



# Tema 11: Movimiento oscilatorio

FISICA I, 1º, Grado en Ingeniería Electrónica, Robótica y  
Mecatrónica

Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

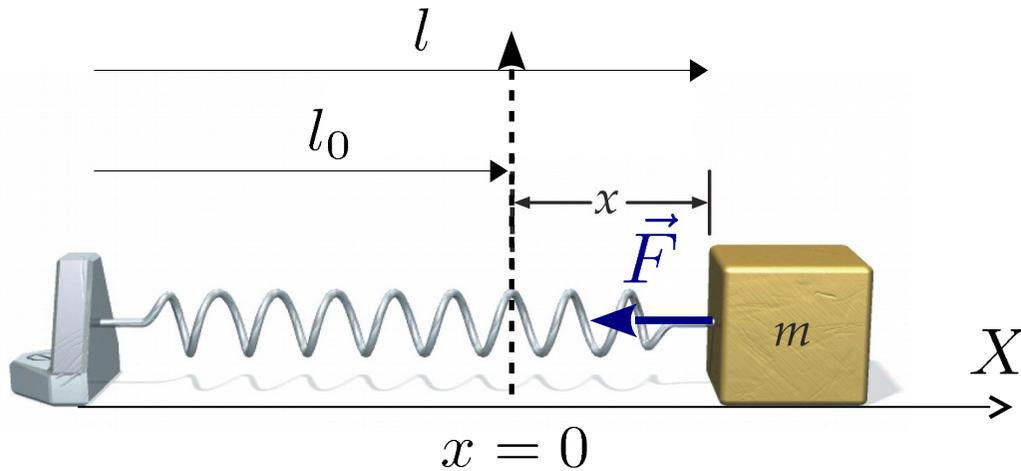
- **Introducción**
- Representación matemática del MAS
  - **Ejemplos: muelle, péndulo simple**
- Energía
- Oscilaciones amortiguadas
- Otras aplicaciones del MAS
- Oscilaciones forzadas: resonancia

- Movimiento periódico: la posición, velocidad y aceleración del cuerpo **se repiten** cada cierto intervalo de tiempo
- Ejemplos
  - Barca en el mar
  - Bandera al viento
  - Péndulo de un reloj
  - Moléculas en un sólido
  - Voltaje e intensidad en circuitos de corriente alterna
- En general cualquier objeto desplazado ligeramente de una posición de equilibrio realiza un movimiento periódico

- El tipo más básico de movimiento periódico es el **movimiento armónico simple (MAS)**
  
- ¿Por qué interesa estudiar el MAS?
  - Ejemplo sencillo de movimiento oscilatorio
  - Aproximación válida en muchos casos de movimiento oscilatorio
  - Movimientos oscilatorios más complejos pueden expresarse como la combinación de varios MAS

- Introducción
- Representación matemática del MAS
  - Ejemplos: muelle, péndulo simple
- Energía
- Oscilaciones amortiguadas
- Otras aplicaciones del MAS
- Oscilaciones forzadas: resonancia

- Cuerpo unido a un muelle



$$\vec{F} = -k(l - l_0) \vec{i} = -kx \vec{i}$$

- Constante del muelle  $k$
- Fuerza restauradora proporcional al desplazamiento

- Segunda Ley de Newton en una dimensión

$$F = ma = m\ddot{x} = -kx$$



$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

Ecuación diferencial del MAS

Si la ecuación de un movimiento tiene esa forma, es un MAS

- Problema

- Ecuación diferencial  $\ddot{x} = -\omega^2 x$   $\omega^2 = \frac{k}{m}$

- Condiciones iniciales  $x(t = 0) = x_0$   $\dot{x}(t = 0) = v_0$

- Solución general

- Forma 1  $x(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \text{sen}(\omega t)$

- Forma 2  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

- Relación

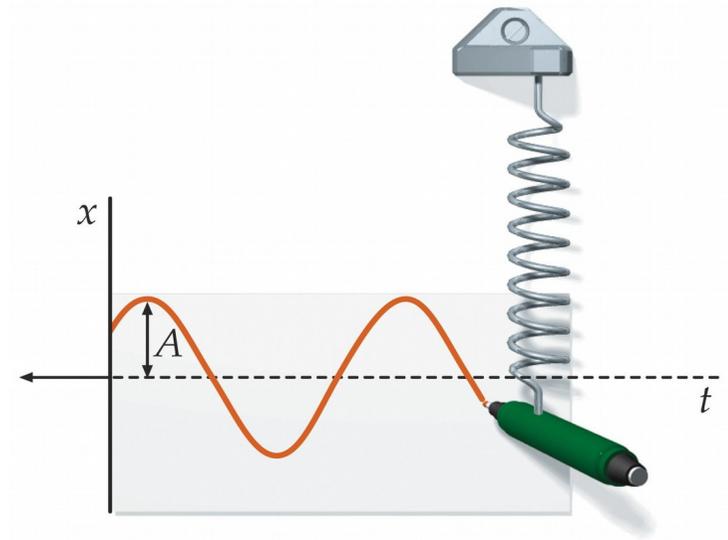
$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) = \underbrace{(A \cos \Phi)}_{a_1} \cos(\omega t) + \underbrace{(-A \text{sen} \Phi)}_{a_2} \text{sen}(\omega t)$$

- Forma 2b  $x(t) = \text{Re} \left( A e^{i(\omega t + \phi)} \right) = \text{Re} \left( A e^{i\phi} e^{i\omega t} \right) = \text{Re} \left( \tilde{A} e^{i\omega t} \right)$   
 $\tilde{A} = A e^{i\phi}$

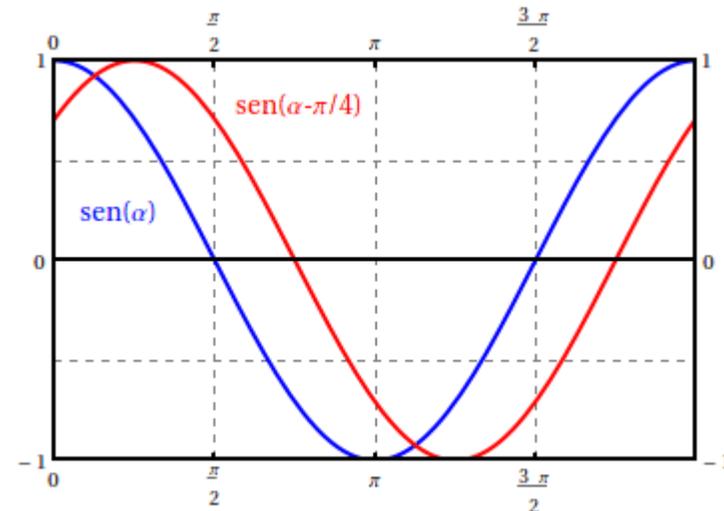
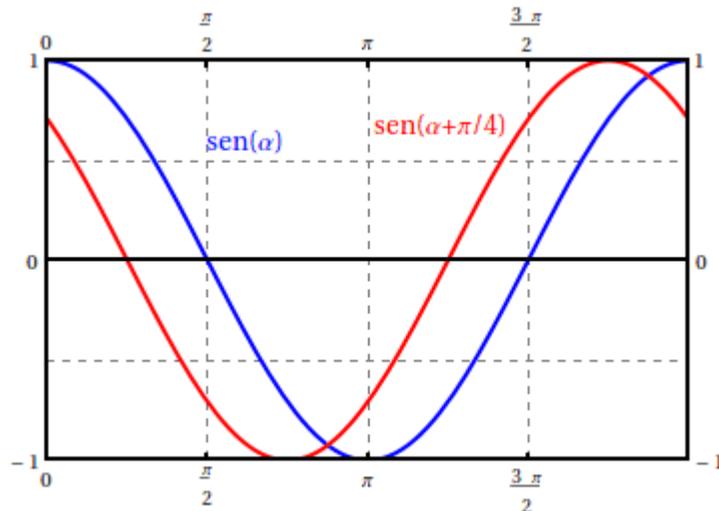
- Significado físico de las constantes

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

- A es la amplitud
- $\omega$  es la frecuencia angular
- $\phi$  es la constante de fase



- La constante de fase indica cuando “comienza” la función



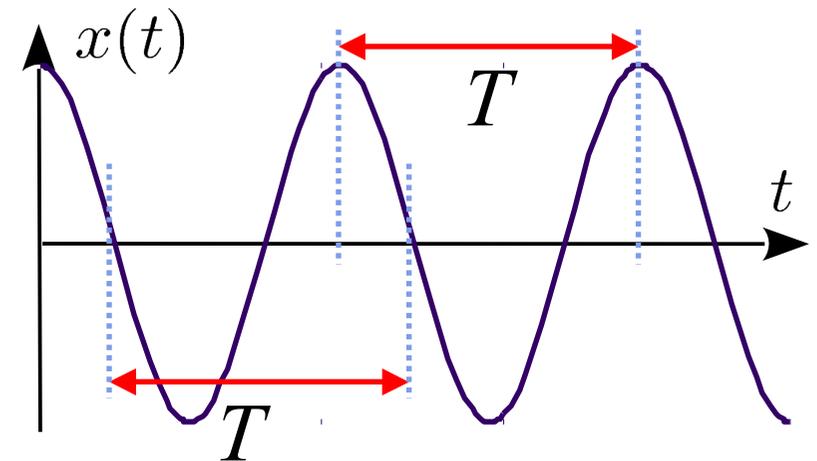
- Período: es el tiempo necesario para completar una oscilación

$$x(t) = x(t + T) = A \cos(\omega(t + T) + \phi) = A \cos(\omega t + \phi + \omega T)$$

$$\omega T = 2\pi \quad \longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad [T] = \text{s}$$

