Tema 1: Introducción y fundamentos matemáticos

Antonio González Fernández
Departamento de Física Aplicada III
Universidad de Sevilla

Parte 2/4
Medidas y estimaciones

Una medida es una comparación con una unidad

La física se basa en la realización de medidas

Una medida es una comparación con una unidad que sirve de referencia

P.ej. "Tuve un accidente a mitad de camino"

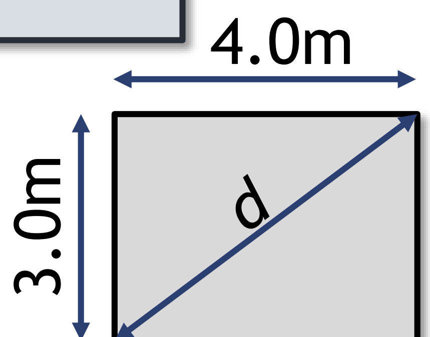
$x = 0.5c$

Medida

Unidad

Las medidas pueden ser directas o indirectas

Directa: evidencia empírica



Indirecta: resultado de un calculo

$$d = \sqrt{4.0^2 + 3.0^2}\mathrm{m} = 5.0\mathrm{m}$$

Puede verificarse

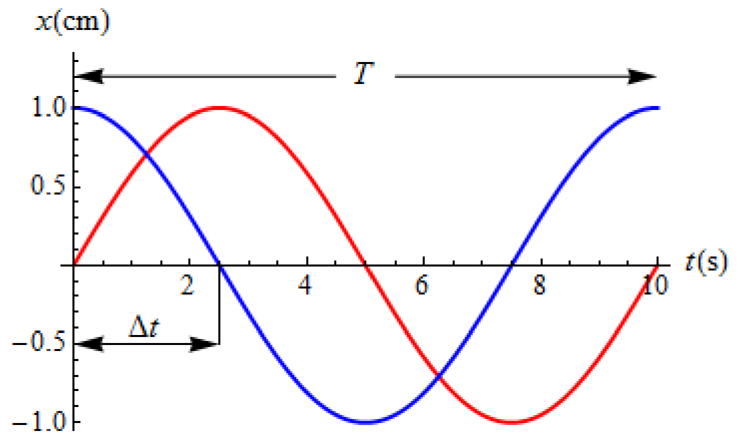
Todas las unidades son arbitrarias, pero algunas son más arbitrarias que otras

A la hora de elegir un patrón hay dos opciones principales:

- Usar una unidad específica para cada problema
- Usar una unidad consensuada por la comunidad

Las específicas simplifican problemas concretos

Ej.: En una oscilación, podemos usar el periodo



$\Delta t = 0.25T$

$\Delta t = 2.5\mathrm{s}$

Para comparar resultados mejor unidades consensuadas

Se define el *segundo* de forma estándar

El Sistema Internacional (otra herencia de la Revolución Francesa)

Por consenso, se define un sistema de unidades basado en siete unidades fundamentales

Magnitud	Unidad	Símbolo
Masa	kilogramo	kg
Longitud	metro	m
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente	amperio	A
Temperatura	kelvin	K
Cantidad de materia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

Se definen a través de procedimientos reproducibles

kg patrón

A partir de las unidades fundamentales se definen las unidades derivadas

Mediante productos y divisiones pueden construirse infinidad de unidades derivadas

$$1\mathrm{N} = 1\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

newton

$$1\mathrm{J} = 1\mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = 1\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

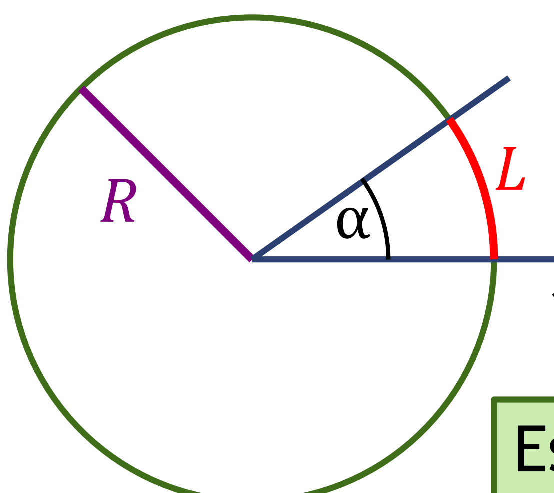
julio

$$1\mathrm{Pa} = 1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 1\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^2}$$

pascal

Caso particular: el radián

¿Como se define un ángulo?



