$
$$\vec{\tau} = \tau_0\vec{\jmath}$$

  - Cinemática

$$\vec{v}^{\,C} = v\,\vec{\imath} \qquad \vec{a}^{\,C} = a\,\vec{\imath}$$
$$\vec{\omega} = \omega\,\vec{\jmath} \qquad \vec{\alpha} = \alpha\,\vec{\jmath}$$

$$I = MR^2/2$$

  - T.C.M.

$$M\vec{a}^{\,C} = M\vec{g} + \vec{\Phi} + \vec{F}_R$$
$$\vec{\Phi} = Mg\,\vec{k}$$
$$\vec{a}^{\,C} = a_0\,\vec{\imath} = \frac{2\tau_0}{3MR}\,\vec{\imath}$$
$$\vec{v}^{\,C} = a_0 t\,\vec{\imath}$$

  - T.M.C.

$$I\vec{\alpha} = \overrightarrow{CA} \times \vec{F}_R + \vec{\tau}$$
$$\vec{\alpha} = \alpha_0\,\vec{\jmath} = \frac{2\tau_0}{3MR^2}\,\vec{\jmath}$$
$$\vec{\omega} = \alpha_0 t\,\vec{\jmath}$$

- El rozamiento es el responsable de que la rueda avance
- Al tener en cuenta los rozamientos (aire, de rodadura) se alcanza una velocidad constante
- Si el par es demasiado fuerte, la fuerza de rozamiento supera el valor máximo y el disco derrapa

$$|\vec{F}_R| = |M\vec{a}^{\,C}| = \frac{2\tau_0}{3R} \leq \mu_e Mg$$

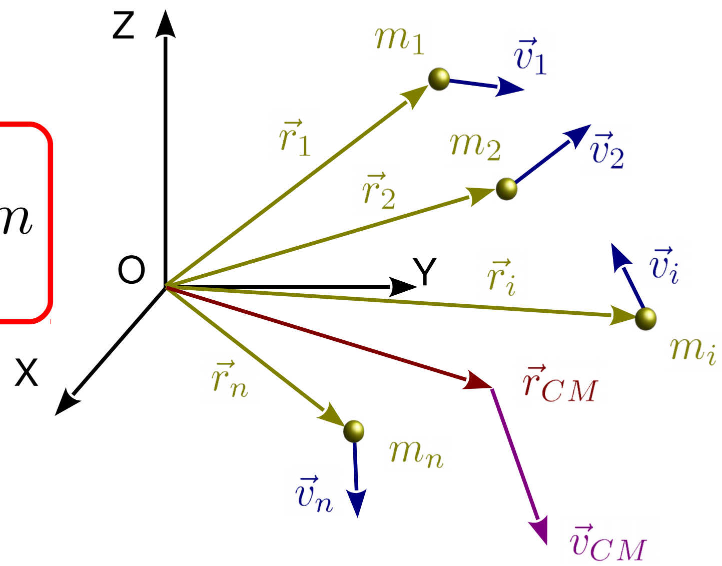
Índice

- Introducción
- Densidades de masa
- Centro de masas
- Teoremas de conservación
  - Cantidad de movimiento
  - Momento cinético
  - Energía
- Colisiones

Energía cinética de un sistema

- La energía cinética del sistema es la suma de la energía cinética de cada una de sus partículas

$$\boxed{T_{sis} = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i\, v_i^2} \qquad \boxed{T_{sis} = \int \mathrm{d}T = \int \frac{1}{2} v^2\ \mathrm{d}m}$$



- Se puede dividir en dos partes

$$\boxed{T_{sis} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + T'}$$

$\frac{1}{2} M v_{CM}^2$ Energía cinética de traslación del CM

$T' = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$ Energía cinética relativa al CM

- La variación de energía cinética es igual al trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre el sistema, tanto internas como externas

$$\Delta T = W^{int} + W^{ext} \qquad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}T_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i^{int} + \vec{F}_i^{ext}\right) \cdot \vec{v}_i$$

- Si las fuerzas internas son conservativas se puede definir una energía potencial interna

$$\Delta U_{int} = W_C^{int}$$

  - Si las fuerzas int. dependen sólo de la posición relativa U_{int} no depende del sistema de referencia
  - En un sólido rígido U_{int} es constante

- En este caso se puede definir una energía interna del sistema

$$E_{int} = T' + U_{int}$$

  - Si las fuerzas int. dependen sólo de la posición relativa E_{int} no depende del sistema de referencia

