Tema 10: Movimiento ondulatorio

FISICA I, 1º Grado en Ingeniería Civil

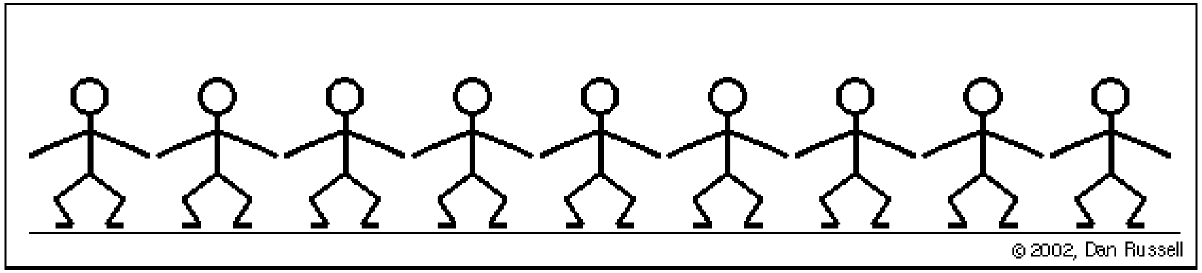
Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Índice

- Onda: perturbación que viaja sin transferencia de materia pero transportando energía



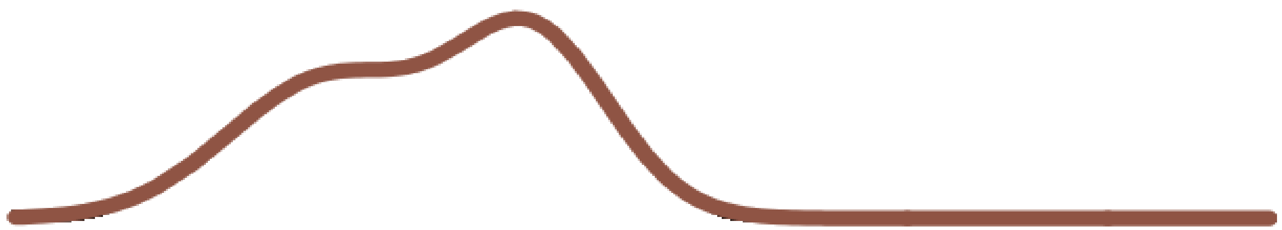
Animación cortesía de Dan Russell, Kettering University

- Clasificación según el medio de propagación
  - **Mecánicas:** perturbación en un medio material
    - Ondas en el agua, ondas sísmicas, de sonido, en una cuerda
  - **Electromagnéticas**: no requieren un medio material
    - Luz, rayos X, ondas de radio

- La formación de una onda mecánica requiere
  - Una fuente de perturbación
    - Una piedra que cae al agua
    - Un dedo pulsando una cuerda de guitarra
  - Un medio que pueda ser perturbado
    - El agua
    - La cuerda de la guitarra
  - Mecanismo físico de interacción entre partículas del medio
    - Fuerzas de atracción-repulsión entre las moléculas de agua
    - Fuerzas de atracción-repulsión entre las moléculas de la cuerda

Ondas longitudinales y transversales

- Calificación de las ondas según la dirección del desplazamiento de las partículas del medio respecto de la dirección de propagación
  - Transversales: la dirección de la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación
    - Ondas en una cuerda, olas, electromagnéticas

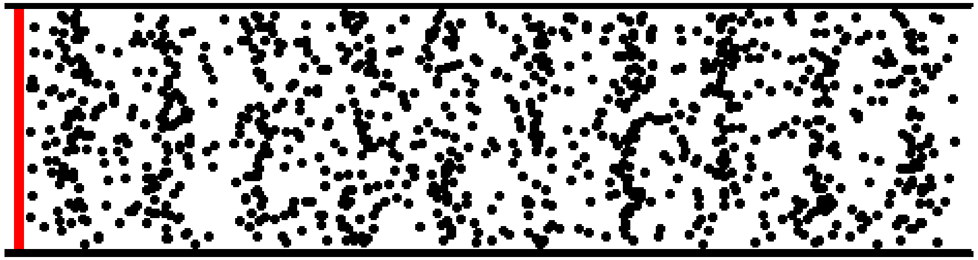


Ondas longitudinales y transversales

- Calificación de las ondas según la dirección del desplazamiento de las partículas del medio respecto de la dirección de propagación
  - Transversales: la dirección de la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación
    - Ondas en una cuerda, olas, electromagnéticas
  - Longitudinales: la dirección de la perturbación es paralela a la dirección de propagación
    - Ondas de sonido, ondas en un muelle

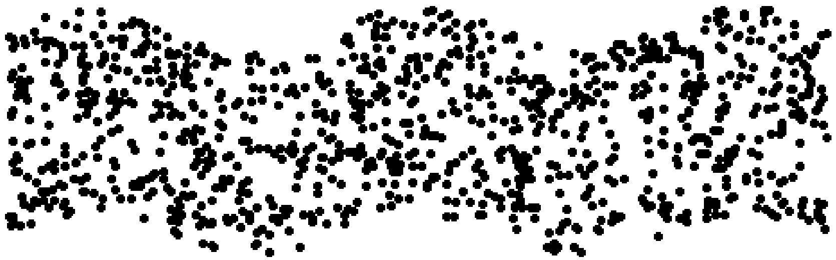
Ondas longitudinales y transversales

- Onda longitudinal



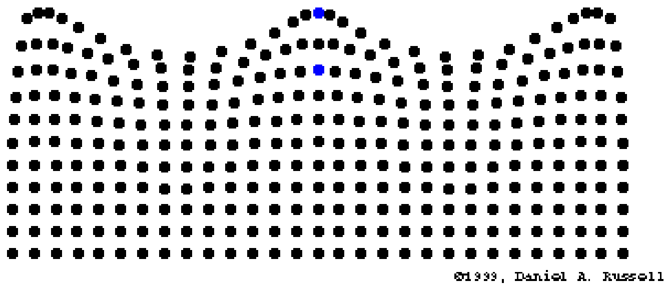
Animación cortesía
de Dan Russell,
Kettering University

