Tema 6: Cinética del sólido rígido

Mecánica Racional, 2º, Grado en Ingeniería Civil

Departamento Física Aplicada III

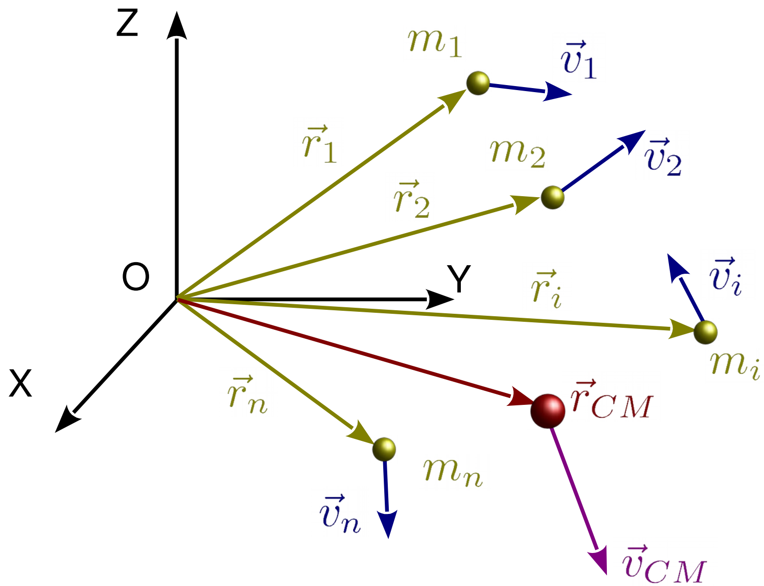
Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Índice

- La cantidad de movimiento del sistema es la suma de la cantidad de movimiento de cada una de las partículas que lo componen

$$\vec{C} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \vec{v}_i$$



- Para un sistema continuo

$$\vec{C} = \int \mathrm{d}\vec{p} = \int \vec{v} \, \mathrm{d}m$$

  - Un sólido rígido es un sistema continuo

- En función de la velocidad del centro de masas

$$\vec{C} = M \, \vec{v}_{CM}$$

- Todas las velocidades deben ser medidas en un SRI

El centro de masas de un sistema de partículas se mueve como una partícula con toda la masa del sistema, sometida a la acción de la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema

$$\dot{\vec{C}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{C}}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \vec{F}^{ext}_{neta}$$

- Las fuerzas externas son las que provienen del exterior del sistema
- Las fuerzas internas son las que se ejercen entre partes del sistema
  - Se anulan por pares gracias a la Tercera Ley de Newton
- También recibe el nombre de Teorema del Centro de Masas
- Si la masa del sistema no cambia

$$\dot{\vec{C}} = M\dot{\vec{v}}_G = M\vec{a}_G = \vec{F}^{ext}_{neta}$$

Teorema de la Cantidad de Movimiento (T.C.M.)

- Demostración

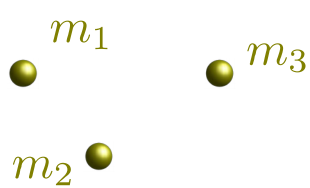
$$\dot{\vec{C}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}(m_i\vec{v}_i)}{\mathrm{d}t}$$

  - Segunda Ley para cada partícula

$$\frac{\mathrm{d}(m_i\vec{v}_i)}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_i^{\mathrm{ext}} + \vec{F}_i^{\mathrm{int}}$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{\vec{C}} = \sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i^{\mathrm{ext}} + \vec{F}_i^{\mathrm{int}}) = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\mathrm{ext}} + \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\mathrm{int}}$$

  - Las fuerzas internas se anulan por pares por la Tercera Ley de Newton



$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\mathrm{int}} = \overset{m_1}{(\vec{F}_{2\to 1} + \vec{F}_{3\to 1})} + \overset{m_2}{(\vec{F}_{1\to 2} + \vec{F}_{3\to 2})} + \overset{m_3}{(\vec{F}_{2\to 3} + \vec{F}_{1\to 3})}$$
$$= \vec{0}$$

- Por tanto

$$\dot{\vec{C}} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\mathrm{ext}} = \vec{F}_{\mathrm{neta}}^{\mathrm{ext}}$$

- Si la fuerza externa neta es nula, la cantidad de movimiento del centro de masas se conserva

$$\vec{F}^{ext}_{neta} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\vec{C}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{C} = \overrightarrow{CTE}$$

  - Hay que aplicarlo en un SRI
  - Ejemplo: deslizamiento sobre una superficie helada plana

- Conservación parcial (T.C.C.M. parcial)

$$\vec{F}^{ext}_{neta} \perp \vec{u} \quad \Longrightarrow \quad \vec{C} \cdot \vec{u} = cte$$