Energía propia de un sistema

- Si las fuerzas internas son conservativas se puede definir una energía propia del sistema

$$E_{propia} = T_{sis} + U_{int} = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + T' + U_{int}$$

  - T_{sis} incluye la energía cinética de traslación del CM y la energía cinética relativa al CM

- La energía propia del sistema es la suma de la energía interna y la de traslación del CM

$$E_{propia} = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + E_{int}$$

- La variación de la energía propia es igual al trabajo de las fuerzas externas

$$\Delta E_{propia} = W_{ext}$$

  - Dem:

$$\Delta E_{propia} = \Delta(T_{CM} + T' + U_{int}) = \Delta(T + U_{int}) = \Delta T + \Delta U_{int}$$

$$= W^{ext} + \boxed{\cancelto{0}{W^{int}} + \Delta U_{int}} = W^{ext}$$

Energía mecánica de un sistema

- Si además hay fuerzas externas conservativas, se puede definir una energía mecánica asociada al sistema y a las fuerzas externas conservativas

$$E = T + U \ = E_{propia} + U_{ext} \ = E_{int} + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + U_{ext}$$

- Si todas las fuerzas externas que hacen trabajo son conservativas se conserva la energía mecánica del sistema

$$E = E_{propia} + U_{ext} = E_{int} + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + U_{ext} = cte$$

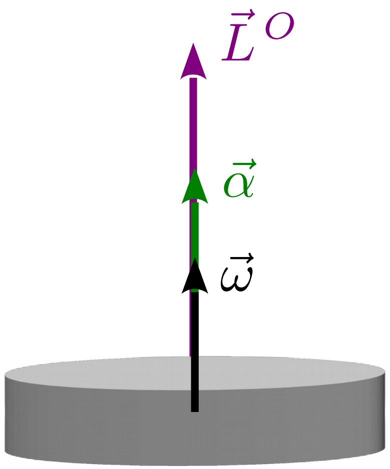
- Si una parte de las fuerzas externas que hacen trabajo son conservativas y otra parte son no conservativas, la energía mecánica del sistema no se conserva

$$\Delta E = \Delta(E_{int} + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + U_{ext}) = W^{NC}$$

- Sólido rígido girando alrededor de un eje fijo de simetría

$$E_{int} = E_c^{rot} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\omega a_i)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \, a_i^2 \right) \omega^2$$

$$\boxed{E_c^{rot} = \frac{1}{2} I_{eje} \, \omega^2}$$



- En un sólido rígido

$$E_{propia} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{eje} \omega^2$$

Cantidad de movimiento $\vec{P} = M\vec{v}_{CM}$

Momento angular $\vec{L}_O = \vec{L}_O^{CM} + \vec{L}'$

Energía cinética $T = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + T'$

Energía interna $E_{interna} = T' + U_{int}$

Energía propia
$$E_{propia} = E_{interna} + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$
$$= T + U_{int}$$

Sólido rígido rotando alrededor de un eje de simetría
$$E_{propia} = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Energía total $E = E_{propia} + U_{ext}$

Variación de **P**
$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{neta}^{ext}$$

Variación de **L**$_O$
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_{O,neta}^{ext}$$

Variación de **L'**
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}'}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_{CM,neta}^{ext}$$
$$\vec{M}_{CM,neta}^{ext} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}'_i \times \vec{F}_i^{ext}$$

Variación de T
$$\Delta T = W^{ext} + W^{int}$$

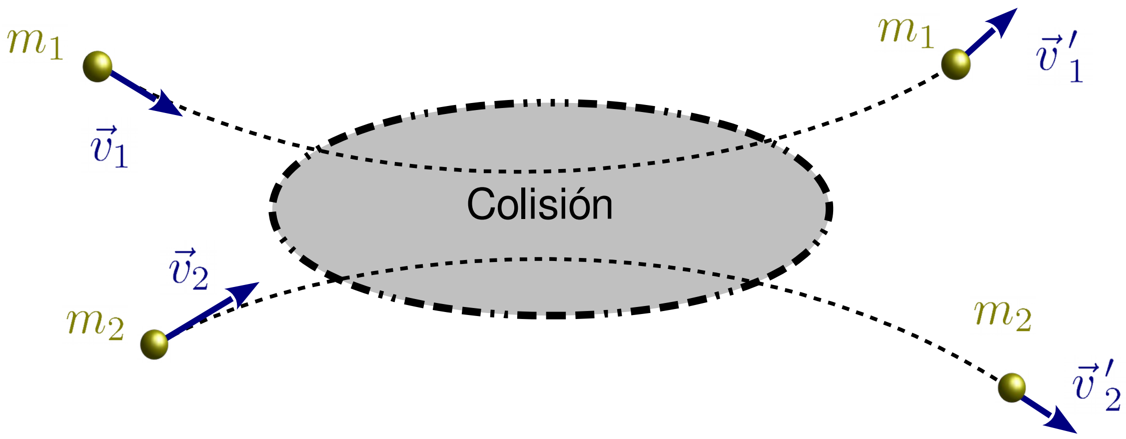
Variación de E$_{propia}$
$$\Delta E_{propia} = W^{ext}$$