$$\alpha = \frac{L}{R}$$

$$1\mathrm{rad} = \frac{1\mathrm{m}}{1\mathrm{m}} = 1$$

Es adimensional

Es una unidad que puede aparecer o desaparecer a voluntad

Inciso: Hay que saberse el alfabeto griego ("versión física")

Letra	Min.	May.	Letra	Min.	May.
alfa	α	A	nu	ν	N
beta	β	B	xi	ξ	Ξ
gamma	γ	Γ	ómicron	o	O
delta	δ	Δ	pi	π	Π
épsilon	ϵ	E	rho	ρ	P
dseta	ζ	Z	sigma	σ	Σ
eta	η	H	tau	τ	T
theta	θ	Θ	ípsilon	υ	ϒ
iota	ι	I	phi	ϕ, φ	Φ
kappa	κ	K	chi	χ	X
lambda	λ	Λ	psi	ψ	Ψ
mu	μ	M	omega	ω	Ω

Los prefijos permiten expresar múltiplos de una unidad

Las unidades del SI puede ser demasiado grandes o pequeñas

Radio de Bohr:
$r = 0.0000000000529\text{m}$

Notación científica

$r = 5.29 \times 10^{-11}\text{m}$

Mantisa

Orden de magnitud

Se abrevia usando prefijos

Prefijo	Símbolo	Valor
deca	da	10^1
hecto	h	10^2
kilo	k	10^3
mega	M	10^6
giga	G	10^9
tera	T	10^{12}

Prefijo	Símbolo	Valor
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}

Radio de Bohr, $r =$
$= 0.0529\text{nm}$
$= 52.9\text{pm}$

Cambio de unidades: factores de conversión

Aun se usan muchas otras unidades

$1\text{in} = 2.54\text{cm}$

$1\text{milla} = 1609.344\text{m}$

$1\text{ly} = 9460730472580.8\text{km} \approx 10^{16}\text{m}$

Año-luz

Siempre es deseable usar el SI

Factores de conversión: valen 1

$\frac{1\text{in}}{2.54\text{cm}}$ $\frac{1\text{h}}{3600\text{s}}$ $\frac{1000\text{m}}{1\text{km}}$ $\frac{4.48222\text{N}}{1\text{lb}_f}$

Para cambiar de unidades se multiplica por los factores

$$1\frac{\text{km}}{\text{h}} = 1\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \times \left(\frac{1\cancel{\text{h}}}{60\cancel{\text{min}}}\right) \times \left(\frac{1\cancel{\text{min}}}{60\text{s}}\right) \times \left(\frac{1000\text{m}}{1\cancel{\text{km}}}\right) = \frac{10}{36}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0.278\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplos de cambio de unidades

Nudo

Milla náutica

$$1\text{kn} = 1\frac{\cancel{\text{M}}}{\cancel{\text{h}}} \times \left(\frac{1852\text{m}}{1\cancel{\text{M}}}\right) \times \left(\frac{1\cancel{\text{h}}}{3600\text{s}}\right) = 0.5144\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

psi

Libra

¡Ojo!

$$1\text{psi} = 1\frac{\cancel{\text{lb}_f}}{\cancel{\text{in}^2}} \times \left(\frac{4.48222\text{N}}{1\cancel{\text{lb}_f}}\right) \times \left(\frac{1\cancel{\text{in}}}{2.54\cancel{\text{cm}}}\right)^2 \times \left(\frac{100\cancel{\text{cm}}}{1\text{m}}\right)^2 = 6894.76\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Pulgada

Pascal (Pa)

año-luz

$$1\text{ly} = 3 \times 10^5\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{s}}} \times 1\cancel{\text{yr}} \times \left(\frac{365.25\cancel{\text{d}}}{1\cancel{\text{yr}}}\right) \times \left(\frac{24\cancel{\text{h}}}{1\cancel{\text{d}}}\right) \times \left(\frac{3600\cancel{\text{s}}}{1\cancel{\text{h}}}\right) \times \left(\frac{1000\text{m}}{1\cancel{\text{km}}}\right)$$

$$= 9460730472580800\text{m} \cong 9.5 \times 10^{15}\text{m} \sim 10^{16}\text{m}$$