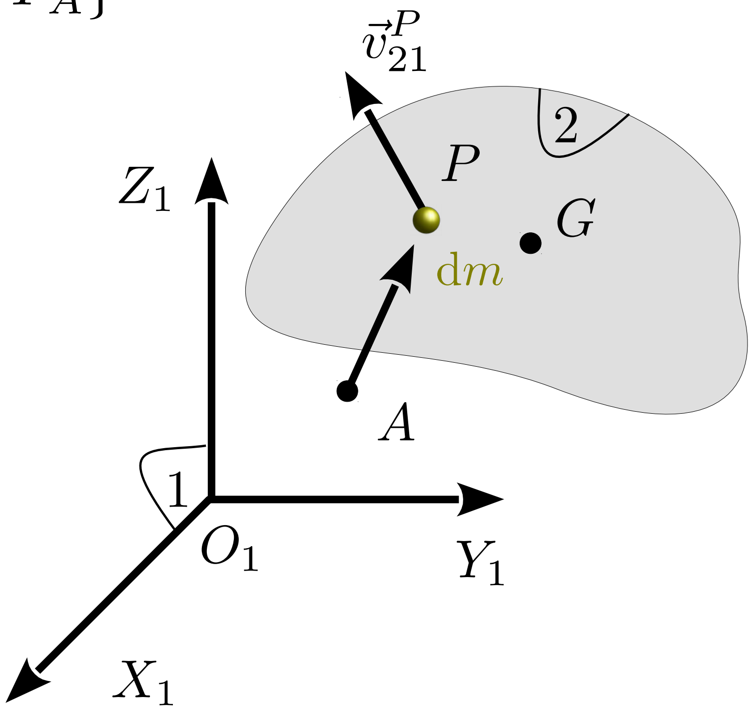
  - El vector **u** tiene que ser fijo respecto al SRI
  - Ejemplo: movimiento parabólico en el campo gravitatorio terrestre

Índice

- Cantidad de movimiento de un sólido rígido
    - Teorema del Centro de Masas (T.C.M.)
- Momento cinético de un sólido rígido
    - Teorema del Momento Cinético (T.M.C.)
- Energía cinética de un sólido rígido
- Trabajo y potencia sobre un sólido rígido
- Teorema de la energía
- Trabajo interno de un par de sólidos en contacto

- Reducción cinemática en el punto A $\{\vec{v}^A_{21}, \vec{\omega}_{21}\}$
- Distribución de masas del sólido $\{G, M, \overset{\leftrightarrow}{I}_A\}$
- Momento angular en el punto A

$$\vec{L}_A = \overset{\leftrightarrow}{I}_A \cdot \vec{\omega}_{21} + M\overrightarrow{AG} \times \vec{v}^A_{21}$$



- Si A es un punto fijo O del sólido: $\vec{v}^O_{21} = \vec{0}$

$$\vec{L}_O = \overset{\leftrightarrow}{I}_O \cdot \vec{\omega}_{21}$$

- Si A es el centro de masas G: $\overrightarrow{GG} = \vec{0}$

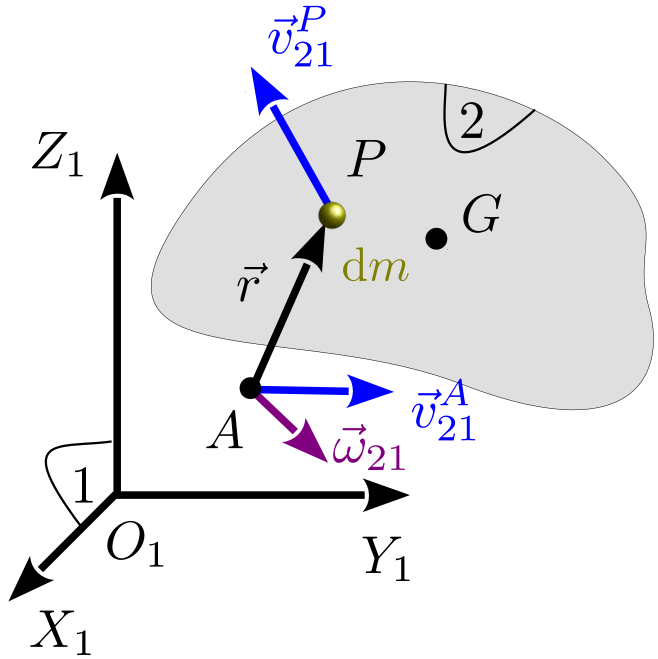
$$\vec{L}_G = \overset{\leftrightarrow}{I}_G \cdot \vec{\omega}_{21}$$