- Onda transversal



Animación cortesía
de Dan Russell,
Kettering University

- Onda con componente transversal y longitudinal



Animación cortesía
de Dan Russell,
Kettering University

Índice

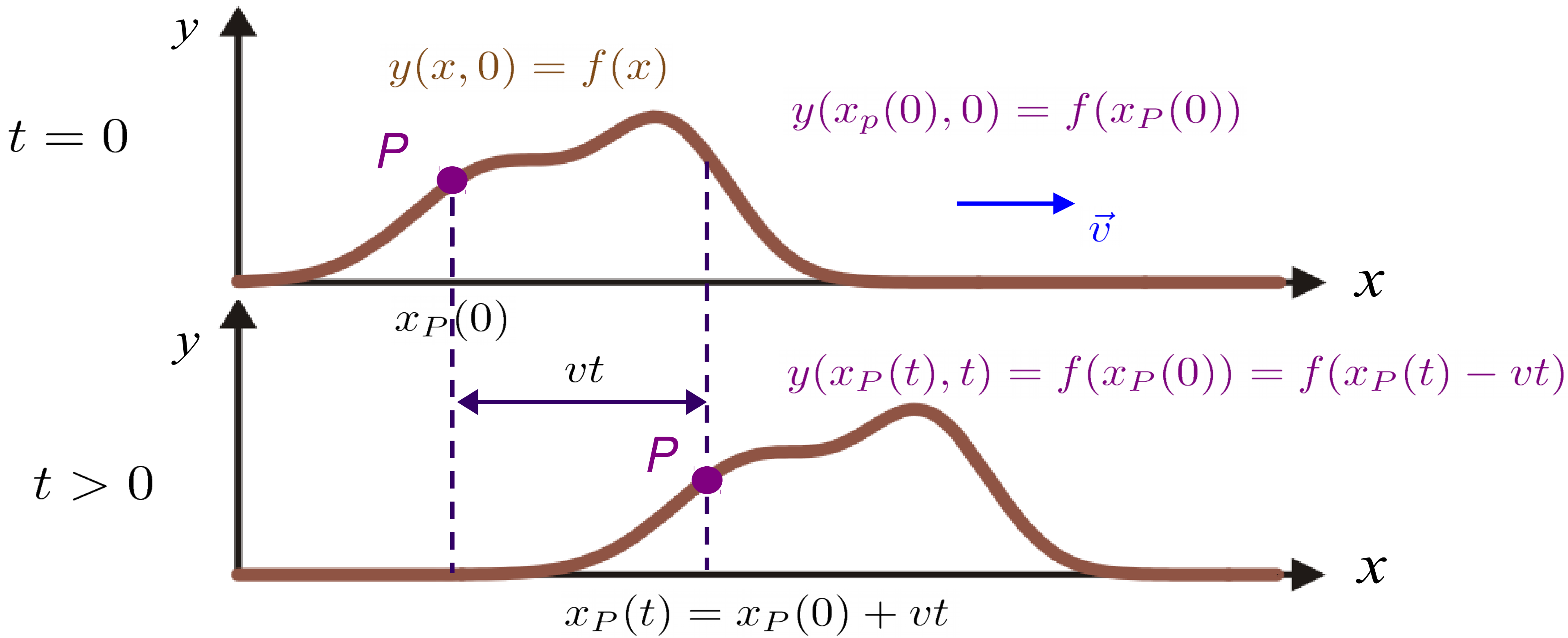
- Introducción
- Función de onda
- Ecuación de onda lineal
- Ondas sinusoidales
- Frentes de onda
- Energía transmitida por una onda sinusoidal
- Reflexión y transmisión
- Superposición de ondas

Función de onda

- ¿Como se describe matemáticamente un pulso que viaja por una cuerda?

Función de onda

- Descripción matemática $y(x,t)$



$$y(x,t) = f(x - vt) \longrightarrow \text{Función de onda}$$

$$\boxed{y(x,t) = f(x \mp vt)}$$

- Representa el valor de la coordenada *y* en cualquier punto *x* en un instante *t*
- El signo negativo indica una onda que viaja en sentido de *x* creciente (hacia la derecha en el diagrama)
- El signo positivo indica una onda que viaja en sentido de *x* decreciente (hacia la izquierda en el diagrama)
- Para un t_0 fijo la función $y(x,t_0)$ proporciona la forma geométrica del pulso: es la forma de onda

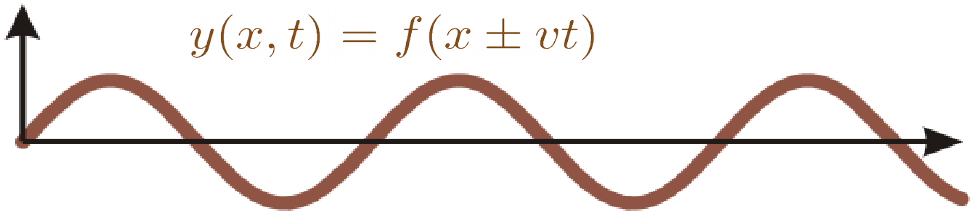
Índice

- Introducción
- Función de onda
- Ecuación de onda lineal
- Ondas sinusoidales
- Frentes de onda
- Energía transmitida por una onda sinusoidal
- Reflexión y transmisión
- Superposición de ondas

- Buscamos una ecuación diferencial que identifique una onda

$$y(x,t) = f(x \pm vt) = f[\eta(x,t)]$$

$$\eta(x,t) = x \pm vt$$



Regla de la cadena

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\overbrace{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)}^{1} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\right) = \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\eta^2}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\overbrace{\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)}^{\pm v} = \pm v\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\pm v\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\right) = \boxed{v^2\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\eta^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\eta^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\eta^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

Ecuación de onda lineal

- *v* es la velocidad de la onda
- Si al analizar un sistema aparece esta ecuación sabemos que hay una onda

Velocidad de propagación

La velocidad de propagación sólo depende de las propiedades del medio

- No depende de propiedades de la fuente (velocidad, etc)

- Para ondas mecánicas en medios materiales

$$v = \sqrt{\frac{\text{propiedad elástica del medio}}{\text{propiedad inercial del medio}}}$$

- Cuerda tensa $\quad v = \sqrt{F_T/\mu}$
  - F_T es la tensión de la cuerda y μ es la densidad lineal de masa

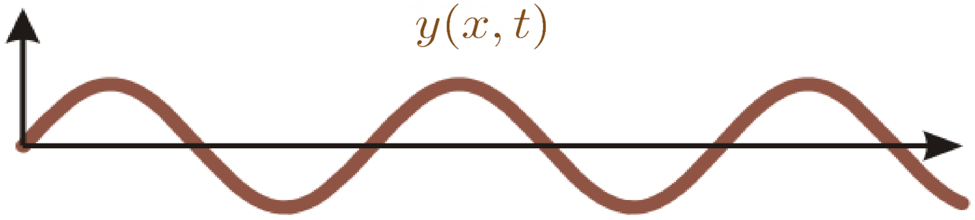
- Cuerda tensa de diámetro D $\quad v = \sqrt{4\,F_T/\pi\,\rho\,D^2}$
  - ρ es la densidad volumétrica de masa

- Sonido en un medio sólido $$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$
  - *Y* es el módulo de Young y ρ es la densidad volumétrica de masa
  - Hormigón: 3000 m/s (aprox), Acero: 5100 m/s (aprox)
- Sonido en un fluido (líquido o gas) $$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S}$$
  - *B* es el módulo de compresibilidad y ρ es la densidad volumétrica de masa $$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} \quad [\mathrm{N/m^2}]$$
  - *P* es la presión y la S indica que es un proceso adiabático
  - Agua: 1500 m/s (aprox)
- Sonido en un gas ideal $$v = \sqrt{\gamma R T/P_M} \propto \sqrt{T}$$
  - γ: coeficiente adiabático, *R:* constante de los gases ideales, *T:* temperatura, P_M: peso molecular del gas
  - Sonido en el aire alrededor de la temperatura ambiente $$v = v_0 + a\,T_C$$

$$v_0 = 331\,\mathrm{m/s} \qquad a = 0,600\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^oC}}$$

Obtención de la ecuación de onda en una cuerda

- Queremos describir la propagación de una perturbación en una cuerda



- Suposiciones
  - Cuerda homogénea
    - Sección uniforme
    - Densidad linea de masa uniforme μ

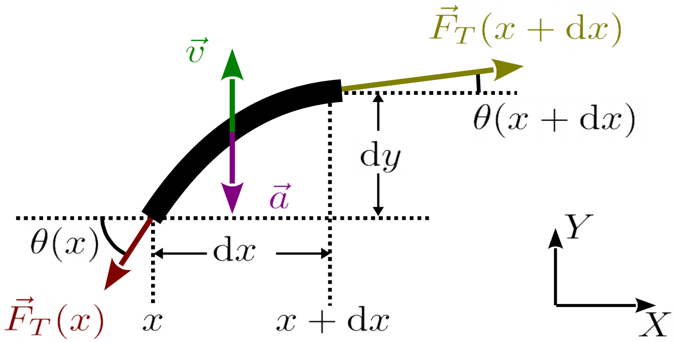
$$\mu = \frac{m}{L}$$

  - Amplitud de las oscilaciones pequeña
  - Vibraciones transversales
    - Cada punto de la cuerda se mueve sólo verticalmente

- Elemento de una cuerda

(amplitud pequeña)

$$\mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}l = \mu\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} \simeq \mu\mathrm{d}x$$



$$\vec{v} = \frac{\partial y}{\partial t}\vec{\jmath} \qquad \vec{a} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{\jmath}$$