- Frecuencia: número de oscilaciones por segundo

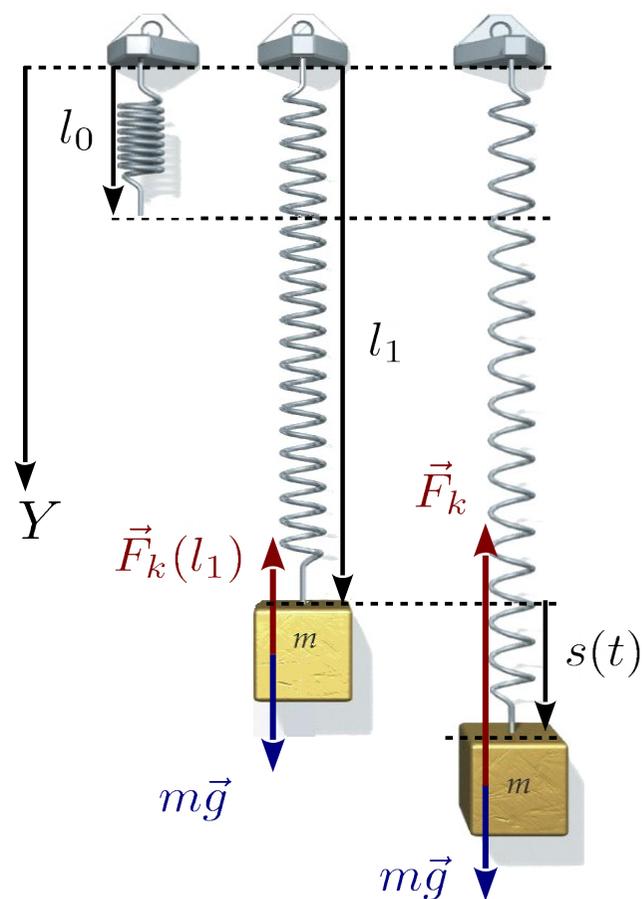
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad [f] = \text{Hz} = \text{s}^{-1}$$



- Frecuencia – frecuencia angular

$$\omega = 2\pi f$$

# Ejemplos: muelle vertical



- Muelle de longitud natural  $l_0$
- Una masa colgando en equilibrio

$$m\vec{g} - k(l_1 - l_0)\vec{j} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad l_1 = l_0 + \frac{mg}{k}$$

- Se tira de la masa y se suelta

$$m\vec{g} - k(l(t) - l_0)\vec{j} = m\vec{a} \quad \left| \quad \begin{array}{l} l(t) = l_1 + s(t) \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \ddot{s} = -\frac{k}{m}s \quad \text{MAS}$$

- Problema de movimiento

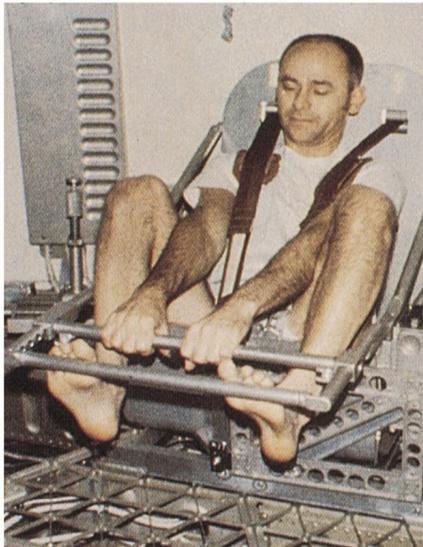
$$\ddot{s} = -\frac{k}{m}s \quad s(0) = a \quad \dot{s}(0) = v_0$$

- Solución

$$s(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad \omega = \sqrt{k/m} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- La frecuencia no depende de la amplitud ni de la velocidad inicial

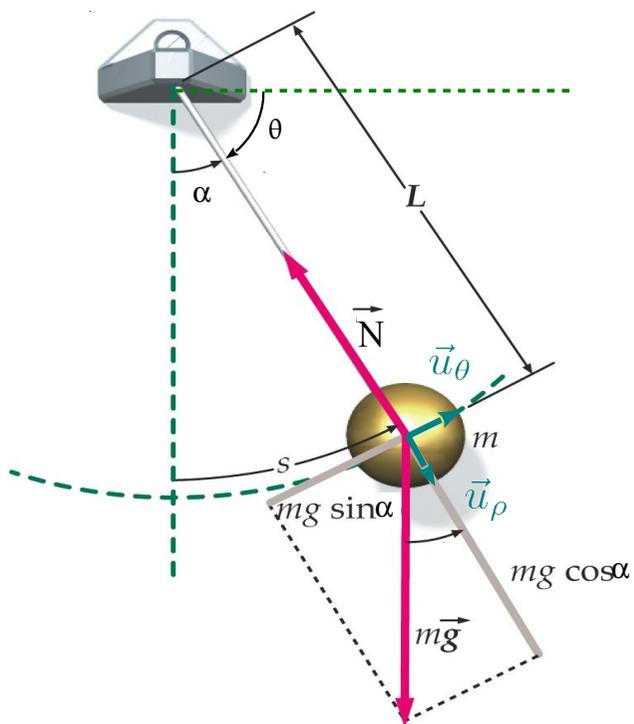
- El hecho de que la frecuencia no dependa de la amplitud ni la velocidad inicial tiene aplicaciones interesantes
  - Medida de masas a partir del período de oscilación



El astronauta Alan L. Bean midiendo su masa en el segundo viaje del Skylab (1973)

- En los instrumentos musicales la frecuencia del sonido no depende de la fuerza con que se pulse la cuerda o se apriete la tecla de un piano

# Ejemplos: péndulo simple



- Cuerda ligera  $m_{cuerda} \ll m$

- Segunda Ley de Newton

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

$$\vec{a} = -L\dot{\alpha}^2 \vec{u}_\rho + L\ddot{\alpha} \vec{u}_\theta$$

$$m\vec{g} = mg \cos \alpha \vec{u}_\rho - mg \sin \alpha \vec{u}_\theta$$

$$\vec{N} = -N \vec{u}_\rho$$

- Ángulo pequeño  $\sin \alpha \simeq \alpha$

- Problema

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{L}\alpha \quad \text{MAS}$$

$$\alpha(0) = \alpha_0$$

$$\dot{\alpha}(0) = v_0/L$$

- Solución

$$\alpha(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{g/L}$$

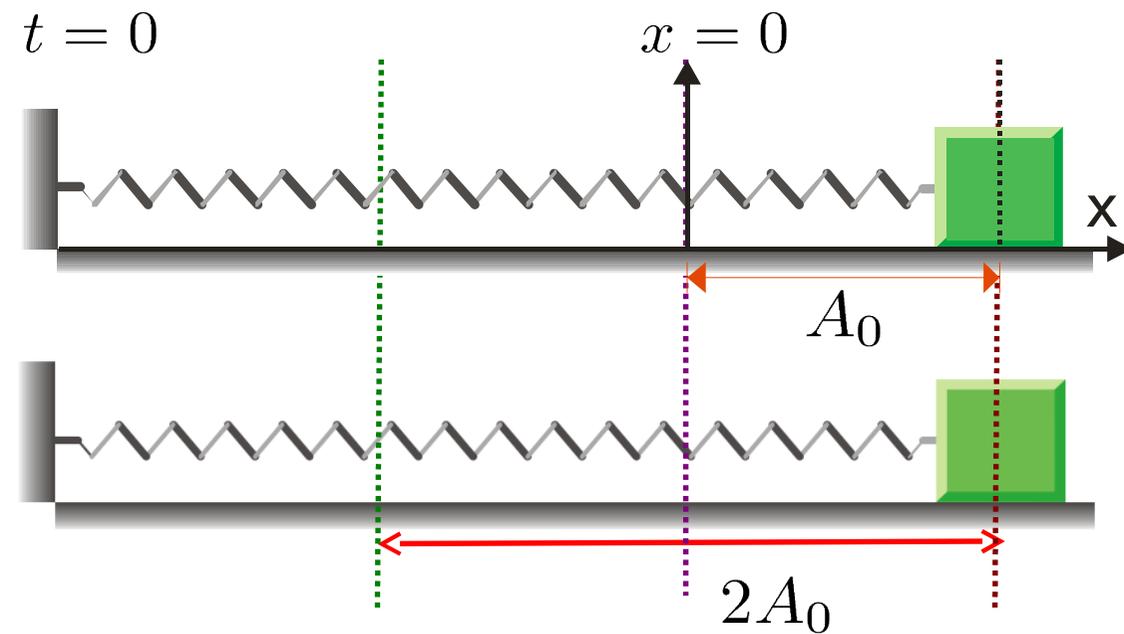
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

- La frecuencia no depende de la amplitud ni de la masa ni de la velocidad inicial

- El hecho de que la frecuencia de oscilación no dependa de la amplitud ni de la masa tiene aplicaciones interesantes
  - Técnica sencilla para calcular la aceleración de la gravedad
  - Medida del tiempo: péndulo de un reloj

- Aplicación de las condiciones iniciales



$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\begin{cases} x(0) = A \cos(\phi) = A_0 \\ v(0) = \dot{x}(0) = -A\omega \sin(\phi) = 0 \end{cases}$$

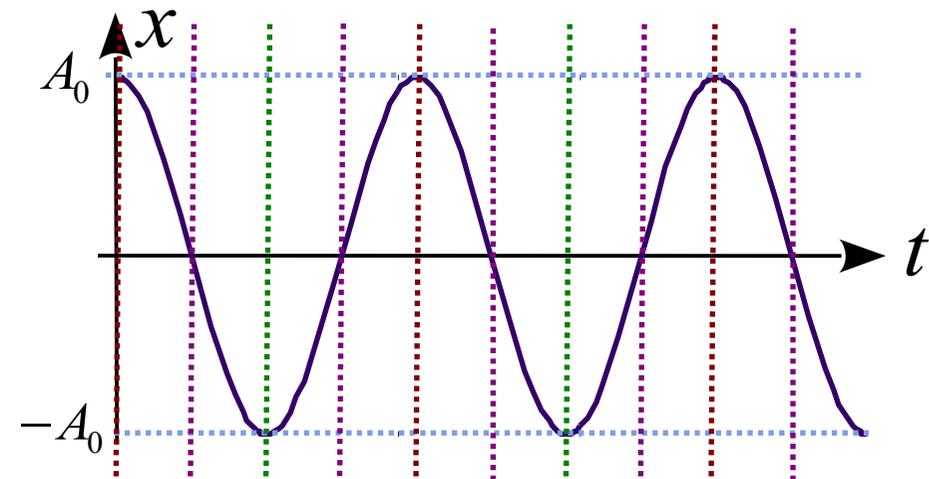


$$A = A_0$$

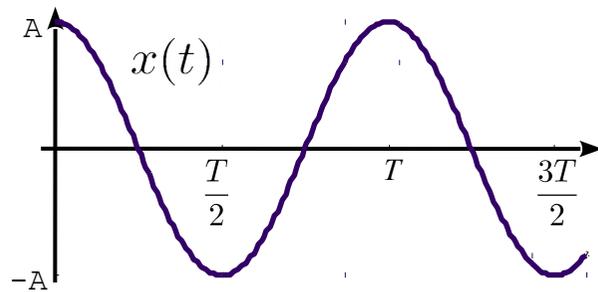
$$\phi = 0$$

- Representación gráfica

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t)$$



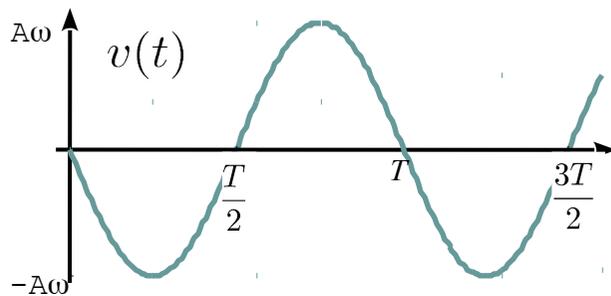
## ■ Posición



$$x(t) = A_0 \cos(\omega t)$$

- Amplitud máxima:  $A_0$

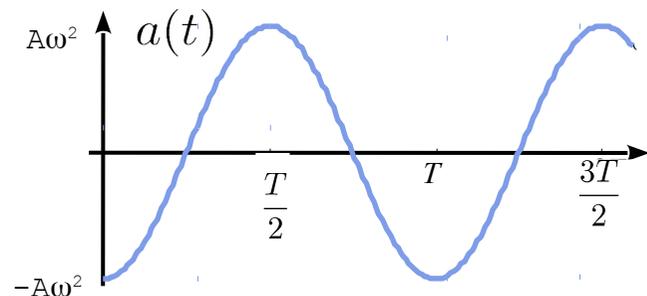
## ■ Velocidad



$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega A_0 \sin(\omega t) = \omega A_0 \cos(\omega t + \pi/2)$$