  - Esto es cierto siempre aunque $\vec{v}^G_{21} \neq \vec{0}$

- Demostración

$$\vec{L}_A = \int \overrightarrow{AP} \times (\mathrm{d}m\, \vec{v}^P_{21}) = \int \mathrm{d}m\, \overrightarrow{AP} \times \vec{v}^P_{21}$$

$$\overrightarrow{AP} = \vec{r} \qquad \vec{v}^P_{21} = \vec{v}^A_{21} + \vec{\omega}_{21} \times \vec{r}$$



$$\vec{L}_A = \int \mathrm{d}m\, \vec{r} \times \vec{v}^A_{21} + \int \mathrm{d}m\, \vec{r} \times (\vec{\omega}_{21} \times \vec{r})$$

$$= \left(\int \mathrm{d}m\, \vec{r}\right) \times \vec{v}^A_{21} + \int \mathrm{d}m\, (r^2 \vec{\omega}_{21} - \vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{\omega}_{21}))$$

$$= M\overrightarrow{AG} \times \vec{v}^A_{21} + \left[\int \mathrm{d}m\, (r^2 \overset{\leftrightarrow}{U} - \vec{r}\vec{r})\right] \cdot \vec{\omega}_{21}$$

$$= M\overrightarrow{AG} \times \vec{v}^A_{21} + \overset{\leftrightarrow}{I}_A \cdot \vec{\omega}_{21}$$

- El momento cinético cambia para puntos diferentes

$$\vec{L}_B = \int_M \overrightarrow{BP} \times (\vec{v}^{P}_{21}\mathrm{d}m) = \int_M \mathrm{d}m\, \overrightarrow{BP} \times \vec{v}^{P}_{21}$$

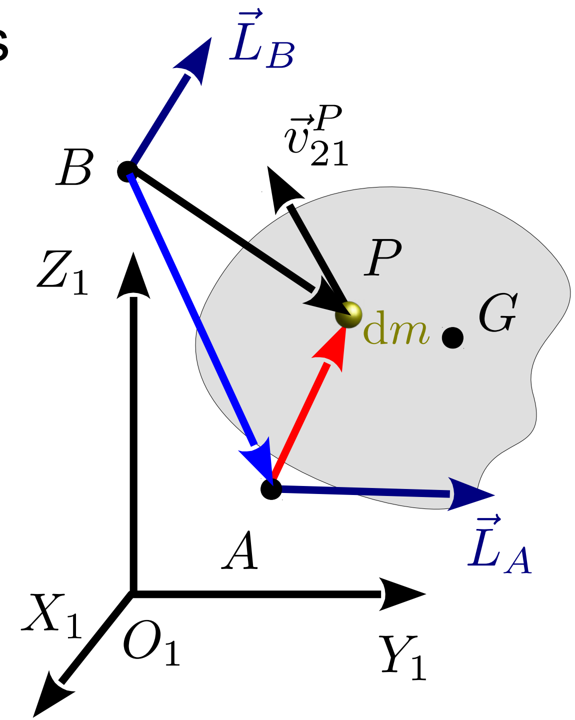
$$= \int_M \mathrm{d}m\, (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}) \times \vec{v}^{P}_{21}$$

$$= \int_M \mathrm{d}m\, \overrightarrow{BA} \times \vec{v}^{P}_{21} + \int_M \mathrm{d}m\, \overrightarrow{AP} \times \vec{v}^{P}_{21}$$

$$= \overrightarrow{BA} \times \left(\int_M \mathrm{d}m\, \vec{v}^{P}_{21}\right) + \int_M \mathrm{d}m\, \overrightarrow{AP} \times \vec{v}^{P}_{21}$$

$$= \overrightarrow{BA} \times \vec{C} + \vec{L}_A$$

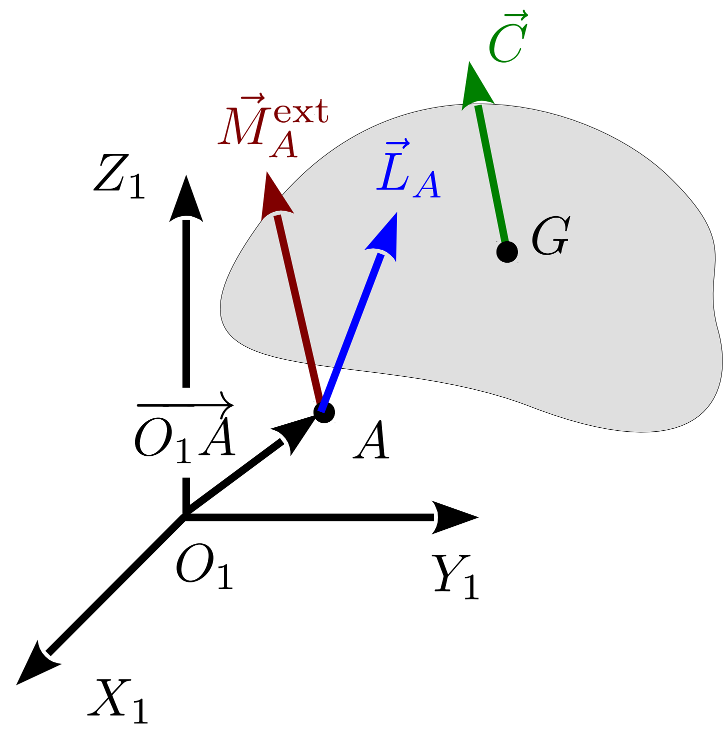
$$\boxed{\vec{L}_B = \vec{L}_A + \vec{C} \times \overrightarrow{AB}}$$