- Fuerza sobre el elemento

$$\vec{F}_T(x) = F_T(x)(-\cos[\theta(x)]\,\vec{\imath} - \mathrm{sen}\,[\theta(x)]\,\vec{\jmath})$$

$$\vec{F}_T(x+\mathrm{d}x) = F_T(x+\mathrm{d}x)\,(\cos[\theta(x+\mathrm{d}x)]\,\vec{\imath} + \mathrm{sen}\,[\theta(x+\mathrm{d}x)]\,\vec{\jmath})$$

- Segunda Ley de Newton sobre el elemento

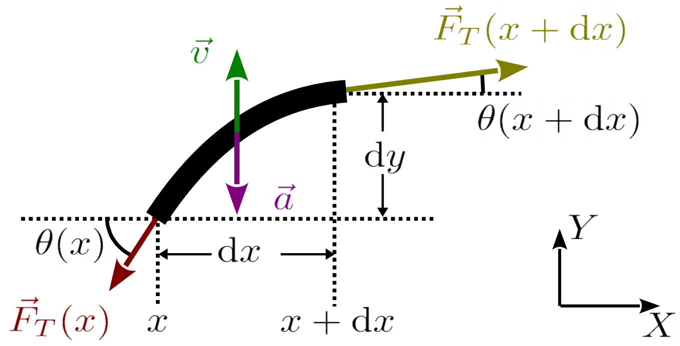
$$\mathrm{d}m\,\vec{a} = \vec{F}_T(x) + \vec{F}_T(x+\mathrm{d}x)$$

- Componente X ($a_x=0$)

$$0 = F_T(x+x)\cos(\theta(x+x)) - F_T(x)\cos(\theta(x))$$

$$\theta \ll 1 \Longrightarrow \cos\theta \simeq 1$$

$$\boxed{F_T(x) = F_T(x+\Delta x) = F_T \ \ (\mathrm{cte})}$$



- Componente Y

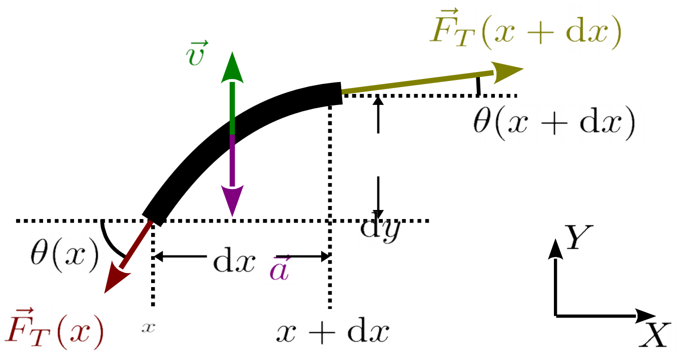
$$\mathrm{d}m\, a_y = \mathrm{d}m\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mu\,\mathrm{d}x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_T\left(\mathrm{sen}\left[\theta(x+\mathrm{d}x)\right] - \mathrm{sen}\left[\theta(x)\right]\right)$$

$$\theta \ll 1 \Longrightarrow \mathrm{sen}\,\theta \simeq \tan\theta \simeq \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F_T}{\mu}\left(\frac{(\partial y/\partial x)_{x+\mathrm{d}x} - (\partial y/\partial x)_x}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{F_T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- Ecuación de la perturbación

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F_T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

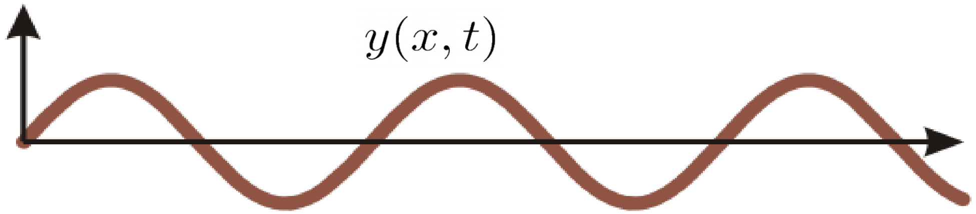


- Ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

- Velocidad de propagación

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}}$$



Índice

- Introducción
- Función de onda
- Ecuación de onda lineal
- Ondas sinusoidales
- Frentes de onda
- Energía transmitida por una onda sinusoidal
- Reflexión y transmisión
- Superposición de ondas

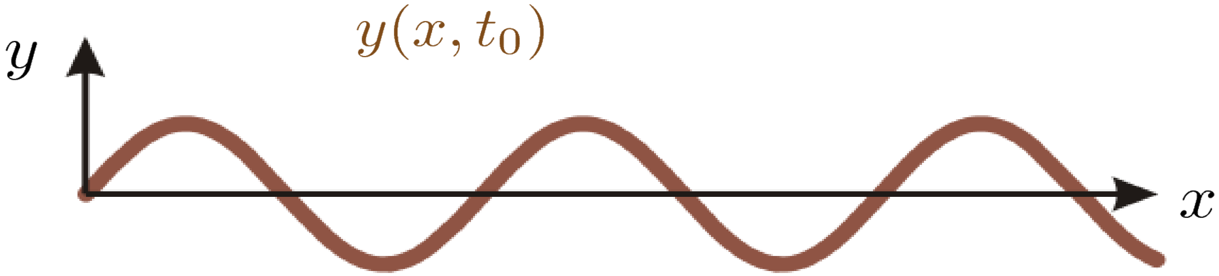
- Unimos el extremo de una cuerda a un objeto que describe un MAS (diapasón)

- Se produce un tren de ondas sinusoidales o armónicas
- Cada punto de la cuerda describe un MAS

Cualquier onda puede representarse como una suma de ondas armónicas

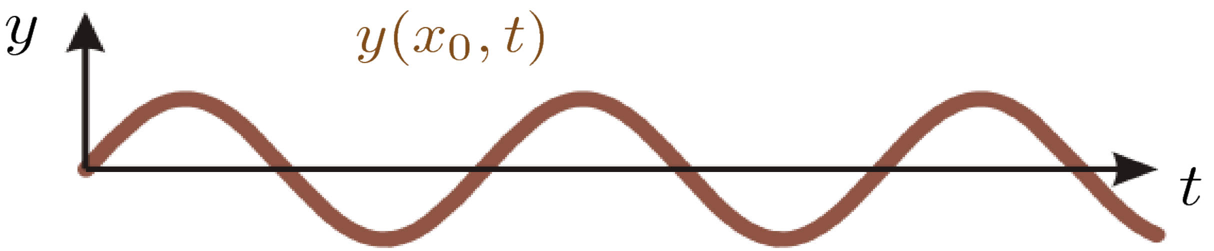
- En un instante fijo tenemos una oscilación espacial

$t = t_0$



- En un punto fijo tenemos una oscilación en el tiempo

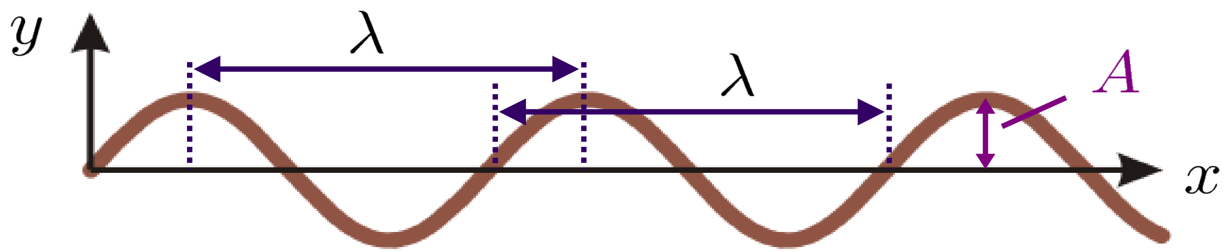
$x = x_0$



Una onda es una perturbación que se propaga en el tiempo y en el espacio

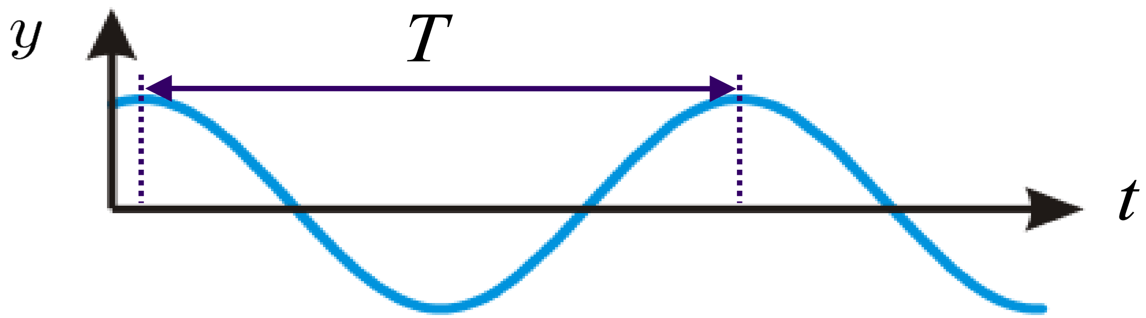
Ondas sinusoidales: longitud de onda y amplitud