Las dimensiones de una magnitud van más allá de las unidades concretas

En la ecuación $x = v_0 t$, x puede medirse en cm, m, millas,… y t en s, años,… y la ecuación sigue siendo cierta

x tiene **dimensiones** de longitud y t de tiempo y eso es independiente de las unidades que se empleen

Las dimensiones de una magnitud derivada se hallan multiplicando o dividiendo a partir de una ley física

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow [v] = \frac{[\Delta x]}{[\Delta t]} = \frac{L}{T}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow [a] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \frac{L/T}{T} = \frac{L}{T^2}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow [\vec{F}] = [m][\vec{a}] = M\frac{L}{T^2} \Rightarrow 1\mathrm{N} = 1\,\frac{\mathrm{kg{\cdot}m}}{\mathrm{s}^2}$$ newton

Dimensiones de magnitudes en mecánica

Magnitud	Ecuación	Dimensiones	Unidad SI
Velocidad	$v = \Delta x/\Delta t$	$[v] = L/T$	1m/s
Aceleración	$a = \Delta v/\Delta t$	$[a] = L/T^2$	$1 m/s^2$
Fuerza	$F = ma$	$[F] = [m][a] = ML/T^2$	$1N = 1kg \cdot m/s^2$
Trabajo	$W = F \cdot \Delta x$	$[W] = [F][\Delta x] = ML^2/T^2$	$1J = 1kg \cdot m^2/s^2$
Energía	$K = mv^2/2$	$[K] = [m][v]^2 = ML^2/T^2$	$1J = 1kg \cdot m^2/s^2$
Potencia	$P = W/\Delta t$	$[P] = [W]/[\Delta t] = ML^2/T^3$	$1W = 1kg \cdot m^2/s^3$
Frecuencia	$f = 1/T$	$[f] = 1/T$	$1Hz = 1s^{-1}$

Homogeneidad dimensional: no se pueden sumar peras con manzanas

¿Pueden sumarse…

centimetros con millas? SI

centímetros con años? NO

¿Puede la diagonal de una baldosa ser igual a 15 segundos?

Principio de homogeneidad dimensional:

En toda suma o igualdad las magnitudes deben tener las mismas dimensiones

No hace falta que aparezcan las unidades

$$\cancel{\Delta x = 1.5\text{cm} + 2.3\text{s}}$$

$$\Delta x = 2.0\text{cm} - 3\text{mm}$$ ✓

$$\cancel{\Delta x = x_0 + t}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$ ✓

En las ecuaciones, los símbolos tienen dimensiones (y unidades)

Un movimiento sigue la ecuación

$$x = A(\mathrm{e}^{Bt} - C)$$

¿Dimensiones de A, B y C?

e^{Bt} es adimensional

$[C] = 1$

$[B] = 1/T$

$[A] = L$

Un oscilador amortiguado experimenta la fuerza

$$F = -kx - \gamma v$$

¿Unidades SI de k y γ?

$$[k] = \frac{[F]}{[x]} = \frac{ML/T^2}{L} = \frac{M}{T^2}$$

$$k\!: \ 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = 1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$$

$$[\gamma] = \frac{[F]}{[v]} = \frac{ML/T^2}{L/T} = \frac{M}{T}$$

$$\gamma\!: \ 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m/s}} = 1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

La comprobación de dimensiones permite detectar fórmulas erróneas

¿Cuál de las siguientes fórmulas es incorrecta con seguridad?

A $$W = \frac{1}{2} m v^2 + g y$$

B $$v = \frac{x-1}{t-2}$$

C $$P = \frac{m\left((v^2/R) - a\right)}{t-(x/v)}(x - \pi R^2)$$

D $$\int_0^T \vec{F}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} + m\vec{a}t$$

E $$\int_0^T \left(P - \vec{F}\cdot\vec{v}\right)\mathrm{d}t = mgh + \frac{p^2}{2m}$$

F $$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\left(P - \vec{v}\cdot(\vec{a}+\vec{p}/m)\right)}{v^2}\mathrm{d}t = \frac{m\left(t-(2/t)\right)}{v}$$

