Tema 4: Centro de masas

Mecánica Racional, 2º, Grado en Ingeniería Civil

Departamento de Física Aplicada III

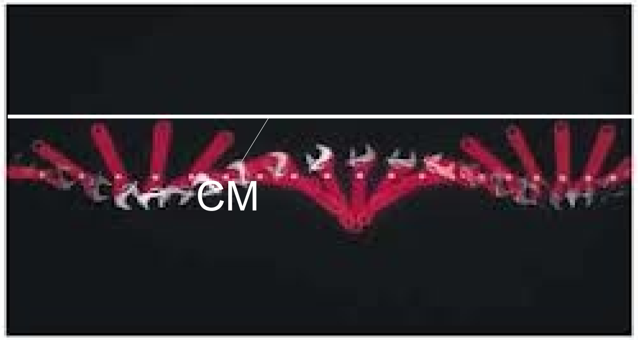
Escuela Técnica Superior de Ingeniería

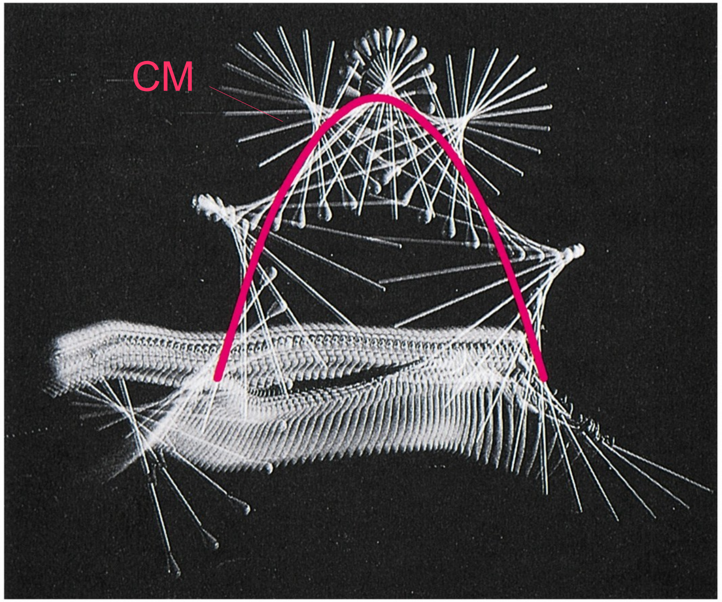
Universidad de Sevilla

Índice

- Definición y propiedades
- Cálculo de centro de masa
  - Cuerpos continuos
  - Figuras compuestas
  - Teoremas de Guldin
- Velocidad y aceleración del CM

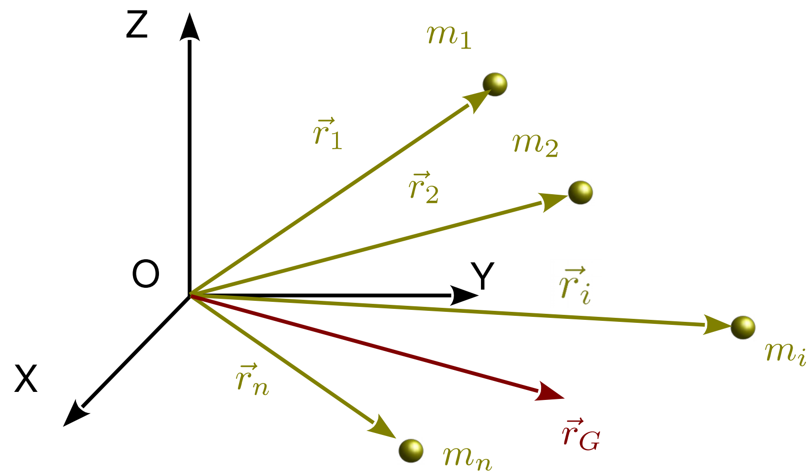
- El movimiento de un sólido rígido se puede entender como la superposición de una traslación y una rotación (Teoremas de Koenig)
- La traslación corresponde al movimiento del centro de masas
- La rotación se realiza respecto al centro de masas