$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}$$

- Sistema sometido a fuerzas externas

$$\dot{\vec{L}}_A = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \vec{M}_A^{\text{ext}} + \vec{C} \times \dot{\overrightarrow{O_1A}}$$



$\vec{C}$ Cantidad de movimiento del CM

$\vec{M}_A^{\text{ext}}$ Momento neto de las fuerzas externas respecto a A

$\dot{\overrightarrow{O_1A}}$ Velocidad absoluta de A respecto al punto fijo absoluto O_1

- Si A es el centro de masas G

$$\dot{\vec{L}}_G = \vec{M}_G^{\text{ext}}$$

- Si A es un punto fijo absoluto O

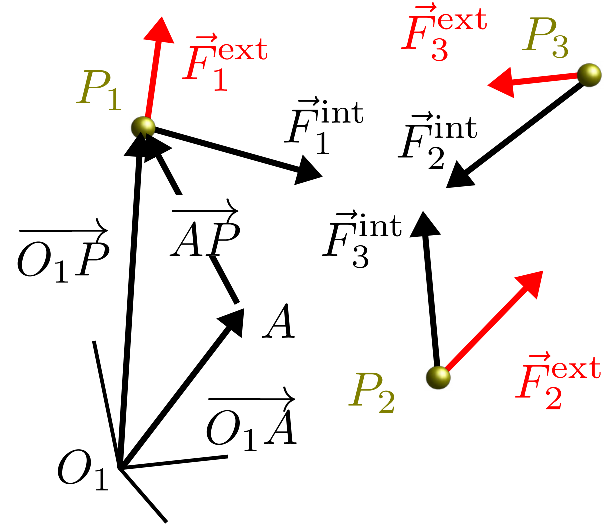
$$\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O^{\text{ext}}$$

- Válido aunque $\vec{v}_{21}^{\,G} \neq \vec{0}$

Teorema del momento cinético (T.M.C.)

- Demostración

$$\vec{L}_{Ai} = \overrightarrow{AP}_i \times (m_i\vec{v}_{Pi}) = (\overrightarrow{O_1P}_i - \overrightarrow{O_1A}) \times (m_i\vec{v}_{Pi})$$



- Derivando respecto al tiempo

$$\dot{\vec{L}}_{Ai} = (\vec{v}_{Pi} - \dot{\overrightarrow{O_1A}}) \times (m_i\vec{v}_{Pi}) + (\overrightarrow{OP}_i - \overrightarrow{O_1A}) \times (m_i\dot{\vec{v}}_{Pi})$$

$$\dot{\vec{L}}_{Ai} = m_i\vec{v}_{Pi} \times \dot{\overrightarrow{O_1A}} + (\overrightarrow{OP}_i - \overrightarrow{O_1A}) \times (\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int})$$

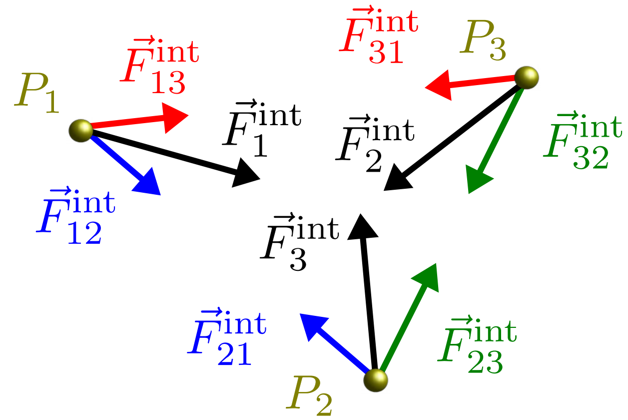
- Sumando para todas las partículas (o elementos de volumen en un sólido rígido)

$$\dot{\vec{L}}_A = \sum_i \dot{\vec{L}}_{Ai} = \left(\sum_i m_i\vec{v}_{Pi}\right) \times \dot{\overrightarrow{O_1A}} + \sum_i \overrightarrow{AP}_i \times \vec{F}_i^{ext} + \cancelto{0}{\sum_i \overrightarrow{AP}_i \times \vec{F}_i^{int}}$$