- Velocidad máxima:  $\omega A_0$
- Desfase de  $\pi/2$  con la posición

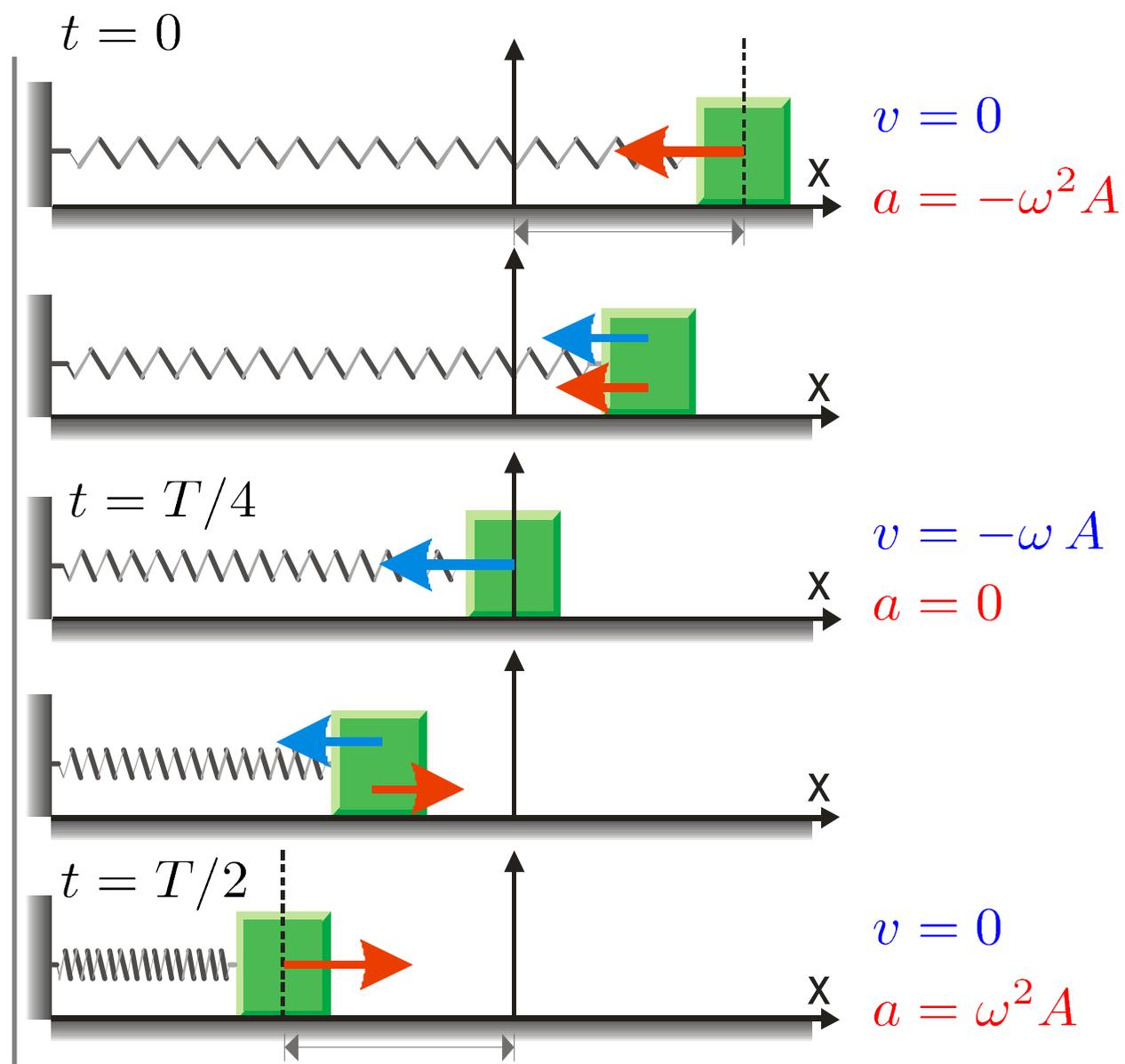
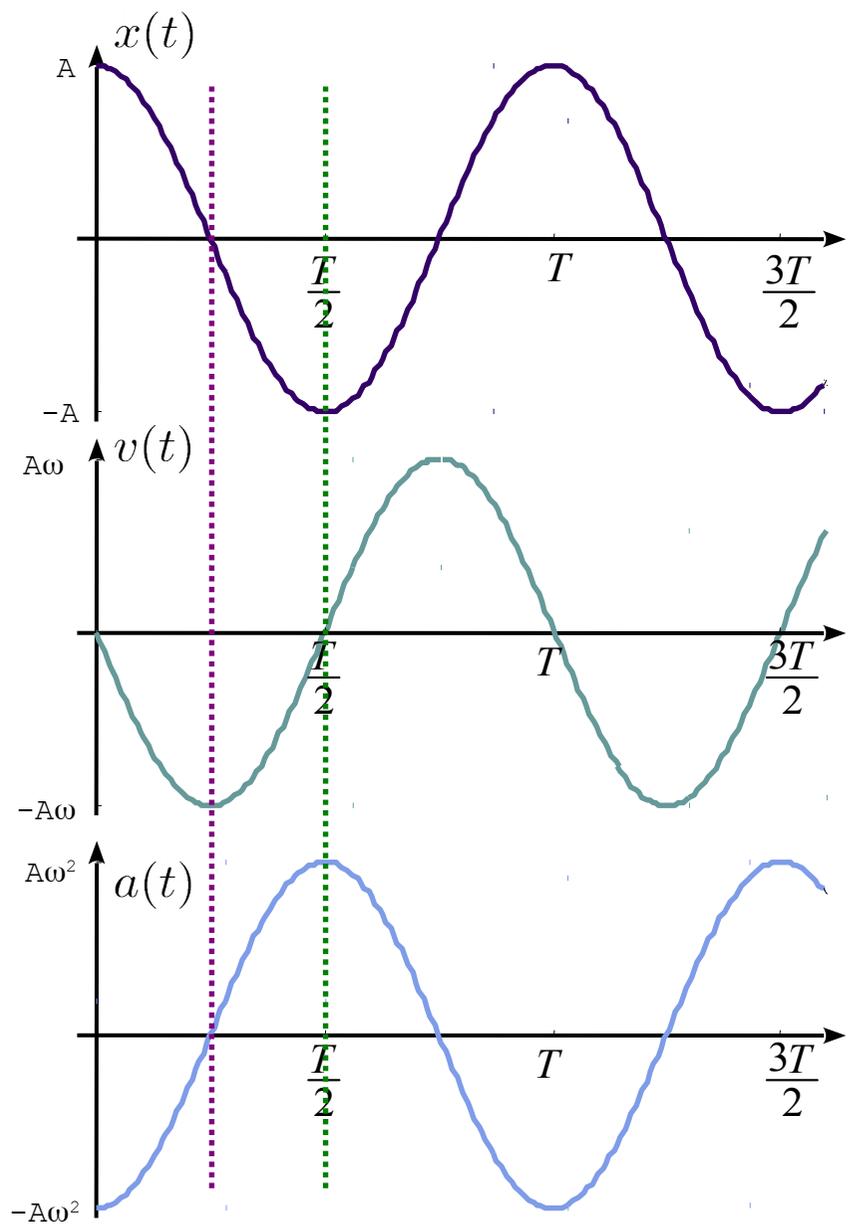
## ■ Aceleración