- Longitud de onda (λ): distancia mínima entre dos puntos con la misma posición (*y*) y velocidad (v_y)



- Amplitud (*A*): máximo desplazamiento de cada partícula respecto de su posición de equilibrio

- Periodo (T): tiempo que tarda un punto del medio en realizar una oscilación
- Frecuencia (f): frecuencia del MAS que realiza cada punto del medio

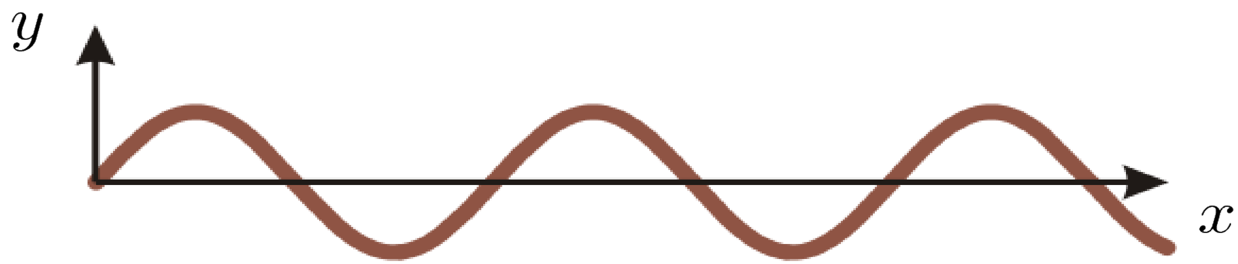


$$f = \frac{1}{T}$$

- Velocidad de la onda: en un tiempo *T* la onda recorre una distancia λ

$$\boxed{v = \frac{\lambda}{T}}$$

Cuidado: no hay que confundir v con v_y



- En t=0 $$y(x,0) = A \,\mathrm{sen}\,(kx + \phi)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$ → Número de onda (m^{-1})

$$\phi$$ → Constante de fase

Función sinusoidal de amplitud *A* que se repite cada λ y cuyo valor en *x=0* es *A* sen*(*ϕ*)*

Ondas sinusoidales: representación matemática

- En el instante inicial $y(x,0) = A\,\mathrm{sen}\,(kx + \phi)$

- En un punto cualquiera para un instante t

$$
\begin{aligned}
y(x,t) = y(x - vt, 0) &= A\,\mathrm{sen}\,(k\,(x - vt) + \phi) \\
&= A\,\mathrm{sen}\,(k\,x - k\,v\,t + \phi)
\end{aligned}
$$

  - Definimos $kv = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi}{T} = \omega$ Frecuencia angular

- Representación matemática de una onda sinusoidal

$$
\boxed{y(x,t) = A\,\mathrm{sen}\,(kx \pm \omega t + \phi)}
$$

  - Signo +: onda que viaja en sentido de *x* decreciente
  - Signo -: onda que viaja en sentido de *x* creciente

Ondas sinusoidales: resumen

$$\boxed{y(x,t) = A\,\mathrm{sen}\,(kx \pm \omega t + \phi) = A\,\mathrm{sen}\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{T}\right) + \phi\right)}$$

- Amplitud A
- Longitud de onda λ $\longrightarrow$ $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ Número de onda
- Frecuencia $f = \dfrac{1}{T}$ $\longrightarrow$ $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$ Frecuencia angular
- Velocidad de la onda $v = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda f = \dfrac{\omega}{k}$

Ondas sinusoidales: resumen

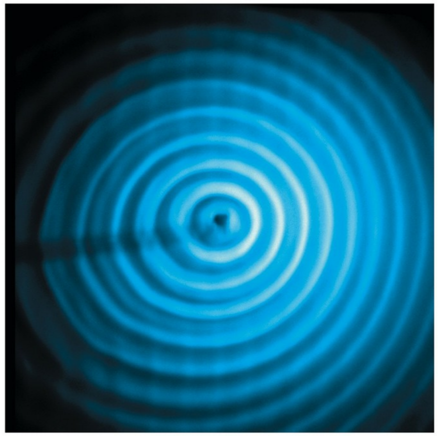
- La velocidad de propagación sólo depende de las propiedades del medio en el que se propaga la onda
  - No depende de las propiedades de la fuente de la perturbación
- La frecuencia de la onda es la frecuencia de oscilación de la fuente (en una onda sinusoidal)
  - La velocidad local de cada punto sí depende de la fuente de la perturbación
- La longitud de onda depende de las propiedades del medio y de la frecuencia de oscilación de la fuente de la perturbación (en una onda sinusoidal)

$$\lambda = v\,T = v/f$$

Índice

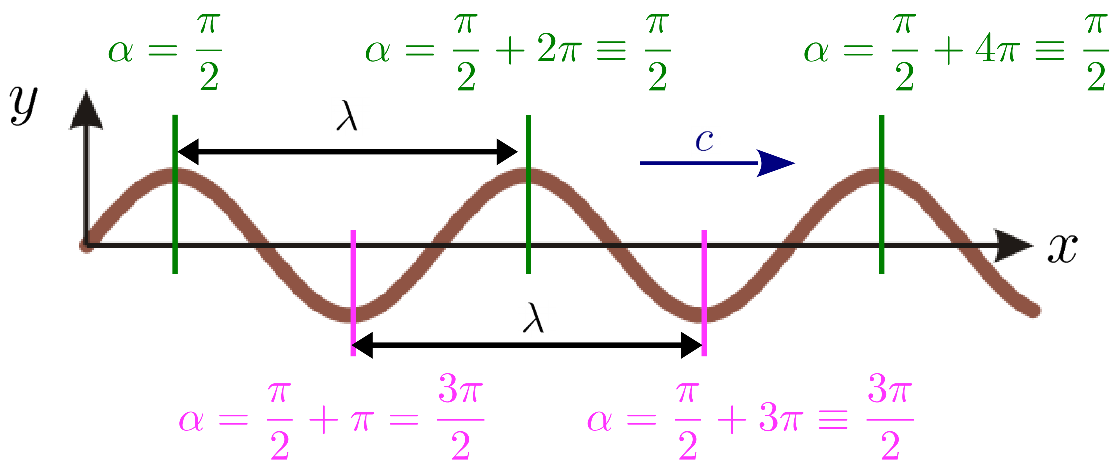
- Introducción
- Función de onda
- Ecuación de onda lineal
- Ondas sinusoidales
- Frentes de onda
- Energía transmitida por una onda sinusoidal
- Reflexión y transmisión
- Superposición de ondas

- En la Naturaleza las perturbaciones se pueden propagar en dos o en tres dimensiones
  - Una piedra que cae en un estanque genera ondas bidimensionales
  - Un sonido se propaga en el aire en forma de onda tridimensional



- Los frentes de onda son superficies en las cuales el valor de la fase es el mismo
  - Las ondas se pueden visualizar como frente de ondas que se desplazan con la velocidad de propagación de la onda