$$= \vec{C} \times \dot{\overrightarrow{O_1A}} + \vec{M}_A^{\mathrm{ext}}$$

- Demostración de que el momento neto de las fuerzas internas es cero

$$\vec{F}_1^{\text{int}} = \vec{F}_{12}^{\text{int}} + \vec{F}_{13}^{\text{int}}$$
$$\vec{F}_2^{\text{int}} = \vec{F}_{21}^{\text{int}} + \vec{F}_{23}^{\text{int}}$$
$$\vec{F}_3^{\text{int}} = \vec{F}_{31}^{\text{int}} + \vec{F}_{33}^{\text{int}}$$



$$\vec{F}_{12}^{\text{int}} = -\vec{F}_{21}^{\text{int}}$$
$$\vec{F}_{13}^{\text{int}} = -\vec{F}_{31}^{\text{int}}$$
$$\vec{F}_{23}^{\text{int}} = -\vec{F}_{32}^{\text{int}}$$

$$\begin{aligned}\sum_i \overrightarrow{AP}_i \times \vec{F}_i^{\text{int}} &= \overrightarrow{AP}_1 \times (\vec{F}_{12}^{\text{int}} + \vec{F}_{13}^{\text{int}}) + \overrightarrow{AP}_2 \times (\vec{F}_{21}^{\text{int}} + \vec{F}_{23}^{\text{int}}) + \overrightarrow{AP}_3 \times (\vec{F}_{31}^{\text{int}} + \vec{F}_{32}^{\text{int}}) \\ &= (\overrightarrow{AP}_1 - \overrightarrow{AP}_2) \times \vec{F}_{12}^{\text{int}} + (\overrightarrow{AP}_1 - \overrightarrow{AP}_3) \times \vec{F}_{13}^{\text{int}} + (\overrightarrow{AP}_2 - \overrightarrow{AP}_3) \times \vec{F}_{23}^{\text{int}} \\ &= (\overrightarrow{P_1P}_2) \times \vec{F}_{12}^{\text{int}} + (\overrightarrow{P_1P}_3) \times \vec{F}_{13}^{\text{int}} + (\overrightarrow{P_2P}_3) \times \vec{F}_{23}^{\text{int}} \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

- Conservación total
  - A es un punto fijo absoluto O

$$\vec{M}_O^{\text{ext}} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{L}_O = \overrightarrow{cte}$$

  - A es el centro de masas G

$$\vec{M}_G^{\text{ext}} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{L}_G = \overrightarrow{cte}$$

- Conservación parcial: si el momento neto de las fuerzas externas no tiene componente sobre una dirección fija, la componente del momento cinético sobre esa componente se conserva

$$\vec{F}^{\text{ext}} \parallel \vec{u}\,(\text{fijo}) \Longrightarrow \vec{L}_O \cdot \vec{u} = cte$$

$$\vec{F}^{\text{ext}}\,\text{corta}\,\vec{u}\,(\text{fijo}) \Longrightarrow \vec{L}_O \cdot \vec{u} = cte$$

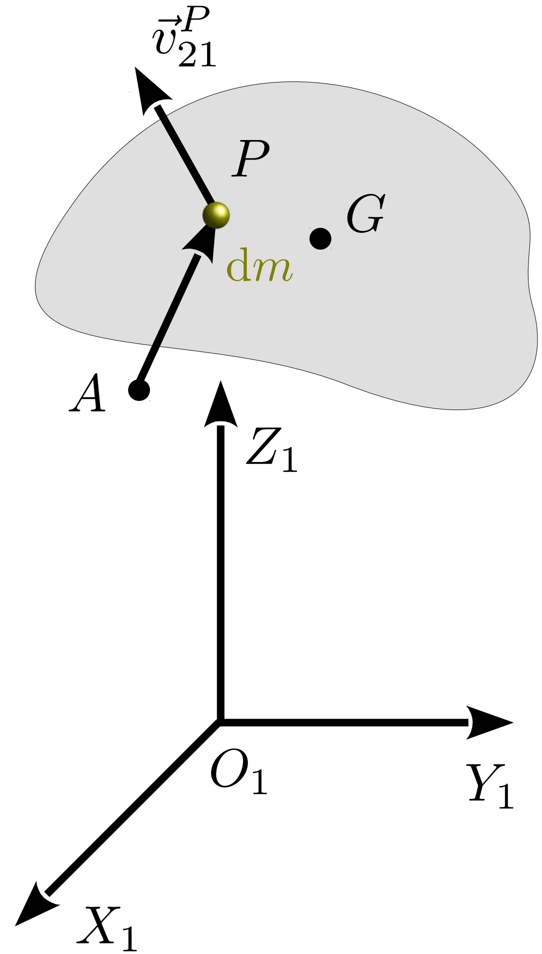
  - O debe ser un punto fijo absoluto
  - También es válido para G si el momento está expresado en una base fija