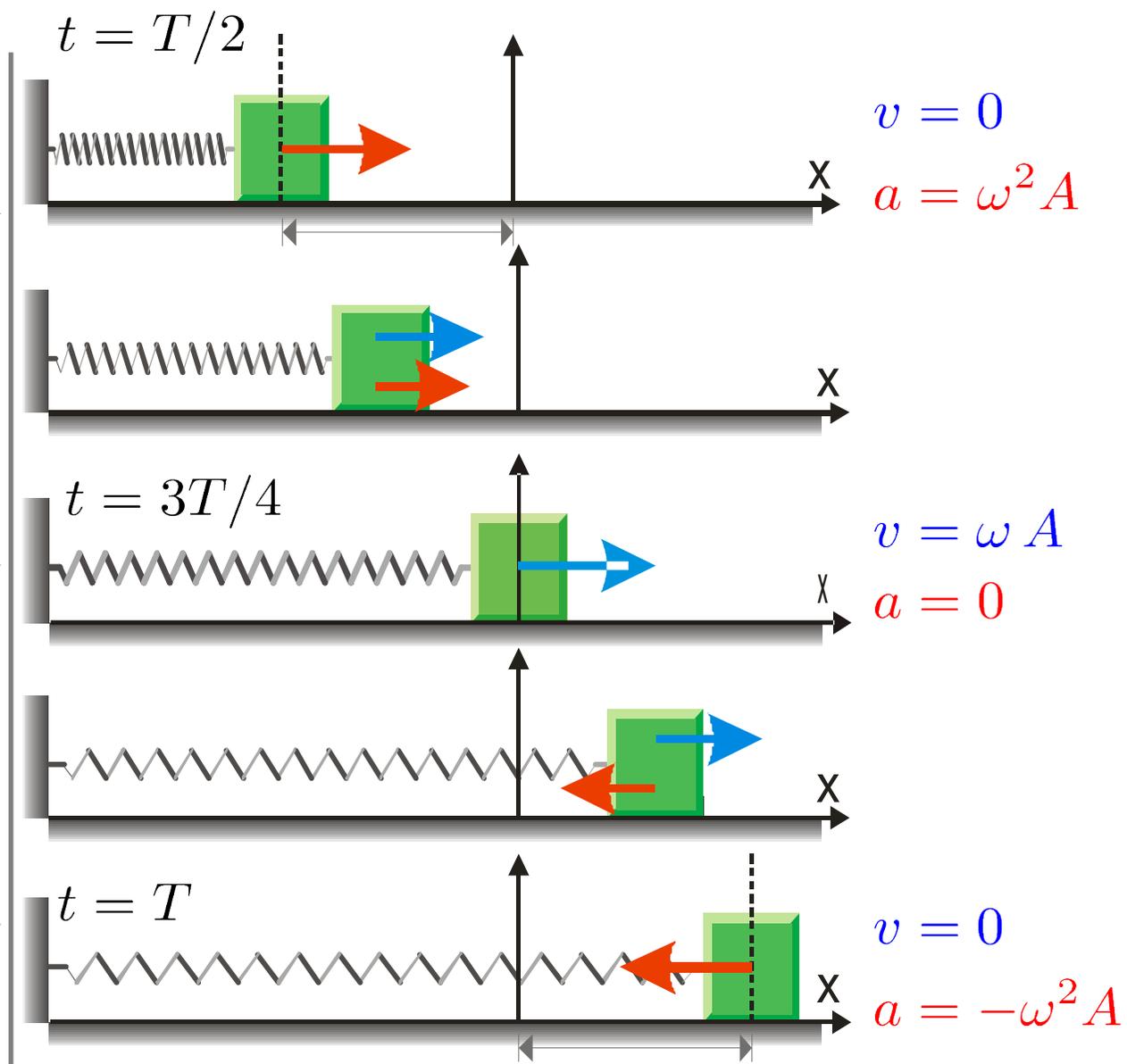
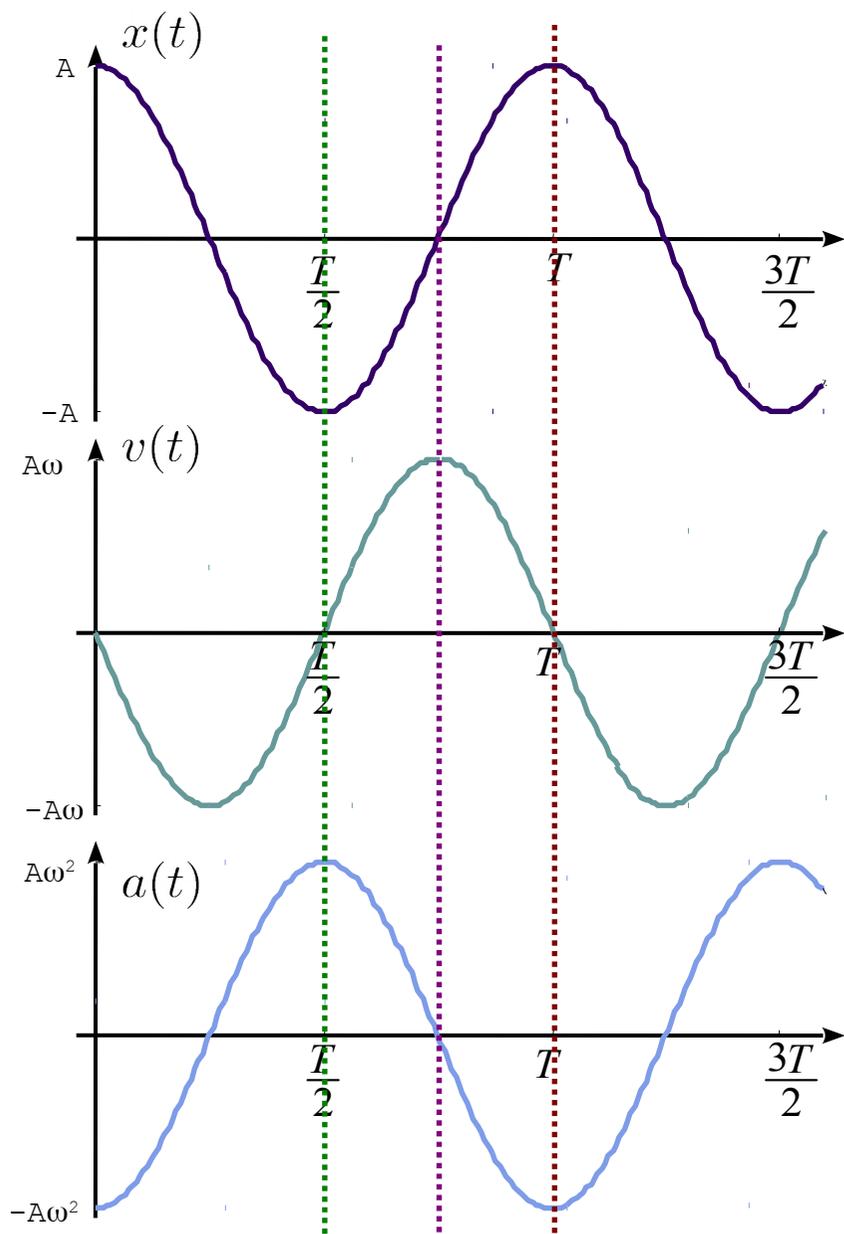
$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 A_0 \cos(\omega t) = -\omega^2 A_0 \sin(\omega t + \pi/2) \\ = \omega^2 A_0 \cos(\omega t + \pi)$$

- Aceleración máxima:  $\omega^2 A_0$
- Desfase de  $\pi/2$  con la velocidad
- Desfase de  $\pi$  con la posición

# Velocidad y aceleración



# Velocidad y aceleración



- Introducción
- Representación matemática del MAS
  - Ejemplos: muelle, péndulo simple
- Energía
- Otras aplicaciones del MAS
- Oscilaciones amortiguadas
- Oscilaciones forzadas: resonancia

- Despreciando el rozamiento la energía mecánica es constante
- Posición y velocidad

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

- Energía cinética:  $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi)$

- Energía potencial:  $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Energía mecánica

$$E = E_c + U = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}kA^2$$

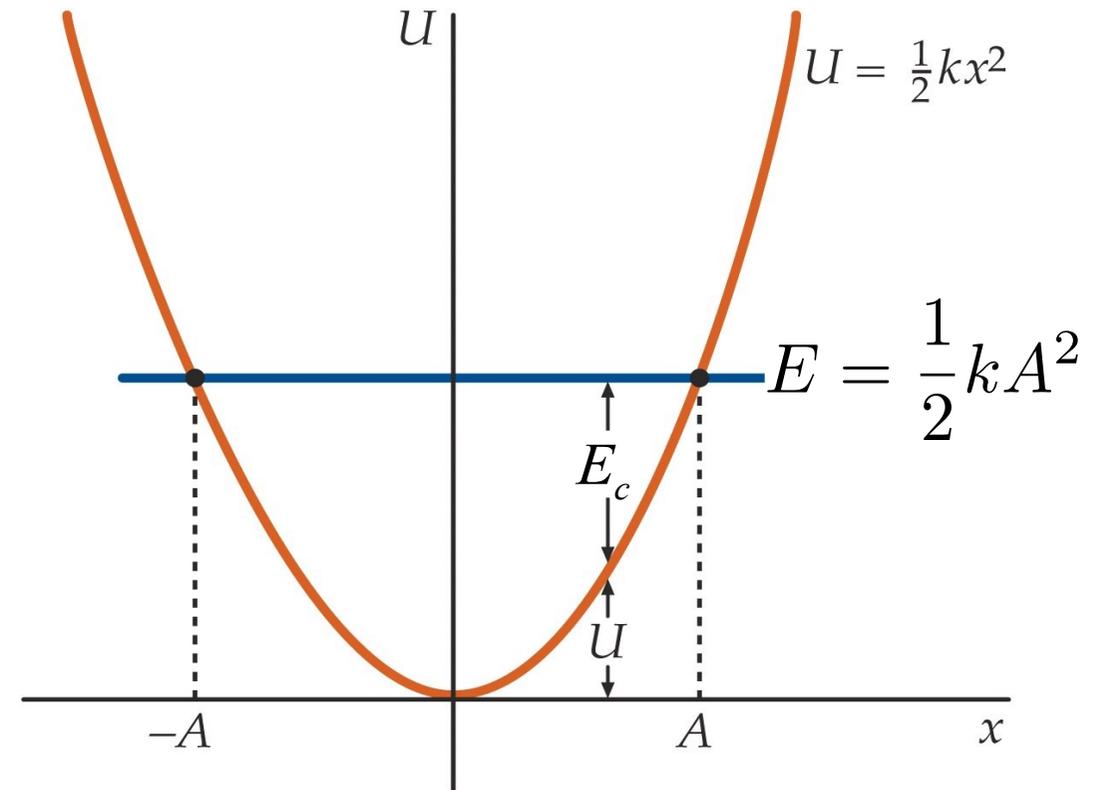
$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