G $$\vec{r}\times\vec{L} = R^2\vec{p}$$

H $$\overrightarrow{M} = \vec{r}\times\vec{F} + \vec{v}\times\vec{p}$$

A	B	C	D	E	F	G	H
✗	✗	✗	✗	✓	✗	✓	✓

Expresión de una medida: cifras significativas

Toda medida, directa o indirecta, es incierta

Una medida nunca puede ser exacta por:

- Precisión del aparato de medida
- Limitaciones del proceso de medición
- Factores externos no considerados

Toda medida tiene una cantidad de cifras significativas

≠ nº decimales

297mm — 3 cifras significativas

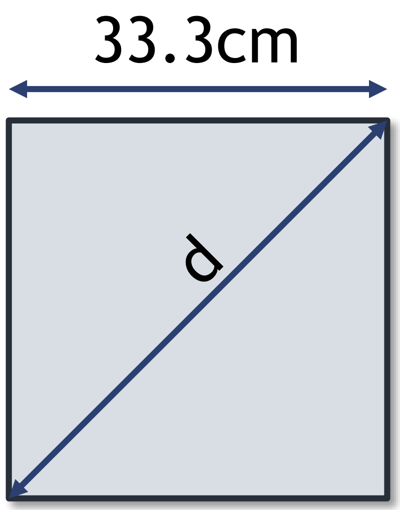
0.297m — 29.7cm — 0.000297km

Se aprecia mejor con la notación científica

R_T=6400km — ¿2? ¿3? ¿4? — $R_T=6.4\times10^3$km — 2 cifras

Las medidas indirectas también son inciertas

No podemos obtener más precisión que la que dan los datos de partida (En informática: *garbage in*, *garbage out*)



¿Cuanto mide la diagonal de la baldosa?

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488\ldots$$

1. 50cm
2. 47.0933116270241cm
3. 47.1cm
4. 47.093312cm

A falta de más información, un cálculo típico en los problemas tiene 3 cifras significativas

Incertidumbre de una medida: en la vida no hay nada seguro

El margen de error de una medida da una estimación de la incertidumbre de esta

Una medida tiene una probabilidad >95% de estar en el intervalo

$x \in (2.12\text{m}, 2.16\text{m})$

$x = 2.14 \pm 0.02\text{m}$ ⇒ $x = 2.14(2)\text{m}$

Forma compacta

Medida

Incertidumbre

Lo del paréntesis afecta a la(s) última(s) cifra(s)

Orden de magnitud

Valor medido más reciente:

$$G = 6.67384(80) \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

Unidades

La incertidumbre se propaga en los cálculos sucesivos

¿Cuál es el volumen de una pelota de golf?

Medimos su diámetro

$$D = 4.285 \pm 0.005\text{cm}$$

$$D_m = 4.280\text{cm}$$

$$D_M = 4.290\text{cm}$$

$$V = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{\pi}{6}D^3$$

$$V_m = 41.05158495\text{cm}^3$$

$$V_M = 41.34000253\text{cm}^3$$

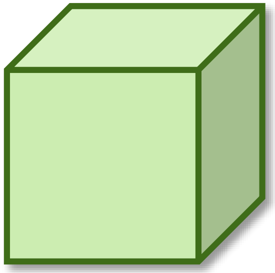
$$V = \frac{V_m + V_M}{2} = 41.19579374\text{cm}^3$$

$$E_V = \left|\frac{V_M - V_m}{2}\right| = 0.1442087894\text{cm}^3$$

$$V = 41.20(14)\text{cm}^3$$

El tamaño de la incertidumbre da el número de cifras significativas que se conservan

Ejemplo: incertidumbre en el volumen de un cubo



La arista mide 1m con una incertidumbre de 1cm. ¿Cuál es la incertidumbre del volumen?