Índice

- Cantidad de movimiento de un sólido rígido
  - Teorema del Centro de Masas (T.C.M.)
- Momento cinético de un sólido rígido
  - Teorema del Momento Cinético (T.M.C.)
- Energía cinética de un sólido rígido
- Trabajo y potencia sobre un sólido rígido
- Teorema de la energía
- Trabajo interno de un par de sólidos en contacto

- Reducción cinemática en el punto A $\{\vec{v}^{A}_{21}, \vec{\omega}_{21}\}$
- Distribución de masas del sólido $\{G, M, \overleftrightarrow{I}_A\}$
- Energía cinética del sólido rígido

$$T = \frac{1}{2}M|\vec{v}^{A}_{21}|^2 + M\overrightarrow{AG}\cdot(\vec{v}^{A}_{21}\times\vec{\omega}_{21}) + \frac{1}{2}\vec{\omega}_{21}\cdot\overleftrightarrow{I}_A\cdot\vec{\omega}_{21}$$



- Si A es un punto fijo O: $\vec{v}^{O}_{21} = \vec{0}$

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}_{21}\cdot\overleftrightarrow{I}_O\cdot\vec{\omega}_{21} = \frac{1}{2}\vec{\omega}_{21}\cdot\vec{L}_O$$

- Si A es el centro de masa G: $\overrightarrow{GG} = \vec{0}$

$$T = \frac{1}{2}M|\vec{v}^{G}_{21}|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}_{21}\cdot\overleftrightarrow{I}_G\cdot\vec{\omega}_{21}$$

  - Esto es cierto siempre aunque $\vec{v}^{G}_{21} \neq \vec{0}$

Índice

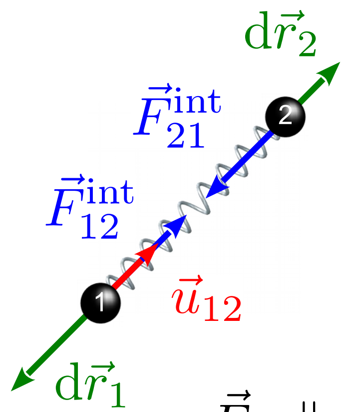
- Cantidad de movimiento de un sólido rígido
  - Teorema del Centro de Masas (T.C.M.)
- Momento cinético de un sólido rígido
  - Teorema del Momento Cinético (T.M.C.)
- Energía cinética de un sólido rígido
- Trabajo y potencia sobre un sólido rígido
- Teorema de la energía
- Trabajo interno de un par de sólidos en contacto

- Para un sistema de partículas

$$\mathrm{d}W^{\mathrm{int}} = \sum_{\text{pares}} \vec{F}_{ij}^{int} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{ij}$$

$$\mathrm{d}\vec{r}_{ij} = \mathrm{d}\vec{r}_i - \mathrm{d}\vec{r}_j$$

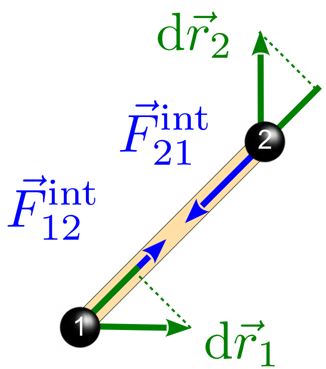
$$\mathrm{d}\vec{r}_{ij} \cdot \vec{u}_{ij} \neq 0$$



$$\vec{F}_{ij} \parallel \vec{u}_{ij}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W^{\mathrm{int}} &= \vec{F}_{12} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2 \\ &= \vec{F}_{12} \cdot (\mathrm{d}\vec{r}_1 - \mathrm{d}\vec{r}_2) \\ &= \vec{F}_{12} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{12} \neq 0 \end{aligned}$$

- Para un sólido rígido: $\mathrm{d}\vec{r}_{ij} \cdot \vec{u}_{ij} = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}W^{\mathrm{int}} = 0$



$$\mathrm{d}W_1^{\mathrm{int}} = \vec{F}_{12} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_1 \neq 0$$

$$\mathrm{d}W_2^{\mathrm{int}} = \vec{F}_{21} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2 \neq 0$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W^{\mathrm{int}} &= \mathrm{d}W_1^{\mathrm{int}} + \mathrm{d}W_2^{\mathrm{int}} \\ &= \vec{F}_{12} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2 \\ &= \vec{F}_{12} \cdot (\mathrm{d}\vec{r}_1 - \mathrm{d}\vec{r}_2) \\ &= \vec{F}_{12} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{12} = 0 \end{aligned}$$