No depende de la masa

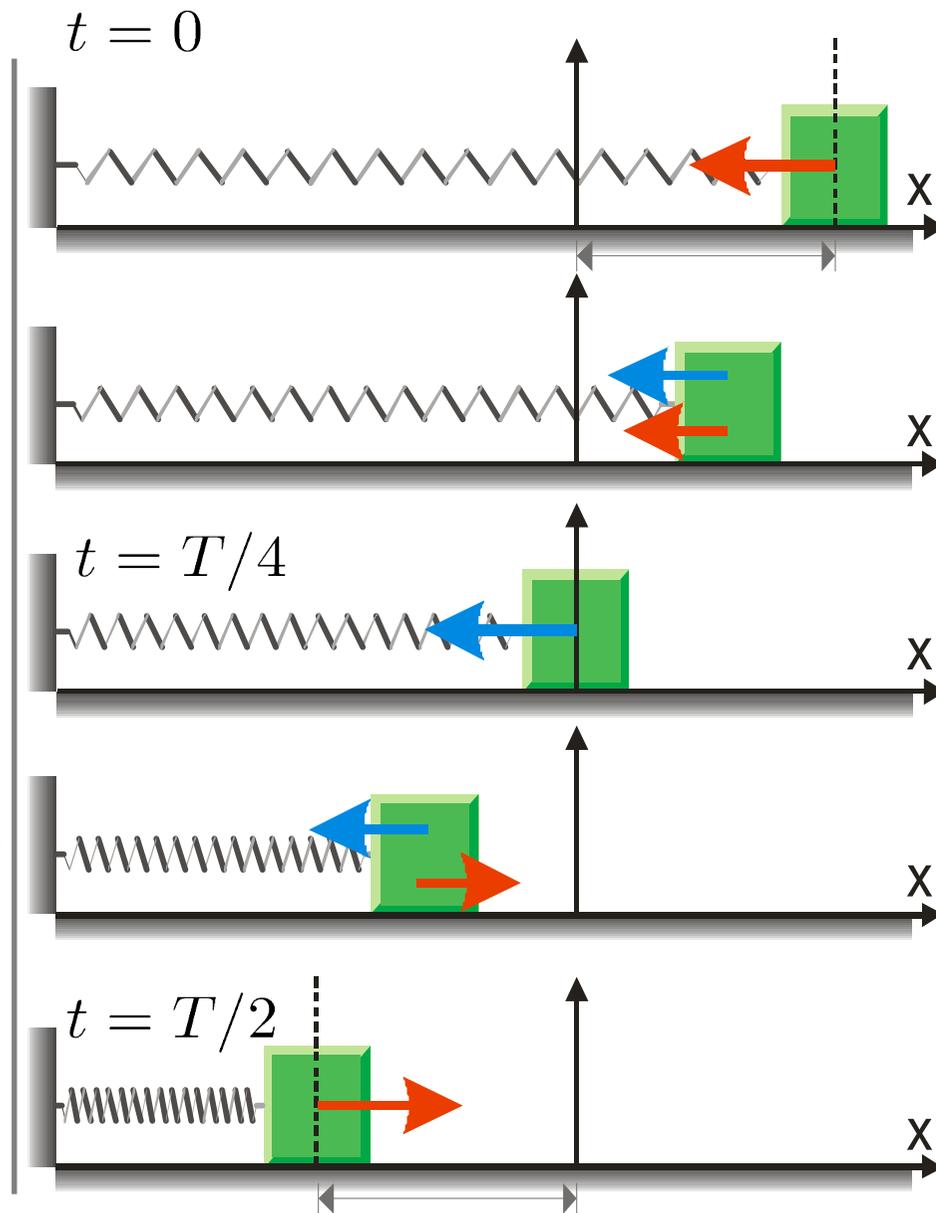
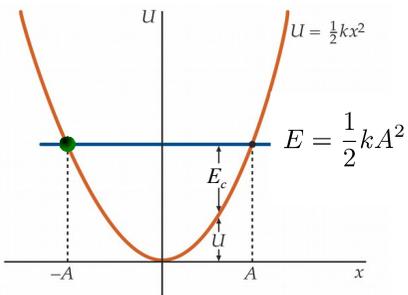
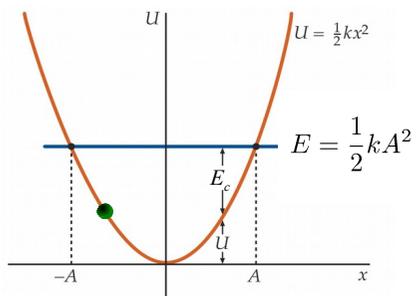
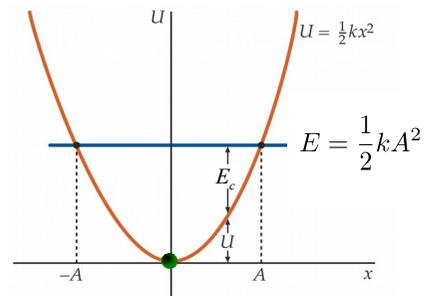
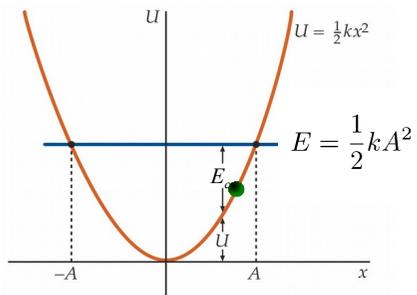
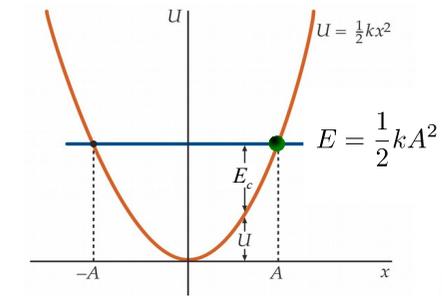
- La energía se trasvasa continuamente de cinética a transversal y viceversa

$$x = A \Rightarrow E = U_{\max} = \frac{1}{2}kA^2$$

$$x = 0 \Rightarrow E = E_{c,\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}kA^2$$



# Energía mecánica: muelle



$E_c = 0$   
 $U = \frac{1}{2}kA^2$

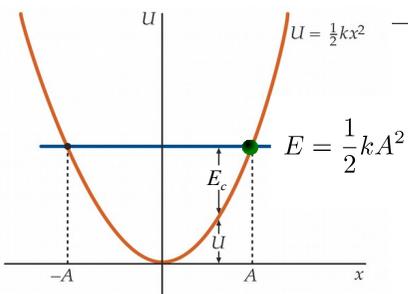
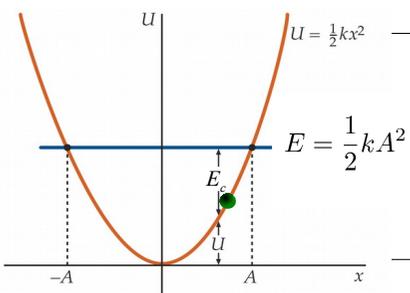
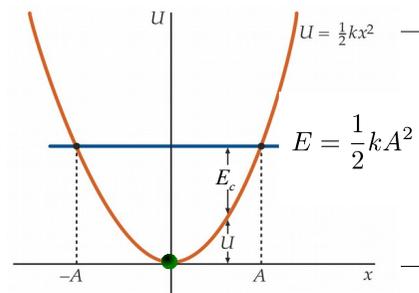
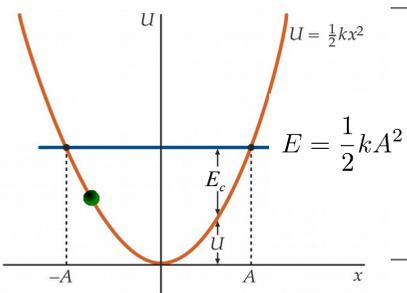
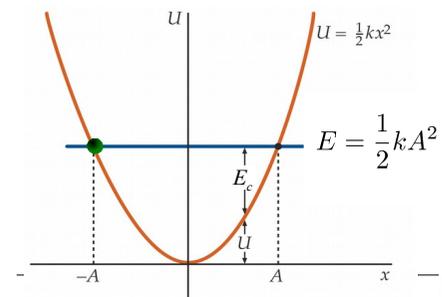
$E_c \uparrow$   
 $U \downarrow$