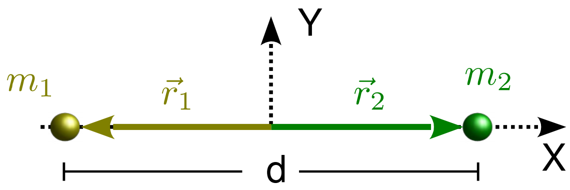
- Dado un sistema de n partículas, se define la posición de su centro de masas

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M}$$



- m_i es la masa de cada partícula
- $\mathbf{r}_i$ es el vector de posición de cada partícula
- M es la masa total del sistema

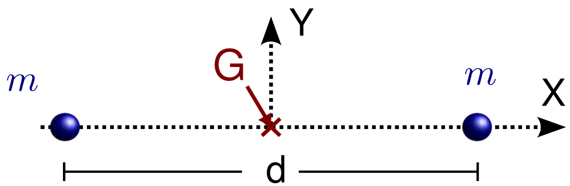
Centro de masas: cálculo para un sistema discreto



$$\vec{r}_1 = -\frac{d}{2}\,\vec{\imath}$$
$$\vec{r}_2 = +\frac{d}{2}\,\vec{\imath}$$

$$\vec{r}_G = \frac{m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)\frac{d}{2}\vec{\imath}$$

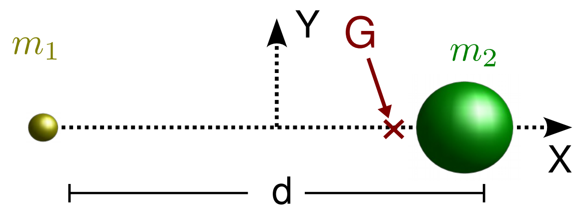
$$m_1 = m_2 = m$$



$$\vec{r}_{CM} = \vec{0}$$

- Si el sistema tiene algún plano, línea o punto de simetría, el CM está en él
  - Si hay varios elementos de simetría el CM debe estar en el corte de todo ellos

$$m_1 \ll m_2$$



$$\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) \simeq \frac{m_2 - m_1}{m_2}$$
$$\simeq 1 - \frac{m_1}{m_2}$$

$$\vec{r}_{CM} \simeq \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)\frac{d}{2}\vec{\imath}$$

El CM está cerca de la masa mayor

Ejemplo: $m_{tierra} = 5.98 \times 10^{24}$ kg,

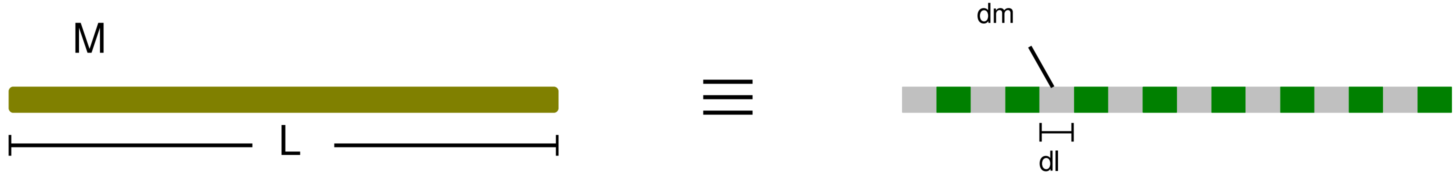
$m_{sol} = 1.99 \times 10^{30}$ kg,

$d = 1.5 \times 10^{8}$ km

Índice

- Definición y propiedades
- Cálculo de centro de masa
  - Cuerpos continuos
  - Figuras compuestas
  - Teoremas de Guldin
- Velocidad y aceleración del CM

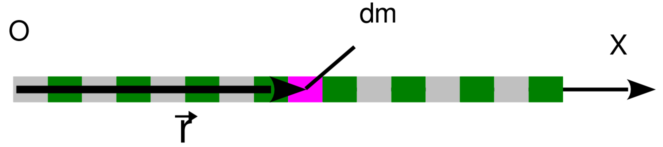
- Un cuerpo continuo puede considerase compuesto por un número infinito de masas diferenciales



- Los sumatorios se convierten en diferenciales

$$M = \sum \mathrm{d}m \Longrightarrow \int \mathrm{d}m \qquad L = \sum \mathrm{d}l \Longrightarrow \int \mathrm{d}l$$