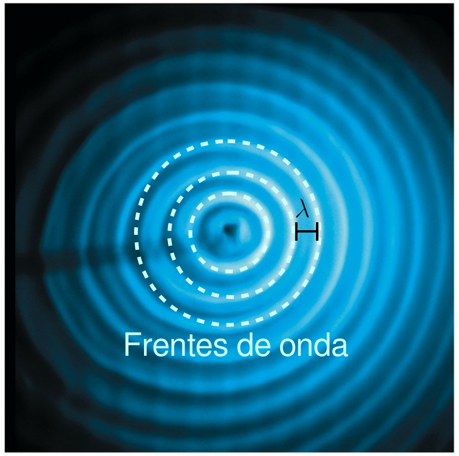
- Onda unidimensional en una cuerda (1D) $y(x,t) = A\,\mathrm{sen}\,(kx - \omega t + \phi)$
- La fase es el argumento del seno $\alpha = kx - \omega t + \phi$



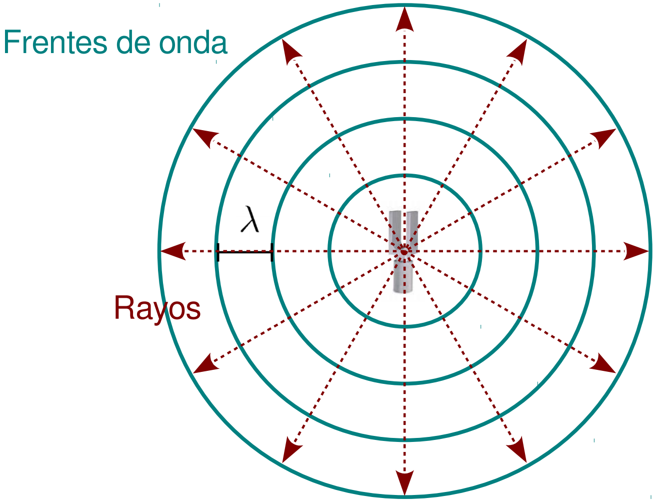
- En este caso los frentes de onda son líneas rectas paralelas entre sí
- Los frentes de onda están separados por una longitud de onda
- La dirección de propagación es perpendicular a los frentes de onda: rayos

Frentes de onda

- Vibrador en la superficie de un estanque (2D)
  - Los frentes de onda son circunferencias concéntricas con la fuente
  - Si estamos lejos de la fuente se parecen a líneas rectas: onda plana

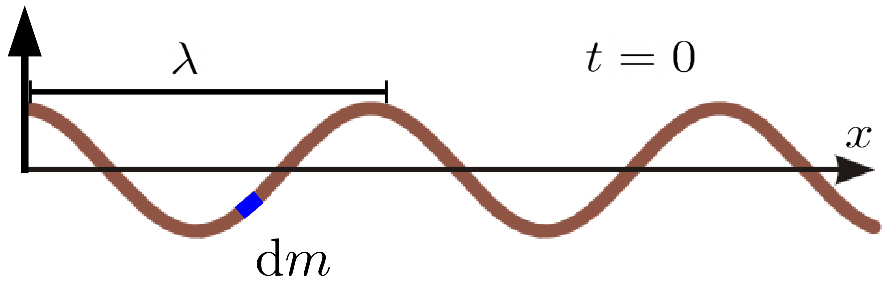


- Sonido producido por un diapasón (3D)



  - Los frentes de onda son esferas concéntricas con la fuente
  - Si estamos lejos de la fuente se parecen a superficies planas: ondas planas
  - Si el medio de propagación es homogéneo los rayos son líneas radiales

Índice



- Energía cinética total en una longitud de onda

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

$$y(x,0) = A\cos(kx)$$

$$v_y(x,0) = \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{(x,0)} = -A\omega \mathrm{sen}\,(kx)$$

$$\mathrm{d}E_c = \frac{1}{2}v_y^2\mathrm{d}m = \frac{1}{2}v_y^2\mu\,\mathrm{d}x \implies E_{c\lambda} = \int_0^\lambda \mathrm{d}E_c = \frac{1}{4}\mu A^2\omega^2\lambda$$

- Energía total en una longitud de onda

$$U_\lambda = E_{c\lambda}$$

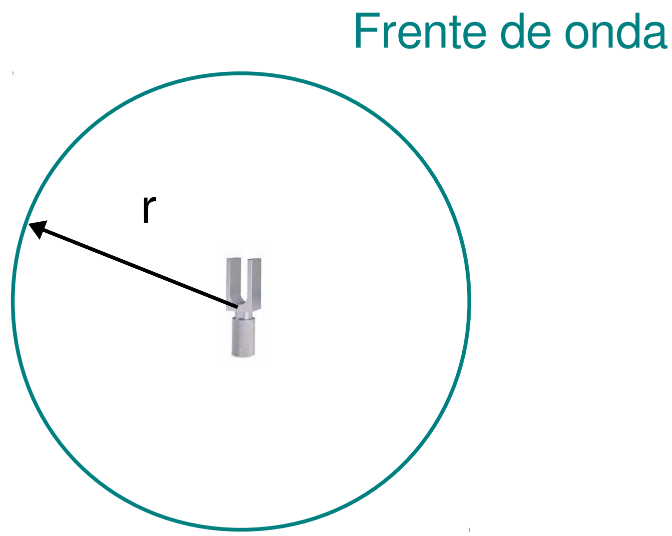
$$E_\lambda = E_{c\lambda} + U_\lambda = 2E_{c\lambda} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2\lambda$$

- Potencia transmitida en cada punto

$$\boxed{P = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 v}$$

- Si el medio de propagación es homogéneo, la potencia emitida por la fuente se distribuye uniformemente sobre la superficie del frente de onda

- La intensidad es la potencia media por unidad de área que esta incidiendo perpendicularmente a la dirección de propagación



$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2}$$ Onda esférica

- Se relaciona con la densidad de energía media

$$I = \eta_m c$$

  - η_m es la energía por unidad de volumen
  - c es la velocidad de propagación
  - Se mide en W/m^2

Acústica fisiológica: escala de decibelios

- La sensación sonora es aproximadamente proporcional al logaritmo de la intensidad acústica de la onda (Ley de Fechner)

- Los decibelios se construyen con una escala logarítmica en base 10

$$\boxed{L_I = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \qquad [\text{decibelios} = \text{dB}]}$$

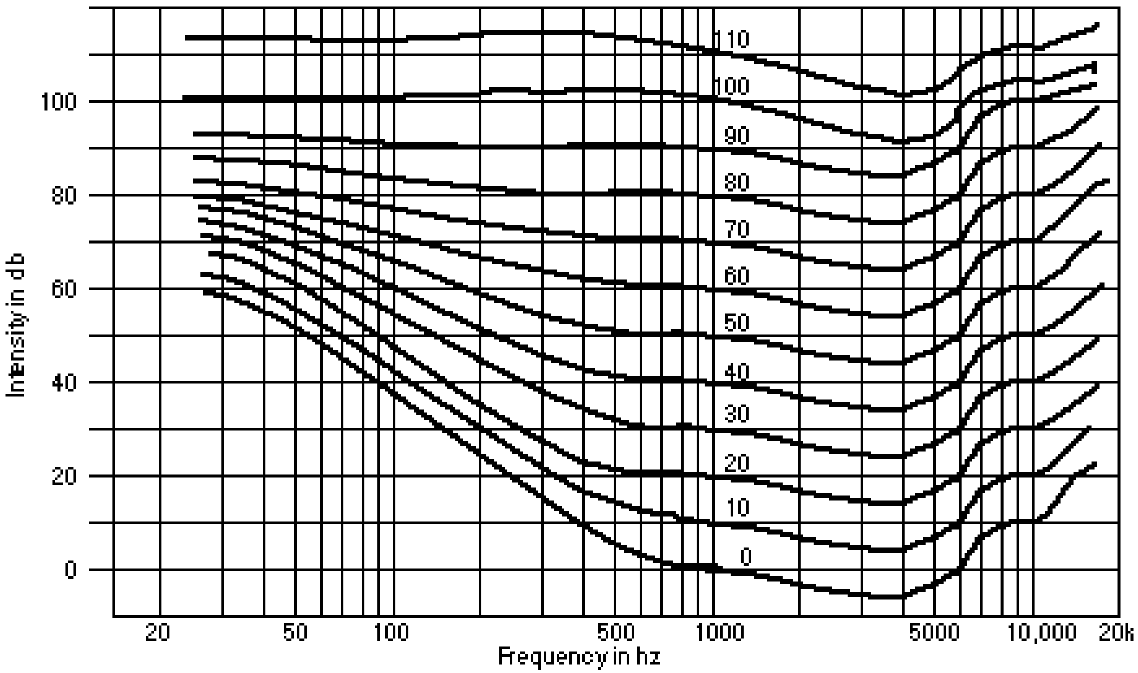
  - $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$ es la intensidad acústica mínima que puede percibir el oído humano para un sonido sinusoidal de 1 kHz