A. 3 cm³
B. 100 cm³
C. 1 cm³
D. 30000 cm³

$$a = 1.00(1)\mathrm{m} = (1.00 \pm 0.01)\mathrm{m}$$

$$a_m = 99\mathrm{cm}$$

$$a_M = 101\mathrm{cm}$$

$$V_m = a_m^3 = 970299\mathrm{cm}^3$$

$$V_M = a_M^3 = 1030301\mathrm{cm}^3$$

$$V = \frac{V_m + V_M}{2} = 1000300\mathrm{cm}^3 = 1.000300\mathrm{m}^3$$

$$E_V = \left|\frac{V_M - V_m}{2}\right| = 30001\mathrm{cm}^3 = 0.030001\mathrm{m}^3$$

$$V = 1.00(3)\mathrm{m}^3$$

El orden de magnitud de una cantidad permite saber por donde anda

A menudo no conocemos el valor de una medida, pero sí podemos estimar su orden de magnitud

Ej.: masa de una persona

Mayor que 10kg

Menor que 1000kg

m~100kg

O. de m. ≠ medida

Es importante saber estimar el orden de magnitud de un resultado y tener espíritu crítico

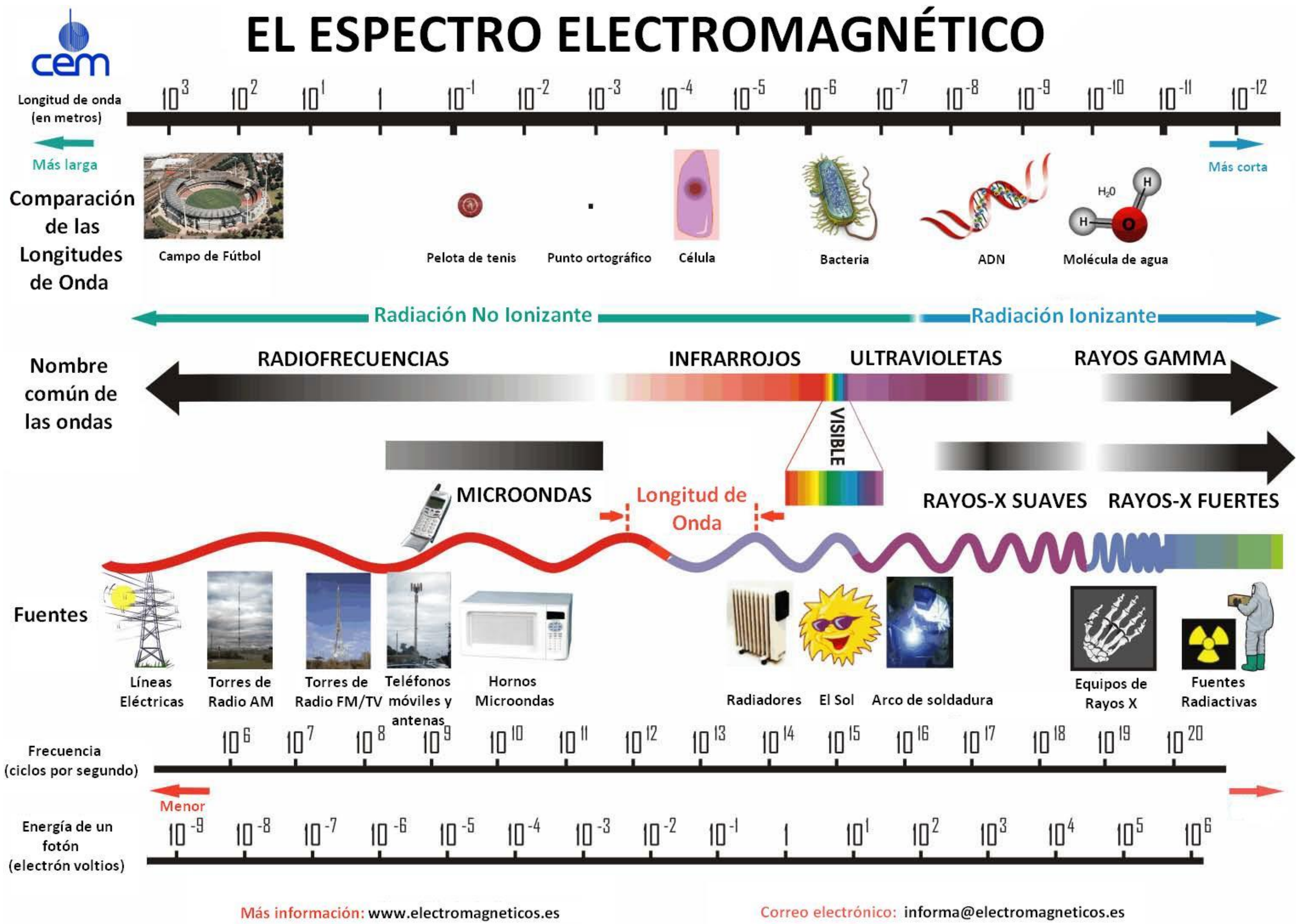
¿Cuánto tarda en derretirse 0.5kg de hielo puesto a temperatura ambiente?