- Posición del centro de masas



$$\boxed{\vec{r}_G = \frac{\displaystyle\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{\displaystyle\int \mathrm{d}m} = \frac{\displaystyle\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{M}}$$

Densidades de masa

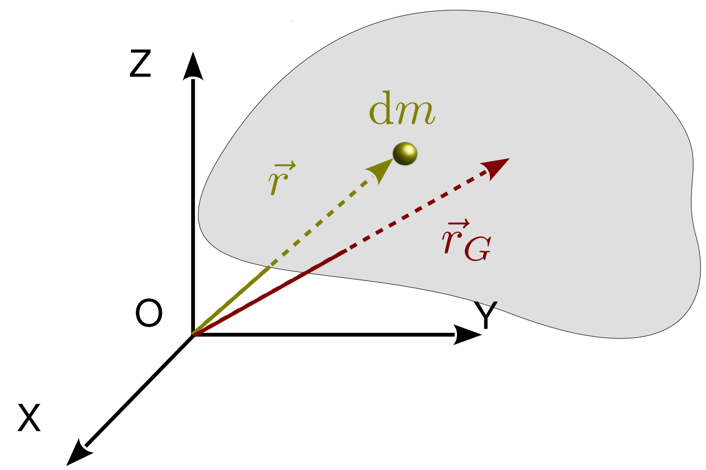
- Densidad lineal de masa $\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}l$ $\quad M = \int_\Gamma \lambda\,\mathrm{d}l$
  - Si el cuerpo es homogéneo $\lambda = \dfrac{M}{L}$
- Densidad superficial de masa $\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}S$ $\quad M = \int_S \sigma\,\mathrm{d}S$
  - Si el cuerpo es homogéneo $\sigma = \dfrac{M}{S}$
- Densidad volumétrica de masa $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$ $\quad M = \int_V \rho\,\mathrm{d}V$
  - Si el cuerpo es homogéneo $\rho = \dfrac{M}{V}$

- Coordenadas cartesianas del centro de masas

$$x_G = \frac{1}{M}\int x(\vec{r})\,\mathrm{d}m$$

$$y_G = \frac{1}{M}\int y(\vec{r})\,\mathrm{d}m$$

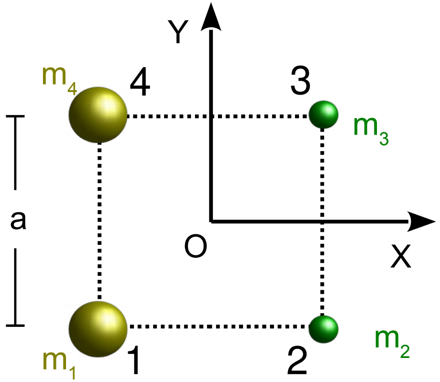
$$z_G = \frac{1}{M}\int z(\vec{r})\,\mathrm{d}m$$

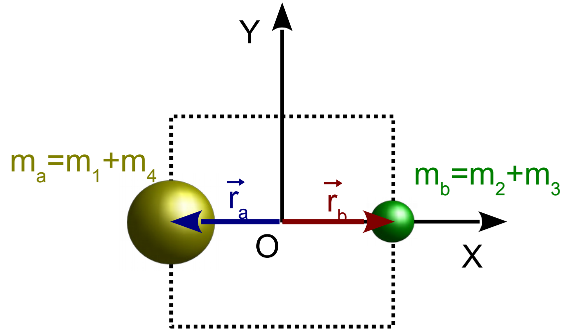


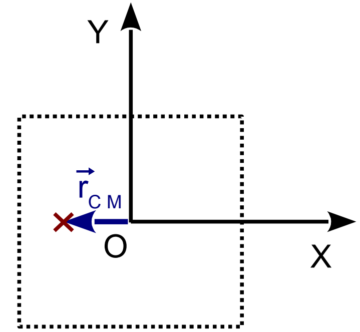
Índice

- Definición y propiedades
- Cálculo de centro de masa
  - Cuerpos continuos
  - Figuras compuestas
  - Teoremas de Guldin
- Velocidad y aceleración del CM