$$I = I_0 \times 10^{L_I/10}$$

    - L_I=100 dB implica $I = 10^{10}\, I_0$
    - Dos sonidos separados por 10 dB $\quad L_2 = L_1 + 10 \quad (\text{dB})$

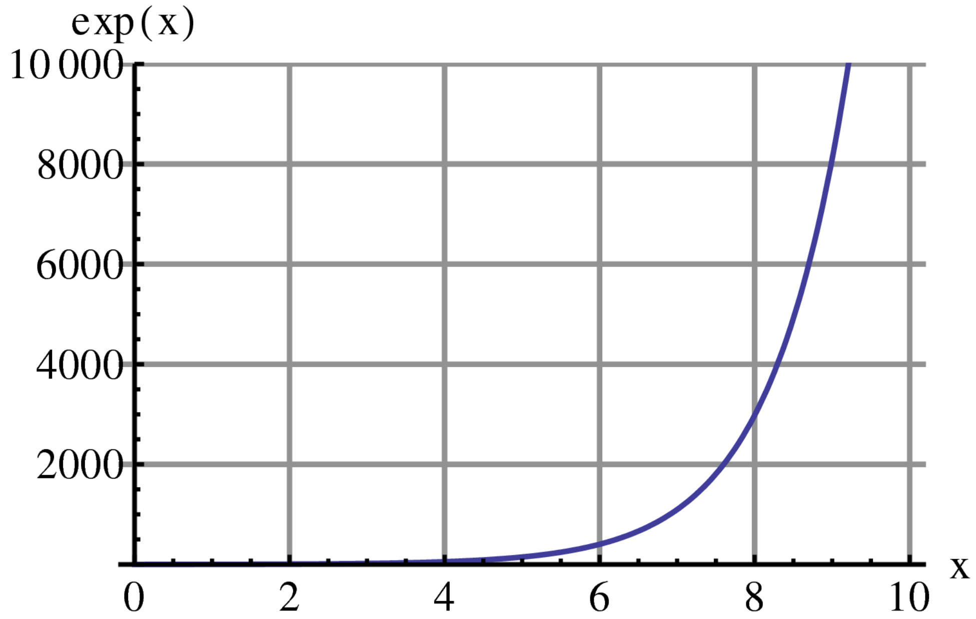
$$\frac{I_2}{I_1} = 10^{\frac{L_2}{10}-\frac{L_1}{10}} = 10^{\frac{L_1+10}{10}-\frac{L_1}{10}} = 10 \qquad \Longrightarrow \qquad I_2 = 10 I_1$$

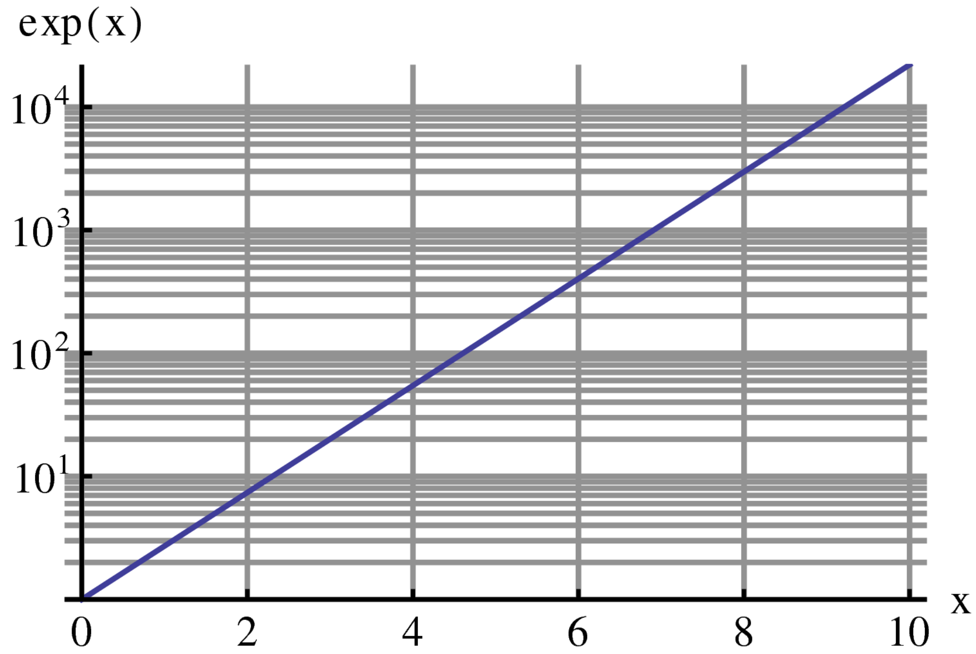
- Curvas de isosonoridad



- Los puntos de una curva corresponden a sonidos percibido por el oído con la misma intensidad
- El oído es más sensible en frecuencias medias y medio-altas
- La línea inferior marca el umbral de sensibilidad (0 dB)
- La línea superior marca el umbral de dolor (~ 120 dB)

- Semi-log $f(x) = e^x$

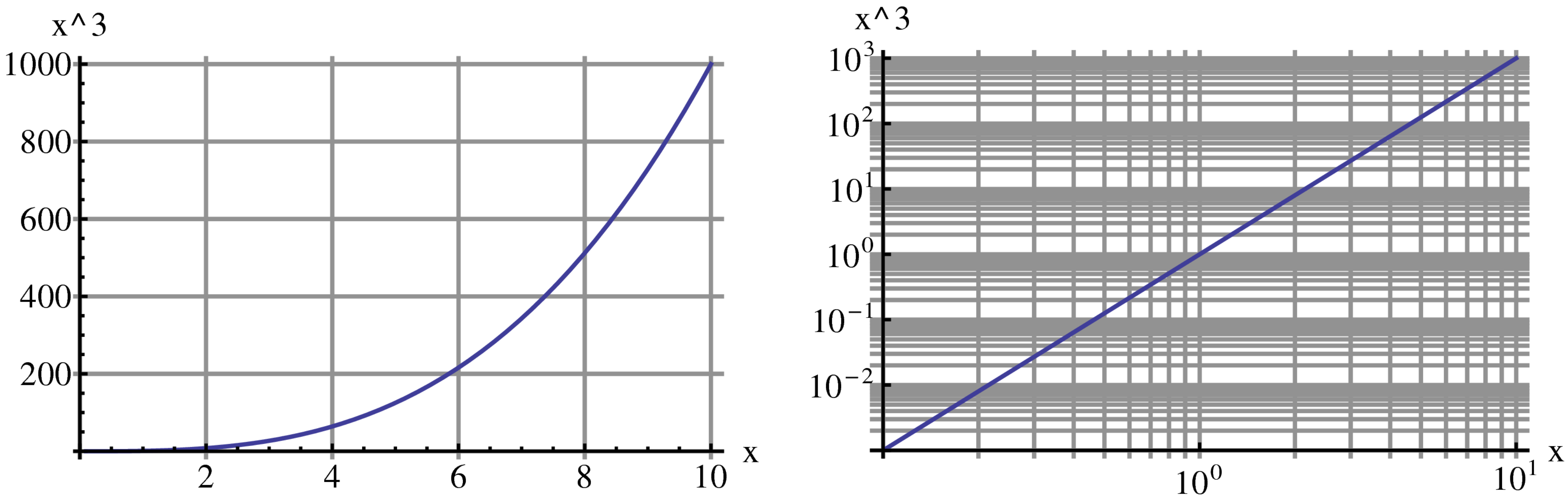




- En el eje logarítmico las marcas no están equiespaciadas
- Permite cubrir un mayor rango de valores y ver la curva en diferentes escalas
- Una función exponencial da una línea recta en el gráfico semi-log