$E_c = \frac{1}{2}kA^2$   
 $U = 0$

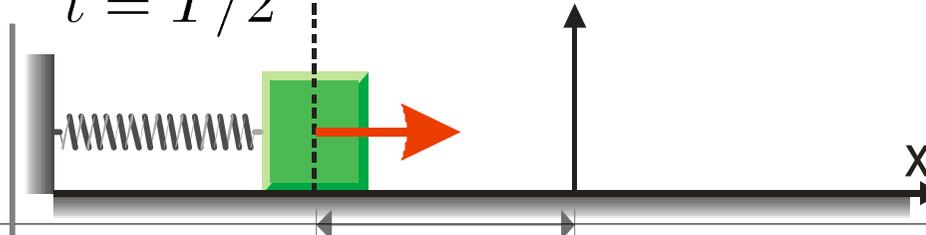
$E_c \downarrow$   
 $U \uparrow$

$E_c = 0$   
 $U = \frac{1}{2}kA^2$

# Energía mecánica: muelle



$t = T/2$



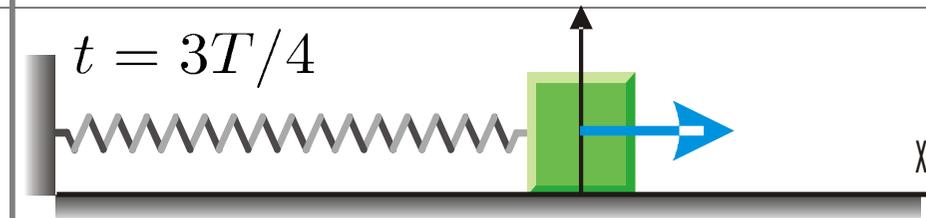
$$E_c = 0$$

$$U = \frac{1}{2}KA^2$$

$$E_c \uparrow$$

$$U \downarrow$$

$t = 3T/4$



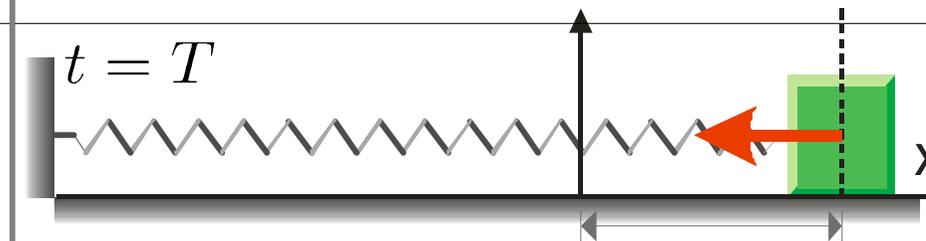
$$E_c = \frac{1}{2}kA^2$$

$$U = 0$$

$$E_c \downarrow$$

$$U \uparrow$$

$t = T$

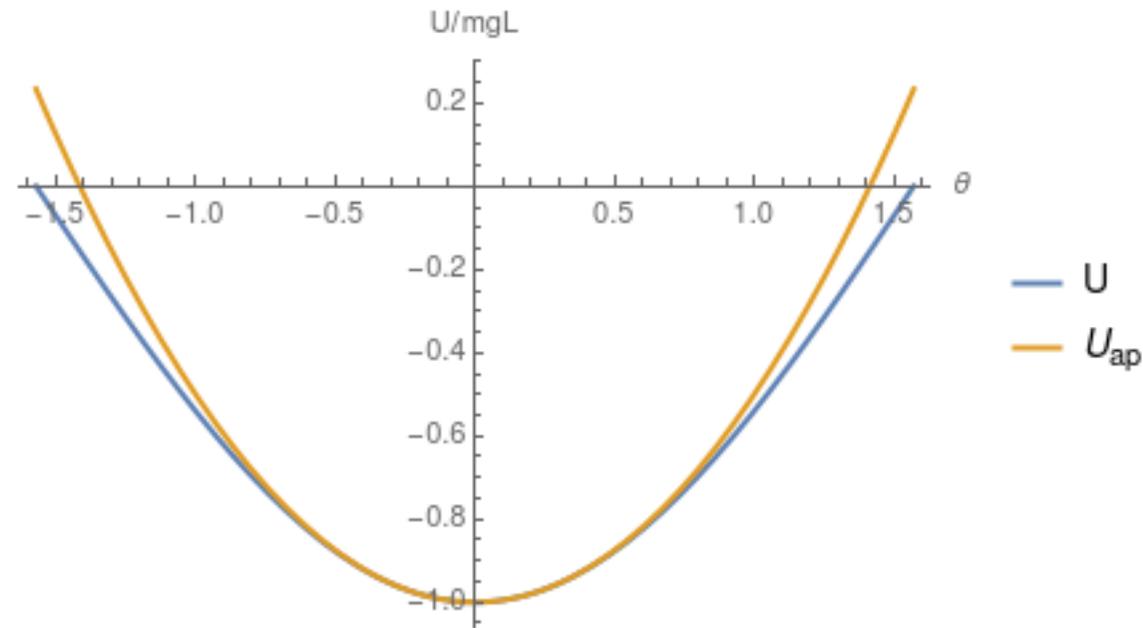
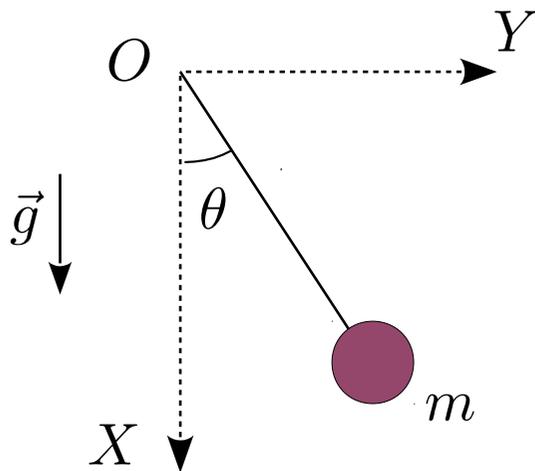


$$E_c = 0$$

$$U = \frac{1}{2}KA^2$$

- Introducción
- Representación matemática del MAS
  - Ejemplos: muelle, péndulo simple
- Energía
- Otras aplicaciones del MAS
- Oscilaciones amortiguadas
- Oscilaciones forzadas: resonancia

## ■ Péndulo simple



Energía potencial

$$U = -mgL \cos \theta$$

$$\longrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \operatorname{sen} \theta$$

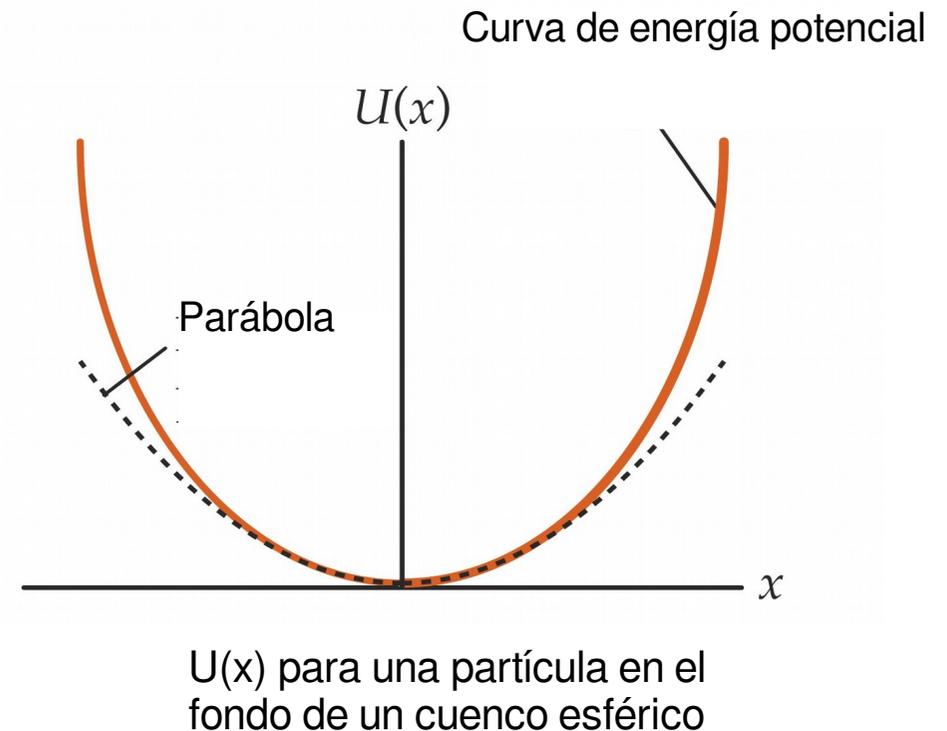
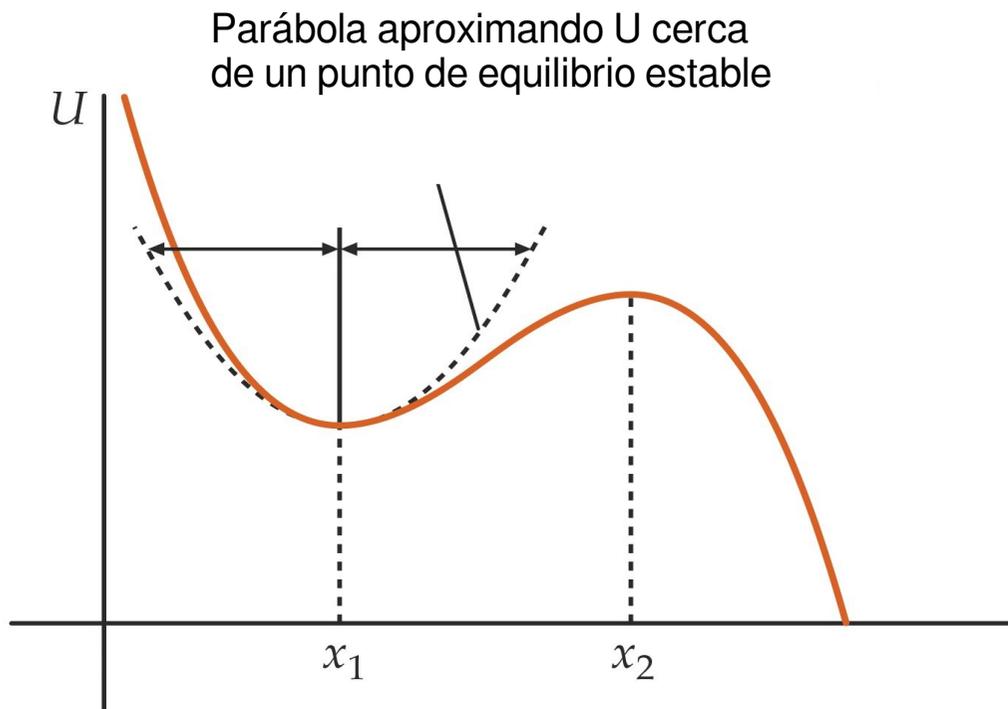
Energía potencial  
para ángulo pequeño

$$U_{ap} = -mgL \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right)$$

$$\longrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \theta$$

Desarrollo de Taylor  $\cos \theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$

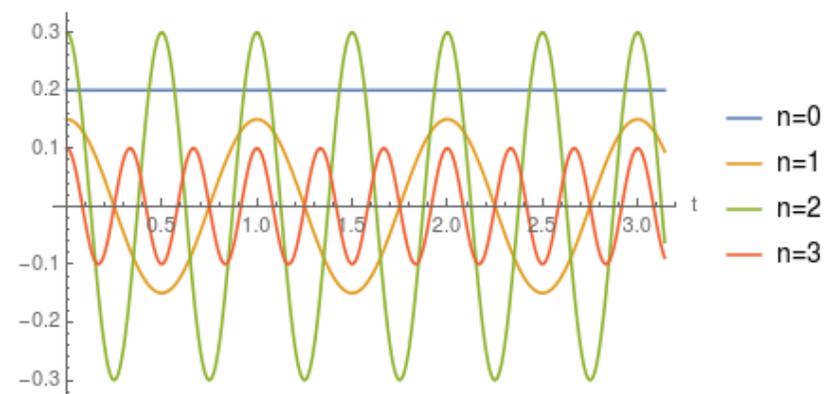
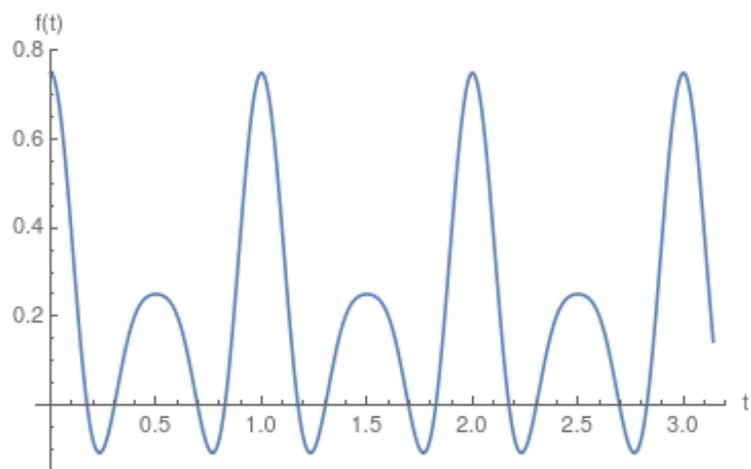
- Cualquier partícula que se desplaza **ligeramente** de una posición de **equilibrio** (mínimo de la energía potencial) realiza un MAS, pues cualquier curva puede aproximarse por una **parábola** cerca de un mínimo



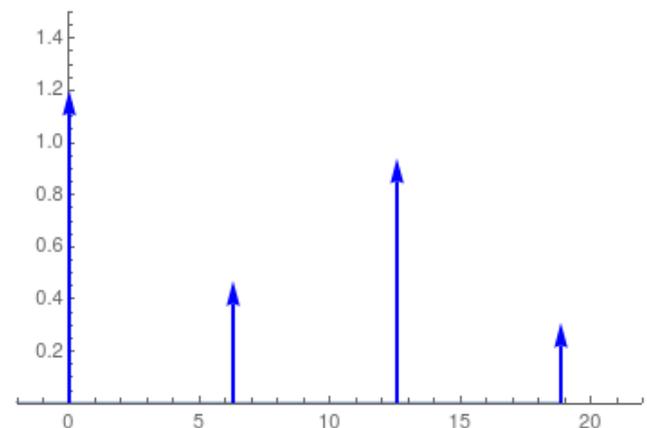
- Una función periódica puede expresarse como **combinación lineal** de varios MAS de diferentes frecuencias: los **modos de Fourier**