- Podemos calcular el CM como una composición de partes del sistema







$m_1=m_4$

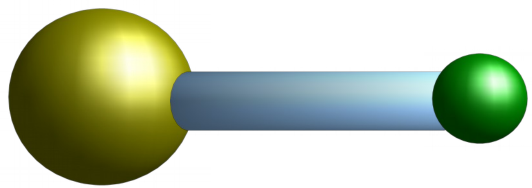
$m_2=m_3$

$$\vec{r}_a = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_4\vec{r}_4}{m_1+m_4} = -\frac{a}{2}\vec{\imath}$$

$$\vec{r}_b = \frac{m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_2+m_3} = \frac{a}{2}\vec{\imath}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_a\vec{r}_a + m_b\vec{r}_b}{m_a+m_b}$$

- De este modo se puede calcular el CM de sistemas complejos



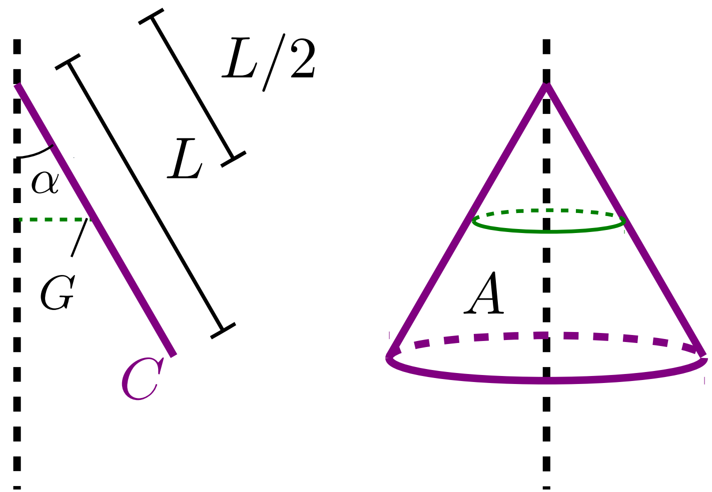
$$\vec{r}_G = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} M_i\vec{r}_{Gi}}{\sum\limits_{i=1}^{N} M_i}$$

Índice

- Definición y propiedades
- Cálculo de centro de masa
  - Cuerpos continuos
  - Figuras compuestas
  - Teoremas de Guldin
- Velocidad y aceleración del CM

- Primer teorema: El área A de una superficie de revolución generada por la rotación de una curva plana C, alrededor de un eje externo a C y que esté en su mismo plano, es igual al producto de la longitud L_C de C por la distancia L_G recorrida por el centroide geométrico

Área del cono abierto $A = L_C L_G$



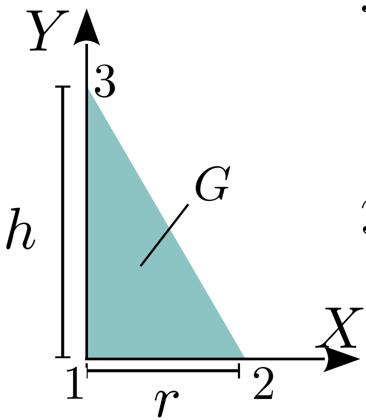
$$L_C = L$$

$$L_G = 2\pi\left(\frac{1}{2}L\,\mathrm{sen}\,\alpha\right) = \pi L\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$A = (\pi L\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,L = \pi L^2\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

- Segundo teorema: El volumen V de un sólido de revolución generado por la rotación de una figura plana S, alrededor de un eje externo a ella, es igual al producto del área A_S de F por la distancia L_G recorrida por el CM

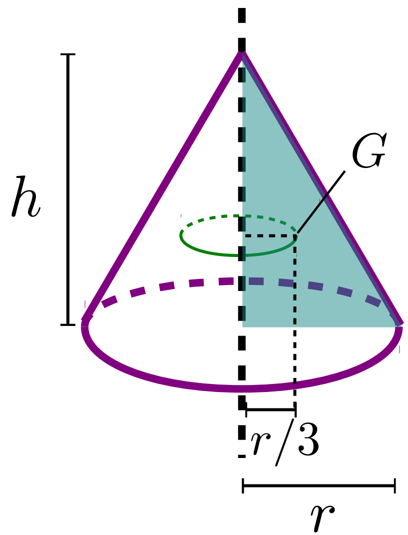
Volumen del cono $V = A_s L_G$



$$x_G = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i = \frac{r}{3}$$

$$y_G = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} y_i = \frac{h}{3}$$