$$\log e^x = (\log e)\, x$$

- Log-log $$f(x) = x^3$$



- En los ejes logarítmicos las marcas no están equiespaciadas
- Permite cubrir un mayor rango de valores y ver la curva en diferentes escalas
- Una función potencial da una línea recta en el gráfico log-log

$$\log x^\alpha = \alpha \log x$$

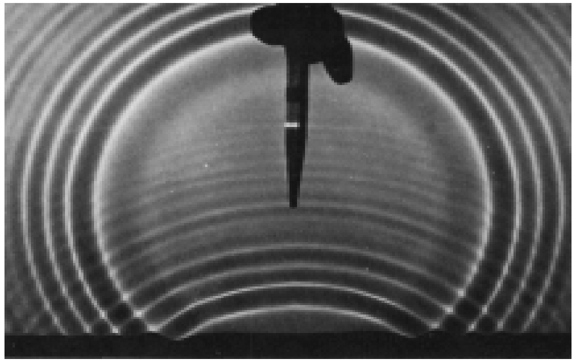
Índice

- Hasta ahora hemos estudiado la transmisión de ondas en un medio infinito

- Vamos a analizar lo que ocurre cuando una onda alcanza la frontera que separa dos medios de propiedades distintas

- Fenómenos relacionados

  - Reflexión: onda que regresa
    - Ejemplo: eco



  - Transmisión: onda que se propaga en el nuevo medio
    - Ejemplo: luz en el agua

- Reflexión total: onda en una cuerda
  - Cuerda con un extremo fijo

El pulso es reflejado con la misma forma que el pulso incidente, pero invertido

- Reflexión total: onda en una cuerda
  - Cuerda con un extremo libre

El pulso es reflejado con la misma forma que el pulso incidente

Reflexión y transmisión de ondas

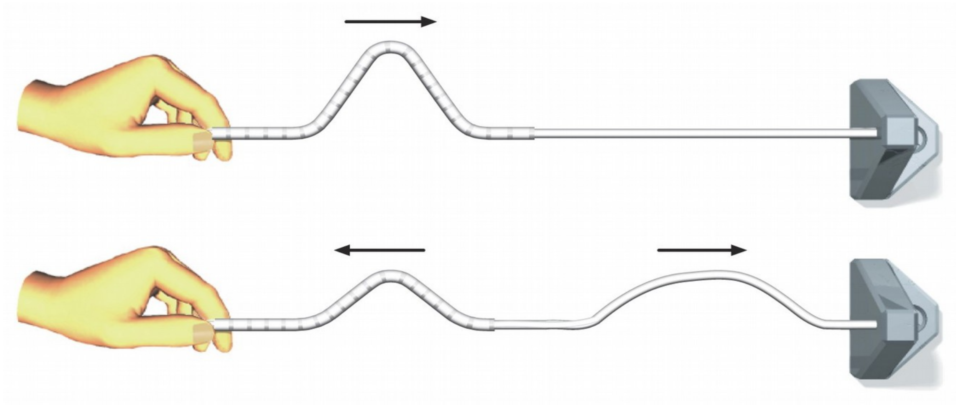
- Cuando una onda llega a una frontera entre dos medios en los cuales su velocidad es diferente, es parcialmente transmitida y parcialmente reflejada

  - Si las velocidades son parecidas la transmisión es dominante
    - Oído interno de los peces

  - Si las velocidades son muy diferentes la reflexión es dominante
    - Onda en un cuerda que llega a una pared

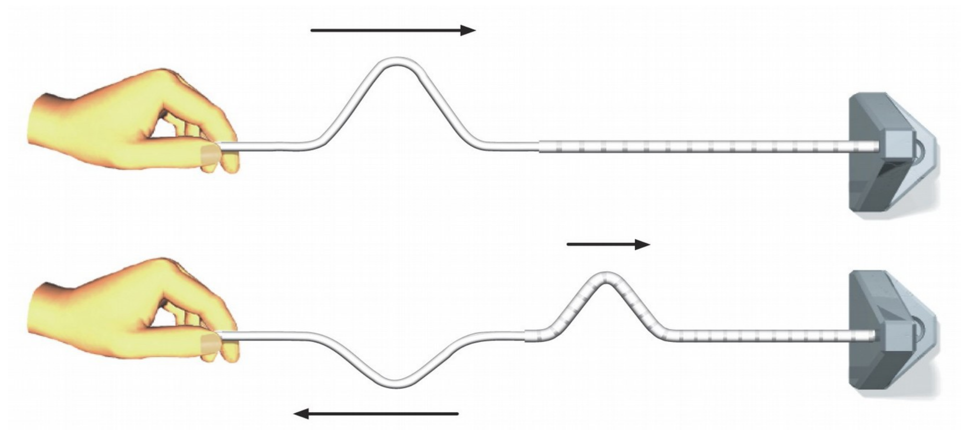
- Reflexión y transmisión: onda en una cuerda
  - Cuerda pesada unida a otra más ligera

La onda reflejada no se invierte



  - Cuerda ligera unida a otra más pesada

La onda reflejada es invertida



Índice

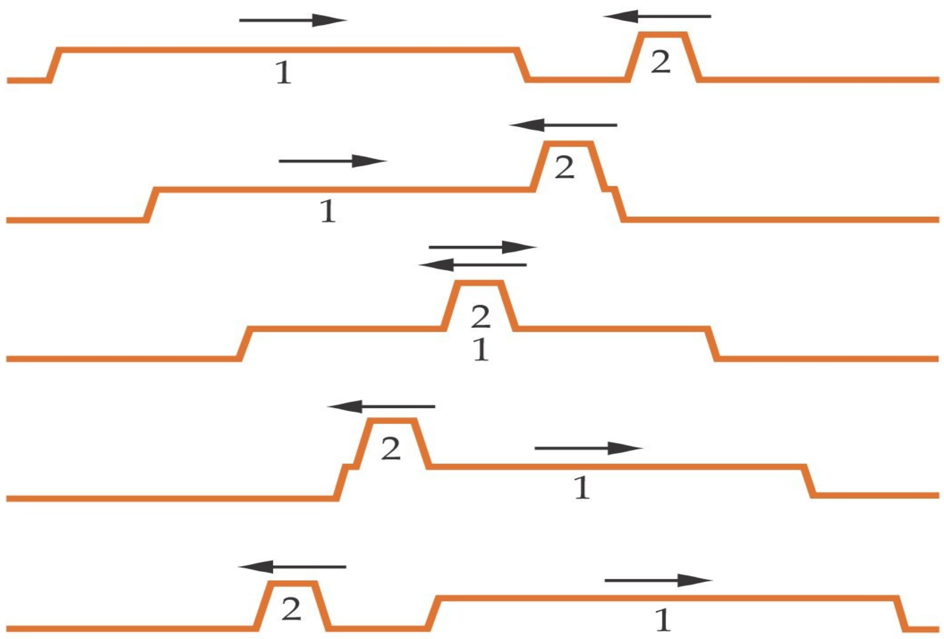
- Introducción
- Función de onda
- Ecuación de onda lineal
- Ondas sinusoidales
- Frentes de onda
- Energía transmitida por una onda sinusoidal
- Reflexión y transmisión
- Superposición de ondas