Variación de E$_{total}$
$$\Delta E = W^{NC}$$

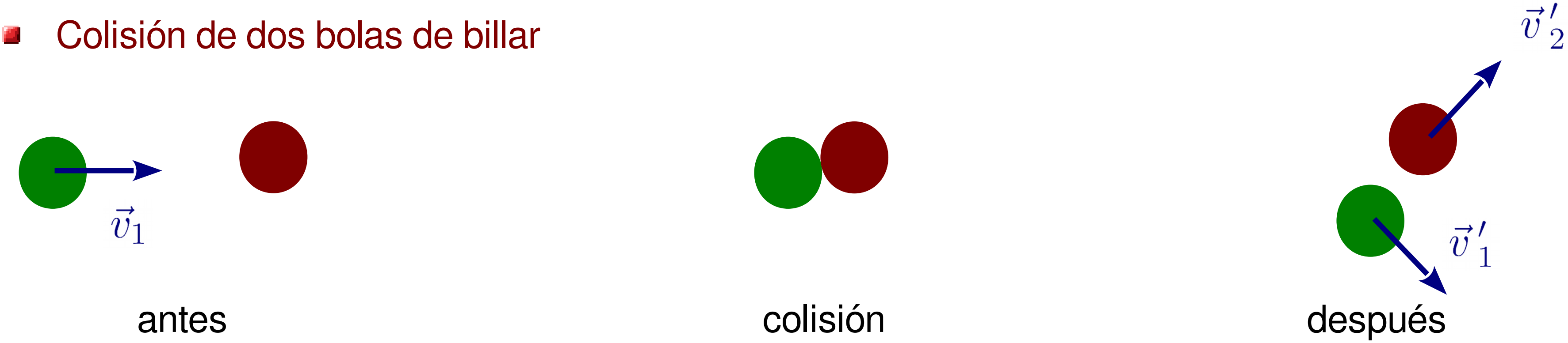
Índice

- Introducción
- Densidades de masa
- Centro de masas
- Teoremas de conservación
  - Cantidad de movimiento
  - Momento cinético
  - Energía
- Colisiones

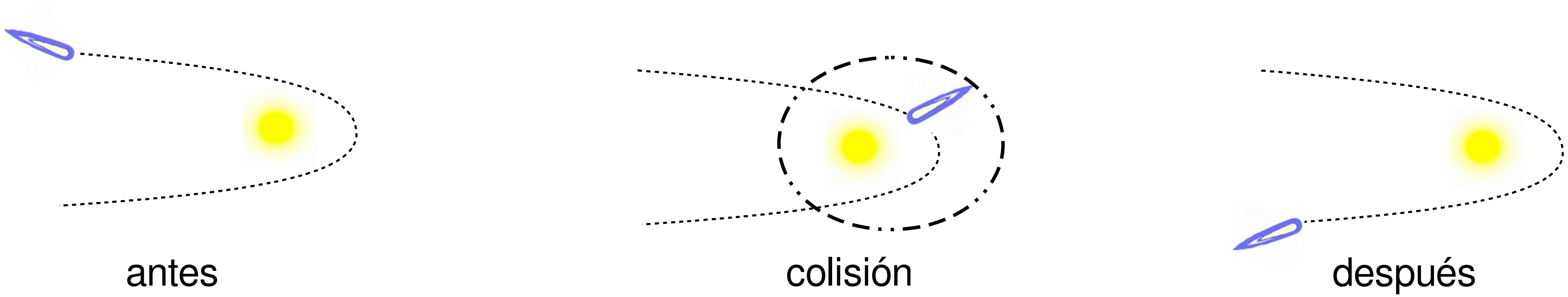
- En una colisión dos objetos se aproximan el uno al otro e interaccionan de manera intensa durante un tiempo muy corto
- Durante la colisión puede despreciarse la influencia de las fuerzas externas y el desplazamiento de los objetos
  - Sólo se tiene en cuenta la interacción entre los cuerpos
  - Antes y después de la colisión la interacción entre los cuerpos es mucho menor que durante el choque
- Una colisión no implica necesariamente contacto entre los cuerpos que chocan