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \left( a_n \cos \left( \frac{2\pi n}{T} t \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi n}{T} t \right) \right)$$

■ **Ejemplo**  $f(t) = 0.20 + 0.15 \cos(2\pi t) + 0.30 \cos(4\pi t) + 0.10 \cos(6\pi t)$



- Una función no periódica puede expresarse como combinación de MAS usando la **Transformada de Fourier**



- Introducción
- Representación matemática del MAS
  - Ejemplos: muelle, péndulo simple
- Energía
- Otras aplicaciones del MAS
- Oscilaciones amortiguadas
- Oscilaciones forzadas: resonancia

- En sistemas reales el **rozamiento** hace que las oscilaciones se amortigüen
- El rozamiento puede modelarse como una fuerza

$$\vec{F}_R = -b \vec{v} \quad \left| \begin{array}{l} b \text{ constante} \\ \vec{v} \text{ velocidad} \end{array} \right.$$

- **Amortiguamiento lineal: valido si la velocidad no es muy grande**
  - Gotas de lluvia cayendo en la atmósfera
  - Movimiento de células y bacterias
- Segunda Ley de Newton

$$m\vec{a} = \vec{F}_R + \vec{F}_{osc}$$



- Consideramos el caso de un muelle unidimensional
- Segunda Ley de Newton (muelle unidimensional)

$$m\vec{a} = \vec{F}_R + \vec{F}_{osc}$$

$$ma = -bv - kx \implies$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

$$\gamma = b/2m$$

Parámetro de rozamiento

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Frecuencia propia o natural

- Consideramos tres regímenes de movimiento
  - Amortiguamiento débil :  $\gamma < \omega_0$
  - Sobreamortiguado :  $\gamma > \omega_0$
  - Amortiguamiento crítico :  $\gamma = \omega_0$



- Solución

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$$
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

- Es una oscilación de pseudo-frecuencia  $\omega$  y cuya amplitud **decae** en el tiempo

- La frecuencia de oscilación es **menor** que la natural

$$\omega < \omega_0$$

- Si  $b=0$  ( $\gamma=0$ ) entonces  $\omega=\omega_0$

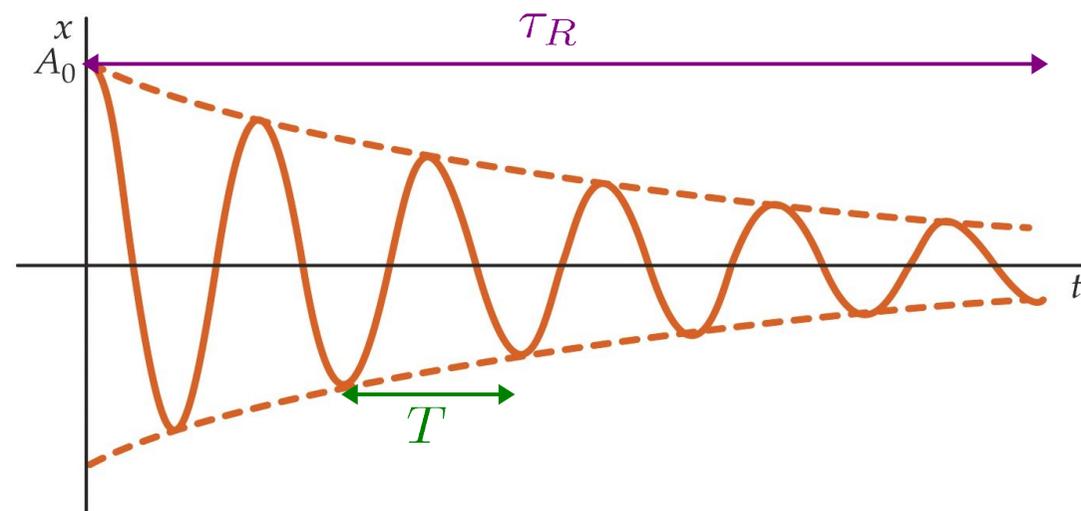
- La amplitud decae más rápido cuanto mayor sea  $b$  ( $\gamma$ )

- Hay dos tiempos típicos

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\tau_R = \frac{2\pi}{\gamma}$$

En este caso  $\tau_R > T_0$



## ■ Solución

$$x(t) = a_1 e^{-\zeta_1 t} + a_2 e^{-\zeta_2 t}$$

$$\zeta_1, \zeta_2 > 0$$

- Es una función **decreciente** en el tiempo: no hay oscilaciones
- Si  $\gamma = \omega_0$  está **críticamente amortiguado**, el decaimiento es el más rápido



## ■ Tiempos típicos

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\tau_R = \frac{2\pi}{\gamma}$$

En el caso sobreamortiguado  $\tau_R < T_0$

En amortiguamiento crítico  $\tau_R = T_0$

- Introducción
- Representación matemática del MAS
  - Ejemplos: muelle, péndulo simple
- Energía
- Otras aplicaciones del MAS
- Oscilaciones amortiguadas
- Oscilaciones forzadas: resonancia

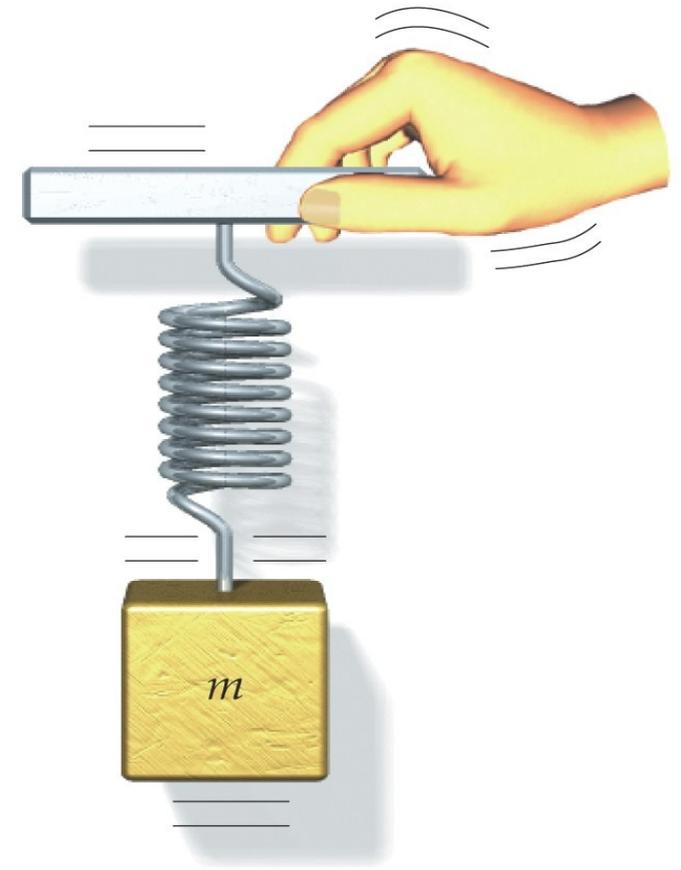
- En un oscilador amortiguado la **energía decrece** con el tiempo y las oscilaciones decaen
- Para mantener las oscilaciones un **agente externo** debe suministrar al sistema la energía que se pierde
- El agente externo ejerce una **fuerza** sobre el oscilador, con una frecuencia  $\omega_e$

$$\vec{F} = \vec{F}_0 \cos(\omega_e t)$$

- Segunda Ley de Newton en una dimensión

$$m\vec{a} = \vec{F}_R + \vec{F}_{osc} + \vec{F}_0 \cos(\omega_e t)$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_e t)$$



$$\gamma = b/2m$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

- Fasores

- Buscamos soluciones que oscilen con la misma frecuencia que el término forzador (régimen permanente)

$$F(t) = F_0 \cos(\omega_e t) = \operatorname{Re}(F_0 e^{i\omega_e t})$$

$$x(t) = A \cos(\omega_e t + \phi) = \operatorname{Re}(A e^{i(\omega_e t + \phi)}) = \operatorname{Re}(\tilde{x} e^{i\omega_e t}) \quad \tilde{x} = A e^{i\phi}$$

$\tilde{x}$  no depende del tiempo

- Planteamos la ecuación del MAS forzado para los fasores

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_e t)$$

$$x(t) \rightarrow \tilde{x} e^{i\omega_e t}$$

$$\dot{x}(t) \rightarrow i\omega_e \tilde{x} e^{i\omega_e t}$$

$$\ddot{x}(t) \rightarrow -\omega_e^2 \tilde{x} e^{i\omega_e t}$$

$$F_0 \rightarrow F_0 e^{i\omega_e t}$$

$$-\omega_e^2 \tilde{x} + i2\gamma\omega_e \tilde{x} + \omega_0^2 \tilde{x} = \frac{F_0}{m}$$

Ecuación algebraica para  $\tilde{x}$

- Resolvemos la ecuación algebraica

$$-\omega_e^2 \tilde{x} + i2\gamma\omega_e \tilde{x} + \omega_0^2 \tilde{x} = \frac{F_0}{m}$$



$$\tilde{x}(\omega_e) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega_e^2 + 2\omega_e\gamma i}$$