Trabajo y potencia aportados a un sólido rígido por fuerzas externas

- En un sólido rígido $\mathrm{d}W = \cancel{\mathrm{d}W^{\mathrm{int}}}^{0} + \mathrm{d}W^{\mathrm{ext}} = \mathrm{d}W^{\mathrm{ext}}$
- Sobre el sólido actúa un conjunto de fuerzas externas $\{\vec{F}_k^{\mathrm{ext}}\}_{k=1}^{n}$ aplicadas en los puntos $\{P_k\}_{k=1}^{n}$
- Reducción cinemática del movimiento del sólido en el punto A: $\{\vec{v}_{21}^{A},\,\vec{\omega}_{21}\}$
- La potencia total suministrada por las fuerzas externas es

$$P = \vec{F}^{\mathrm{ext}} \cdot \vec{v}_{21}^{A} + \vec{M}_A^{\mathrm{ext}} \cdot \vec{\omega}_{21}$$

$$\vec{F}^{\mathrm{ext}} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\mathrm{ext}}$$

$$\vec{M}_A^{\mathrm{ext}} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{AP}_k \times \vec{F}_k^{\mathrm{ext}}$$

  - Si A es el centro de masas G

$$\mathrm{d}W^{\mathrm{ext}} = \mathrm{d}W_{\mathrm{tras}} + \mathrm{d}W_{\mathrm{rot}} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} \mathrm{d}W_{\mathrm{tras}} = \vec{F}^{\mathrm{ext}} \cdot \vec{v}_{21}^{G}\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}W_{\mathrm{rot}} = \vec{M}_G^{\mathrm{ext}} \cdot \vec{\omega}_{21}\,\mathrm{d}t \end{array}$$

- Demostración
  - La potencia suministrada por las fuerzas externas es

$$P = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\mathrm{ext}} \cdot \vec{v}_{21}^{P_k} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\mathrm{ext}} \cdot (\vec{v}_{21}^{A} + \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{AP}_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\mathrm{ext}} \cdot \vec{v}_{21}^{A} + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\mathrm{ext}} \cdot \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{AP}_k$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\mathrm{ext}}\right) \cdot \vec{v}_{21}^{A} + \left(\sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{AP}_k \times \vec{F}_k^{\mathrm{ext}})\right) \cdot \vec{\omega}_{21}$$

$$= \vec{F}^{\mathrm{ext}} \cdot \vec{v}_{21}^{A} + \vec{M}_A^{\mathrm{ext}} \cdot \vec{\omega}_{21}$$

$\vec{v}_{21}^{P_k}$ son las velocidades absolutas de los puntos del sólido donde se aplican las fuerzas externas

Índice

- Cantidad de movimiento de un sólido rígido
  - Teorema del Centro de Masas (T.C.M.)
- Momento cinético de un sólido rígido
  - Teorema del Momento Cinético (T.M.C.)
- Energía cinética de un sólido rígido
- Trabajo y potencia sobre un sólido rígido
- Teorema de la energía
- Trabajo interno de un par de sólidos en contacto

Teorema de la energía en un sólido rígido (T.E.C.)

- El trabajo de las fuerzas internas es nulo

$$\mathrm{d}T = \mathrm{d}W = \mathrm{d}W^{\mathrm{ext}}$$

$$\dot{T} = \dot{W}^{\mathrm{ext}} = P = \vec{F}^{\mathrm{ext}} \cdot \vec{v}^{A}_{21} + \vec{M}^{\mathrm{ext}}_{A} \cdot \vec{\omega}^{A}_{21}$$

$$T(B) - T(A) = W^{\mathrm{ext}}(A,\, B)$$

- Descomposición de la energía cinética respecto al CM

$$T_{\mathrm{tras}} = \frac{1}{2}M|\vec{v}^{G}_{21}|^2 \qquad P_{\mathrm{tras}} = \dot{T}_{\mathrm{tras}} = \vec{F}^{\mathrm{ext}} \cdot \vec{v}^{G}_{21}$$

$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\vec{\omega}_{21} \cdot \overset{\leftrightarrow}{I}_{G} \cdot \vec{\omega}_{21} \qquad P_{\mathrm{rot}} = \dot{T}_{\mathrm{rot}} = \vec{M}^{\mathrm{ext}}_{G} \cdot \vec{\omega}_{21}$$

- En un sólido rígido, el T.E.C. se puede demostrar con T.C.M. y T.M.C.
  - En un sistema deformable no

Teorema de conservación de la energía mecánica (T.C.E.M.)