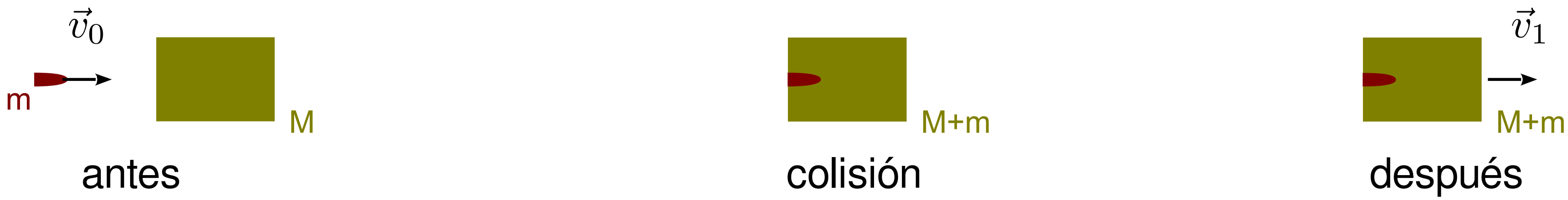
- Ejemplos
  - Colisión de dos bolas de billar



  - Paso de un cometa cerca del Sol



  - Impacto de una bala en un bloque

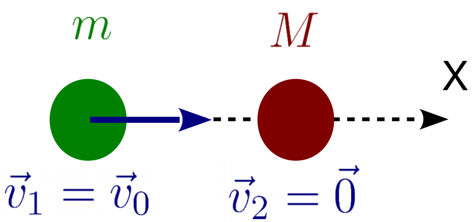


Análisis de colisiones

- Se considera como sistema todos los cuerpos que intervengan en la colisión
- La cantidad de movimiento total del sistema se conserva durante la colisión, es decir, es la misma antes y después de la colisión
  - Las fuerzas externas al sistema no se tienen en cuenta durante la colisión
  - Sólo es cierto si las fuerzas internas cumplen la Tercera Ley de Newton
- Si las fuerzas internas son conservativas, la energía mecánica se conserva en la colisión
  - Elástica: la energía cinética total se conserva (billar)
  - Inelástica: la energía cinética total no se conserva (cometas, aceleración de sondas espaciales)
    - La variación de energía cinética se hace a costa de la energía potencial interna
  - Completamente inelástica: la energía cinética total no se conserva y los dos cuerpos quedan unidos después de la colisión (coche-pared, reacciones químicas, procesos de captura)
  - Coeficiente de restitución: $C_R = -(v_{2\,f} - v_{1\,f})/(v_{2\,i} - v_{1\,i})$
    - $C_R=1$: choque elástico
    - $C_R=0$: choque completamente inelástico (plástico)

- Choque elástico $\quad \vec{P} = \overrightarrow{cte} \qquad T = cte$

Antes



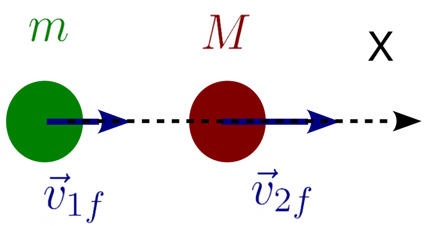
$$\vec{p}_1 = m v_0 \vec{\imath} \qquad \vec{p}_2 = \vec{0}$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m v_0^2 \qquad T_2 = 0$$

$$\boxed{\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m v_0 \vec{\imath}}$$

$$\boxed{T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m v_0^2}$$

Después



$$\vec{p}_{1f} = m v_{1f} \vec{\imath} \qquad \vec{p}_{2f} = M v_{2f} \vec{\imath}$$

$$T_{1f} = \frac{1}{2} m (v_{1f})^2 \qquad T_{2f} = \frac{1}{2} M (v_{2f})^2$$

$$\boxed{\vec{P} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} = (m v_{1f} + M v_{2f}) \vec{\imath}}$$

$$\boxed{T = T_{1f} + T_{2f} = \frac{1}{2} m (v_{1f})^2 + \frac{1}{2} m (v_{2f})^2}$$