¿4 segundos?

¿Media hora?

¿11000 años?

Los órdenes de magnitud van por décadas 10^3, 10^4, 10^5,...

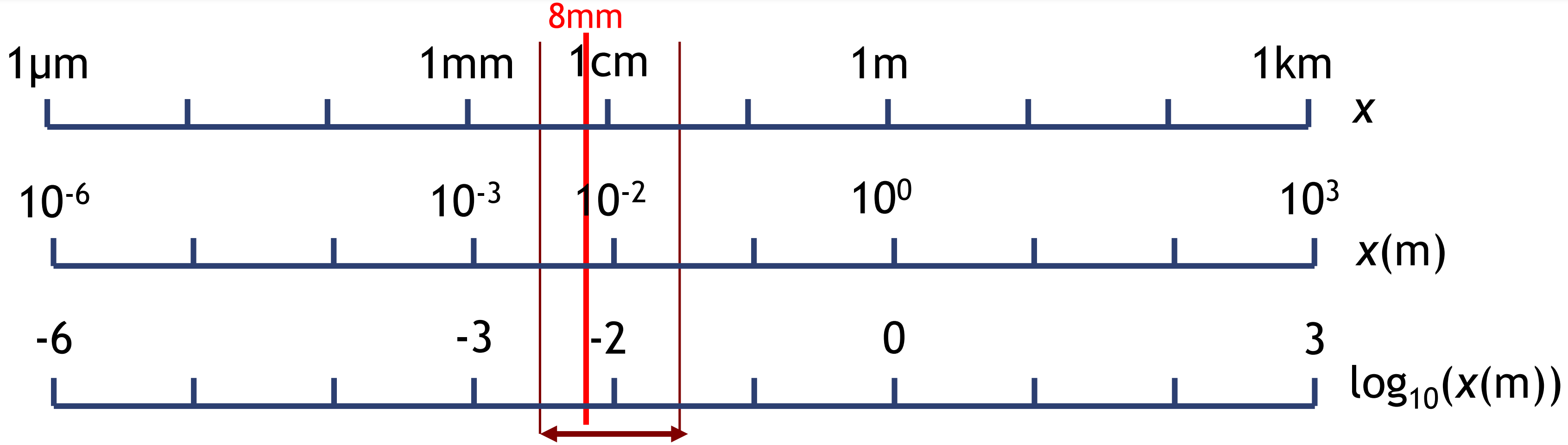


¿Cuándo dos valores son del mismo orden? ¿Da lo mismo 8 que 80?

Un resultado puede ser “del orden de cm” o “del orden de mm”,...

¿De qué orden es 8mm?

Los órdenes de magnitud forman una escala logarítmica



x es del orden de cm si está a menos de medio orden de magnitud

$$10^{0.5} = 3.16 \sim 3$$

Entre 3mm y 3cm es del orden del cm

$$x \sim y$$
$$0.3 < \frac{y}{x} < 3$$

Estimaciones: el arte de hacer los cálculos a ojo de buen cubero

En muchos casos puede saberse el orden de magnitud de los resultados haciendo hipótesis razonables

¿Cuanta gasolina se gasta en España al año?

Pob: 47 Mpersonas

$N \sim 10^7 \text{coches}$

$c \sim \frac{10\text{L}}{100\text{km}}$

$d \sim 10^4 \text{km}$

$C \sim 10^7 \times 10^4 \times 0.1\text{L} \sim 10^{10}\text{L}$

Ex: $C \simeq 5.5 \times 10^9 \text{L}$

¿Masa de la Tierra?

$M = V\rho = 4\pi \frac{R^3}{3} \rho$

$\rho \sim \frac{1000\text{kg}}{\text{m}^3}$ H_2O

$R \sim 10000\text{km} \sim 10^7 \text{m}$

$M \sim 10^3 \times (10^7)^3 \text{kg} = 10^{24} \text{kg}$

ex: $M = 5.97219 \times 10^{24} \text{kg}$

Sevilla, septiembre de 2014