Baricentro del triángulo

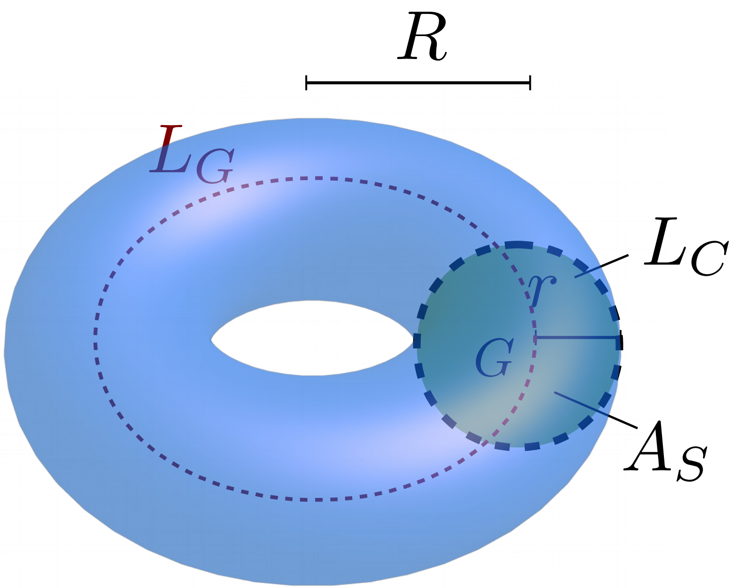


$$A_S = \frac{1}{2}hr$$

$$L_G = 2\pi\left(\frac{1}{3}r\right) = \frac{2\pi r}{3}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

- Aplicación a un toro



Área

$$A = L_C\, L_G$$

$$A = (2\pi r)\,(2\pi R) = 4\pi^2 r R$$

Volumen

$$V = A_S\, L_G$$

$$V = (\pi r^2)\,(2\pi R) = 2\pi^2 r^2 R$$

Índice

- Definición y propiedades
- Cálculo de centro de masa
  - Cuerpos continuos
  - Figuras compuestas
  - Teoremas de Guldin
- Velocidad y aceleración CM

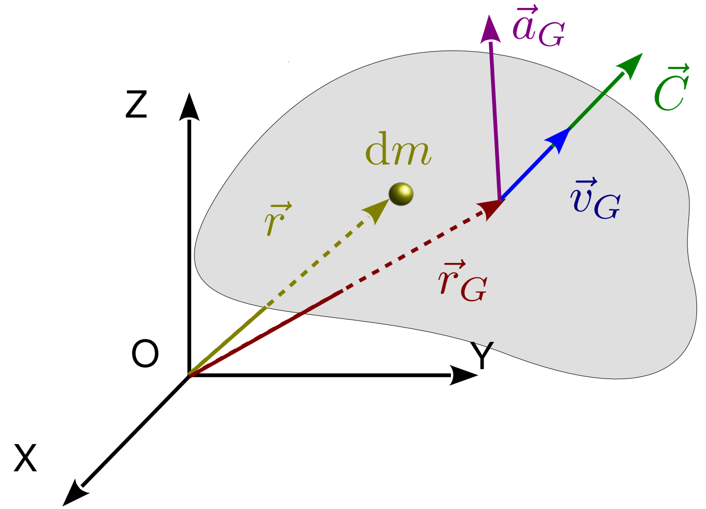
Velocidad y aceleración del CM

- Velocidad del centro de masas

$$\vec{v}_G = \frac{1}{M}\int \vec{v}(\vec{r})\,\mathrm{d}m$$

- Aceleración del centro de masas

$$\vec{a}_G = \frac{1}{M}\int \vec{a}(\vec{r})\,\mathrm{d}m$$



- Cantidad de movimiento del centro de masas

$$\vec{C} = M\vec{v}_G = \int \vec{v}(\vec{r})\,\mathrm{d}m$$