Solución

$$\vec{v}_{1f} = v_0 \frac{m - M}{m + M} \vec{\imath}$$

$$\vec{v}_{2f} = v_0 \frac{2m}{m + M} \vec{\imath}$$

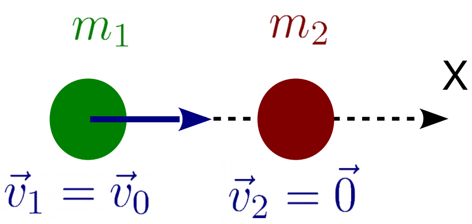
$$m = M \Rightarrow \quad \vec{v}_{1f} = \vec{0} \qquad \vec{v}_{2f} = \vec{v}_0$$

$$m \ll M \Rightarrow \quad \vec{v}_{1f} \simeq -\vec{v}_0 \left(1 - 2m/M\right) \qquad \vec{v}_{2f} \simeq \frac{2m}{M} \vec{v}_0$$

$$m \gg M \Rightarrow \quad \vec{v}_{1f} \simeq \vec{v}_0 \left(1 - 2M/m\right) \qquad \vec{v}_{2f} \simeq 2\vec{v}_0 \left(1 - M/m\right)$$

- Choque completamente inelástico $\qquad \vec{P} = \overrightarrow{cte} \qquad T \neq cte$

Antes



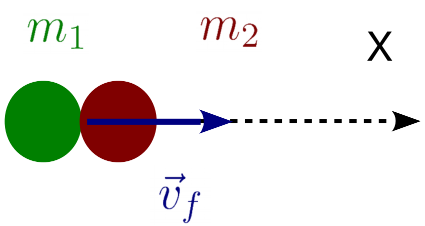
$$\vec{p}_1 = m v_0 \vec{\imath} \qquad \vec{p}_2 = \vec{0}$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m v_0^2 \qquad T_2 = 0$$

$$\boxed{\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m v_0 \vec{\imath}}$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Después



$$\boxed{\vec{P} = (m + M) v_f \vec{\imath}}$$

$$T_f = \frac{1}{2}(m + M)(v_f)^2$$

Solución

$$\vec{v}_f = v_0 \frac{m}{m + M} \vec{\imath}$$

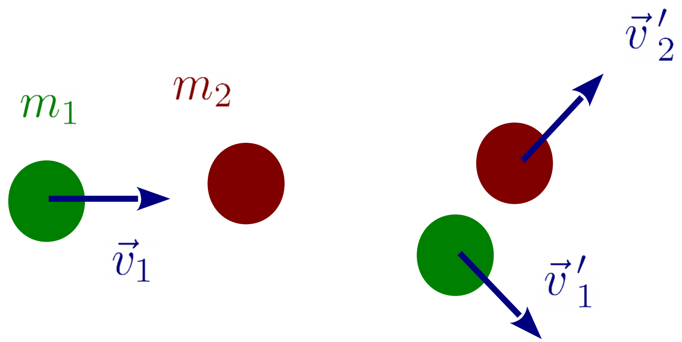
$$\Delta T = -\frac{M}{m + M} \frac{m v_0^2}{2}$$

$$m = M \Rightarrow \vec{v}_f = \vec{v}_0/2 \qquad \Delta T = -T_1/2$$

$$m \ll M \Rightarrow \vec{v}_f \simeq \vec{v}_0 (m/M) \qquad \Delta T \simeq -T_1(1 - m/M)$$

$$m \gg M \Rightarrow \vec{v}_f \simeq \vec{v}_0 \,(1 - M/m) \qquad \Delta T \simeq -T_1(M/m)$$

- En este caso hay más incógnitas que ecuaciones



$\vec{v}\,'_1, \vec{v}\,'_2$ ➡ 4 incógnitas

$\vec{P} = \overrightarrow{cte}, \quad T = cte$ ➡ 3 ecuaciones

- Hay que tener en cuenta los detalles de la interacción durante la colisión
  - Bolas de billar: contacto entre las bolas
  - Cometa acercándose al Sol: interacción gravitatoria
  - Reacciones químicas: interacción eléctrica
  - Colisión de dos coches: deformaciones estructurales