- Fuerzas no trabajadoras: el punto de aplicación es fijo o la velocidad del punto de aplicación es perpendicular a la fuerza
- Fuerzas trabajadoras
  - No conservativas
  - Conservativas: se puede definir una energía potencial asociada
- Si sólo las fuerzas conservativas hacen trabajo

$$E = T + V \qquad \mathrm{d}E = 0 \qquad E = \mathrm{cte}$$

- Si hay fuerzas trabajadoras no conservativas

$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}W_{NC} \qquad \Delta E = W_{NC} \qquad \dot{E} = P_{NC}$$

Índice

- Cantidad de movimiento de un sólido rígido
  - Teorema del Centro de Masas (T.C.M.)
- Momento cinético de un sólido rígido
  - Teorema del Momento Cinético (T.M.C.)
- Energía cinética de un sólido rígido
- Trabajo y potencia sobre un sólido rígido
- Teorema de la energía
- Trabajo interno de un par de sólidos en contacto

Trabajo interno en un par de sólidos en contacto

- Definiciones de trabajos

$\mathrm{d}W_{ij}$	Trabajo que el sólido i recibe del j
$\mathrm{d}W_{ji}$	Trabajo que el sólido j recibe del i
$\mathrm{d}W_{\mathrm{int}}(i,j) = \mathrm{d}W_{ij} + \mathrm{d}W_{ji}$	Trabajo total interno

- Definiciones de potencias

P_{ij}	Potencia que el sólido i recibe del j
P_{ji}	Potencia que el sólido j recibe del i
$P_{\mathrm{int}}(i,j) = P_{ij} + P_{ji}$	Potencia total interna

- Hay que calcularlos en un MOVIMIENTO ABSOLUTO

Trabajo interno en un par de sólidos en contacto

- Caso LISO $\mathrm{d}W_{\mathrm{int}}^{\mathrm{liso}}(i,j) = 0$ $\quad P_{\mathrm{int}}^{\mathrm{liso}}(i,j) = 0$

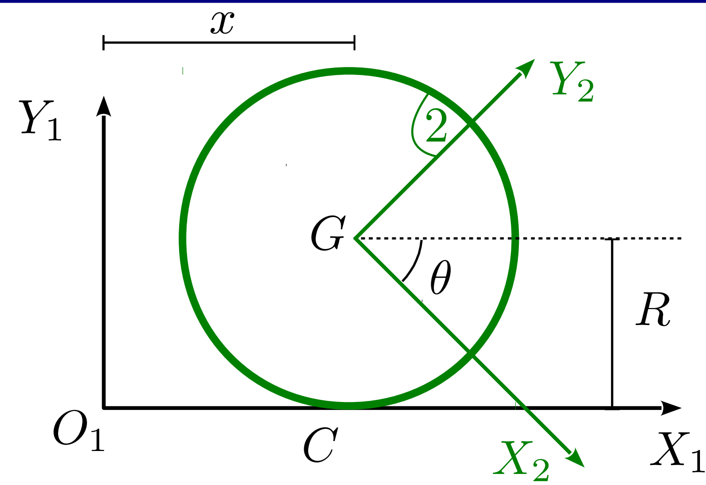
- Caso RUGOSO $\mathrm{d}W_{\mathrm{int}}^{\mathrm{rug}}(i,j) \leq 0$ $\quad P_{\mathrm{int}}^{\mathrm{rug}}(i,j) \leq 0$

  - Régimen dinámico: hay deslizamiento entre los sólidos

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{int}}^{\mathrm{rug}}(i,j) < 0 \qquad P_{\mathrm{int}}^{\mathrm{rug}}(i,j) < 0$$

  - Régimen estático: no hay deslizamiento entre los sólidos
    - Reposo relativo
    - Rodadura sin deslizamiento

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{int}}^{\mathrm{rug}}(i,j) = 0 \qquad P_{\mathrm{int}}^{\mathrm{rug}}(i,j) = 0$$



- Cinemática

$$\vec{\omega}_{21} = -\dot{\theta}\,\vec{k} \qquad \vec{v}^{\,G}_{21} = \dot{x}\,\vec{\imath}_1$$

$$\vec{v}^{\,C}_{21} = \vec{v}^{\,G}_{21} + \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{GC} = (\dot{x} - R\dot{\theta})\,\vec{\imath}_1$$

- Rueda deslizando $\quad \vec{v}^{\,C}_{21} \neq \vec{0}$

$$\vec{F}^{\rm din}_{\rm roz} \parallel -\vec{v}^{\,C}_{21} \qquad |\vec{F}^{\rm din}_{\rm roz}| = \mu_d N \qquad P^{\rm din}_{\rm roz} = \vec{F}^{\rm din}_{\rm roz} \cdot \vec{v}^{\,C}_{21} < 0$$

- La fuerza de rozamiento es una fuerza activa no conservativa que hace trabajo
- Dos grados de libertad: { x, θ }

- Rueda sin deslizar $\quad \vec{v}^{\,C}_{21} = \vec{0} \Longrightarrow \dot{x} = R\dot{\theta} \Longrightarrow x - x(0) = R(\theta - \theta(0))$

$$|\vec{F}^{\rm est}_{\rm roz}| \leq \mu_e N \qquad P^{\rm est}_{\rm roz} = \vec{F}^{\rm est}_{\rm roz} \cdot \vec{v}^{\,C}_{21} = 0$$

- La fuerza de rozamiento es una fuerza de reacción vincular, que no hace trabajo y que establece una ligadura entre x y θ (1 grado de libertad)