- La solución para el fasor puede escribirse

$$\tilde{x}(\omega_e) = A e^{i\phi}$$

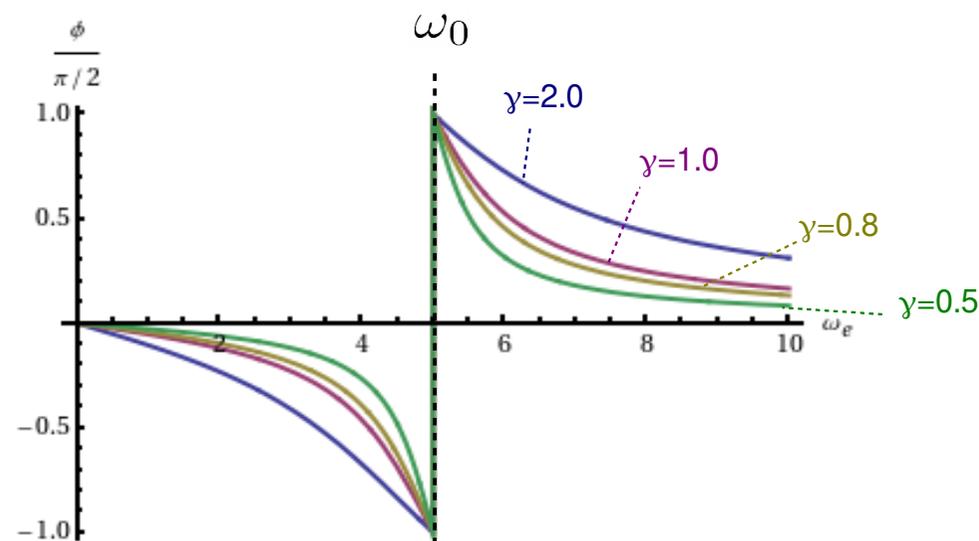
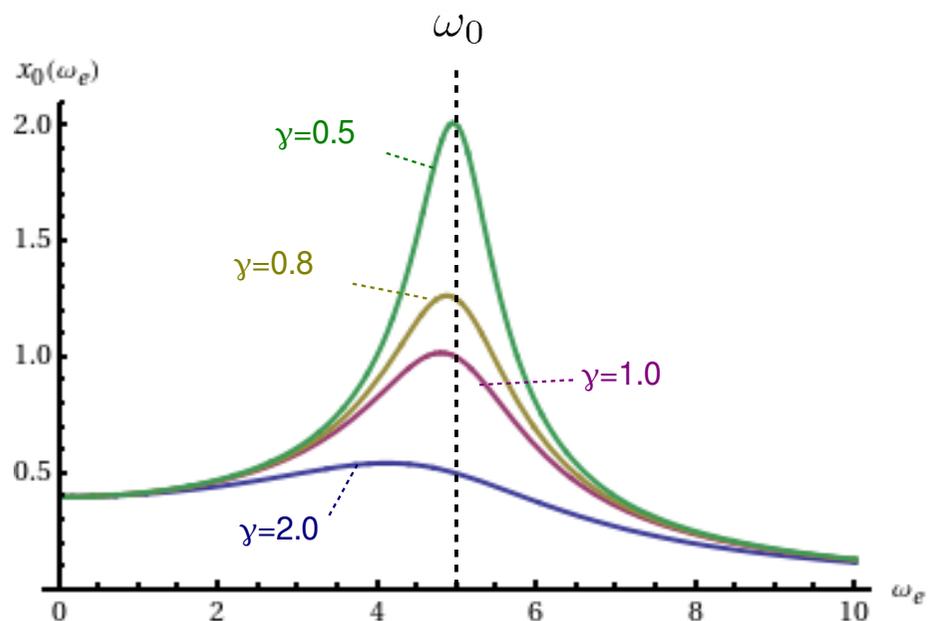
$$A(\omega_e) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + (2\gamma\omega_e)^2}}$$

$$\phi(\omega_e) = \arctan\left(\frac{2\gamma\omega_e}{\omega_e^2 - \omega_0^2}\right)$$

- Para recuperar la solución del MAS forzado en régimen permanente tomamos la parte real

$$x(t) = \text{Re}(A e^{i(\omega_e t + \phi)}) = A \cos(\omega_e t + \phi)$$

- Al aplicar la fuerza, aparecen soluciones transitorias y permanentes
  - Las transitorias son similares a las del oscilador con rozamiento
  - Después de un cierto tiempo, la única solución que queda es la del régimen permanente
- La amplitud de las oscilaciones y el desfase con la fuerza dependen de la frecuencia de la fuerza forzadora



La amplitud de la oscilación se hace máxima cuando  $\omega_e$  se aproxima a  $\omega_0$   $T_e \simeq T_0$   $T_e = 2\pi/\omega_e$   
 $T_0 = 2\pi/\omega_0$

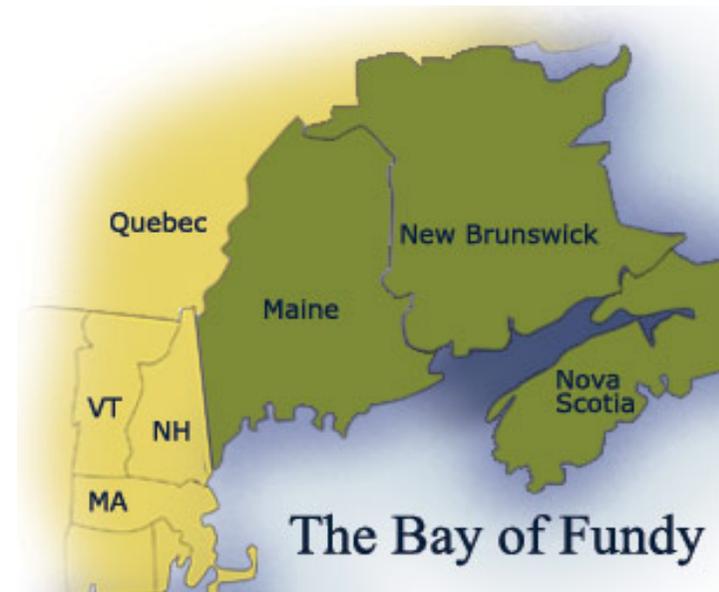
Si el rozamiento es pequeño la amplitud puede ser muy grande

- Movimiento del oscilador forzado
  - Estado inicial transitorio
  - Estado estacionario
    - Oscila con  $\omega_e$  y  $A(\omega_e)$
    - La energía es constante (suministrada=disipada)
- La resonancia ocurre cuando  $\omega_e \simeq \omega_0$

El sistema oscila con energía y amplitud máximas

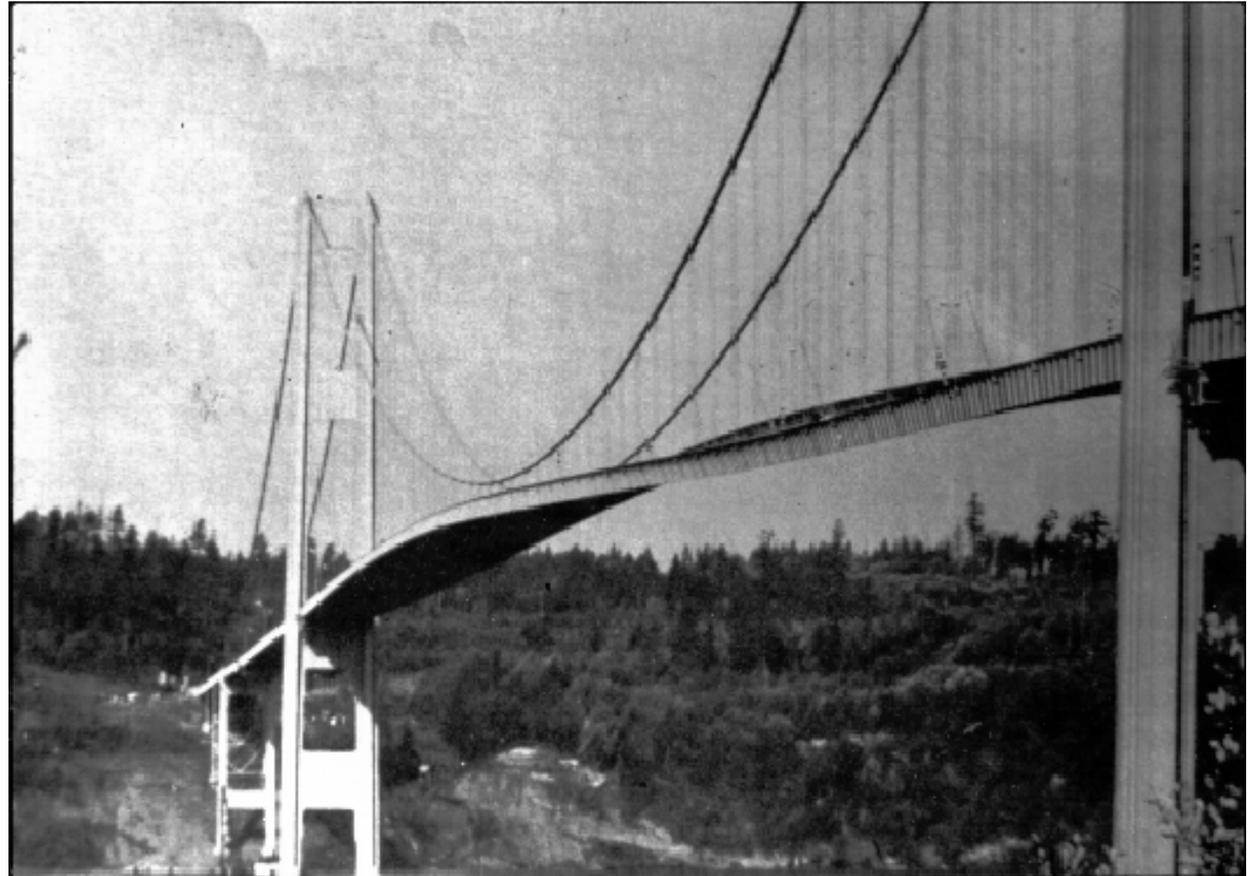
# Resonancia: Bahía de Fundy

- La bahía de Fundy se conoce por registrar la **máxima diferencia en el nivel del agua** entre la marea alta y la bajamar (alrededor de 17 metros)
- Se cree que el nombre “Fundy” data del siglo XVI, cuando exploradores portugueses llamaron a la bahía “Rio Fundo” (río profundo)
- El folklore popular afirma que las mareas son causadas por una ballena gigante que chapotea en el agua
- Los oceanógrafos atribuyen el fenómeno a la **resonancia**, como resultado de la coincidencia entre el tiempo que necesita una gran ola para penetrar hasta el fondo de la bahía y regresar y el tiempo entre mareas altas (12.4 horas)





- El 7 de Noviembre de 1940 el puente de **Tacoma Narrows**, en el estado de Washington, USA, **colapsó**
- La causa fue la excitación de un **modo de torsión propio** por el viento
- Sirvió para entender que es importante comprender la **interacción** entre el viento y el puente colgante (aerodinámica)



- El **MAS** ocurre cuando una partícula está sometida a una fuerza restauradora **proporcional al desplazamiento** desde la posición de equilibrio
- La posición de una partícula que experimenta un MAS varía de forma **sinusoidal**
  - La frecuencia depende de los parámetros del sistema (muelle, péndulo simple)
- La **energía mecánica** total es una constante del movimiento
- Una función periódica o no puede expresarse como combinación lineal de MAS
- Las **oscilaciones amortiguadas** aparecen cuando hay una fuerza resistiva que se opone al movimiento
- Para compensar la pérdida de energía un agente externo debe ejercer una fuerza: **oscilaciones forzadas**
- Si la frecuencia de la fuerza externa es próxima a la frecuencia propia del oscilador aparece la **resonancia**