Superposición de ondas

- En un medio pueden propagarse varias ondas simultáneamente
  - Ej: varias personas hablando a la vez
- **Principio de superposición**

> Cuando dos o más ondas se combinan en un determinado punto, la perturbación resultante es la suma de las perturbaciones provocadas por cada onda

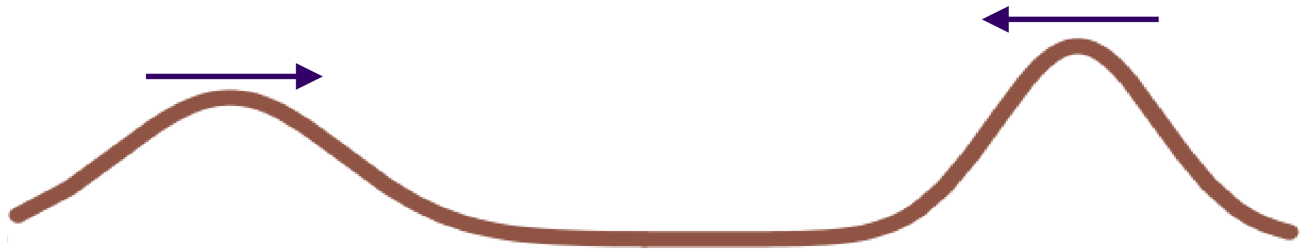
- Se deduce de la linealidad de la ecuación de ondas
- Válido para ondas lineales (amplitud pequeña)



- Consecuencia del Principio de Superposición: dos ondas pasan una a través de la otra sin ser destruidas ni modificadas

Interferencia: fenómeno ondulatorio que se presenta cuando dos o más ondas se superponen

- Consecuencia del Principio de Superposición: dos ondas pasan una a través de la otra sin ser destruidas ni modificadas

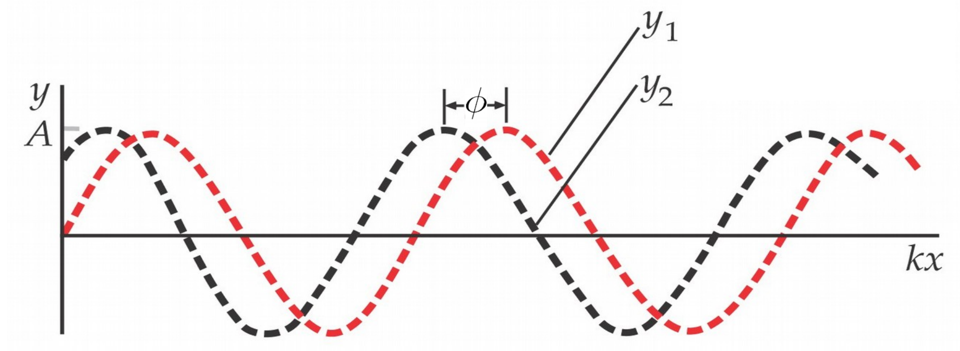


Interferencia: fenómeno ondulatorio que se presenta cuando dos o más ondas se superponen

- Dos ondas con la misma amplitud, misma λ y una diferencia de fase ϕ

$$y_1 = A\,\mathrm{sen}\,(kx - \omega t)$$

$$y_2 = A\,\mathrm{sen}\,(kx - \omega t + \phi)$$



$$\boxed{y_1 + y_2 = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\mathrm{sen}\,(kx - \omega t + \frac{\phi}{2})}$$

Donde hemos usado $\mathrm{sen}\,a + \mathrm{sen}\,b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)$

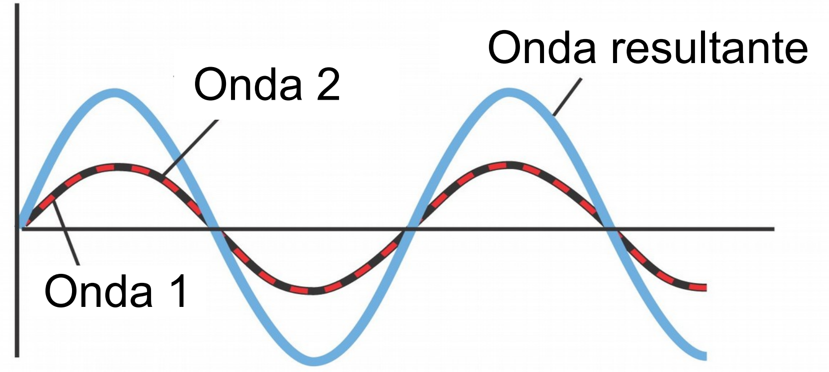
- Onda resultante con la misma *f* y λ
- La amplitud depende de ϕ

- Dependencia de la amplitud con la diferencia de fase

$$y_1 + y_2 = \underbrace{\boxed{2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}}_{A'} \operatorname{sen}\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

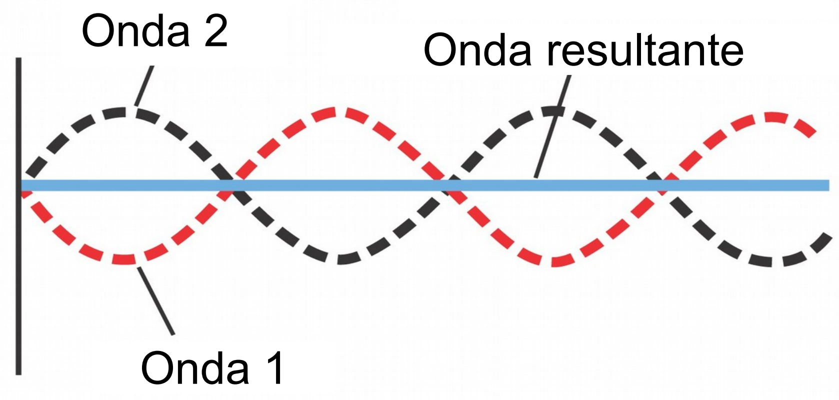
- $\phi=0$, $\cos(\phi/2)=1$ y $A'=2A$

Interferencia constructiva



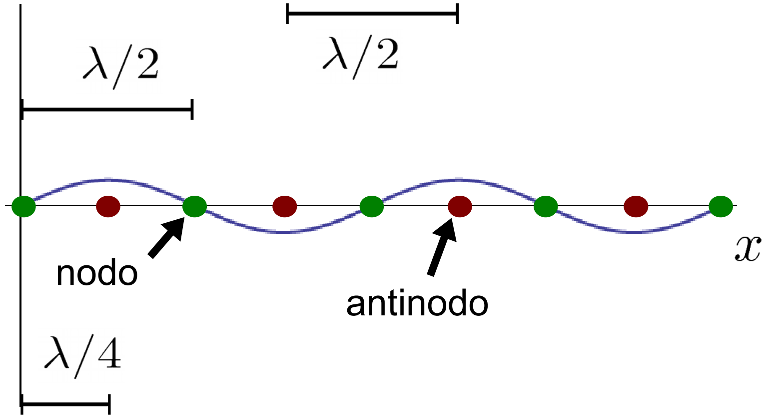
- $\phi=\pi$, $\cos(\phi/2)=0$ y $A'=0$

Interferencia destructiva



- Dos ondas con misma amplitud, ω, *k* y constante de fase pero sentidos contrarios

$$y_1 = A\,\mathrm{sen}\,(kx - \omega t)$$
$$y_2 = A\,\mathrm{sen}\,(kx + \omega t)$$



$$\boxed{y_1 + y_2 = 2A\mathrm{sen}\,(kx)\cos(\omega t)}$$

Donde hemos usado $\mathrm{sen}\,(a+b) + \mathrm{sen}\,(a-b) = 2\mathrm{sen}\,a\cos b$

Nodos

$$\mathrm{sen}\,(kx) = 0 \Rightarrow kx = n\pi \Rightarrow x = n\frac{\lambda}{2} \quad n = 1, 2, 3$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{\lambda}{2}}$$

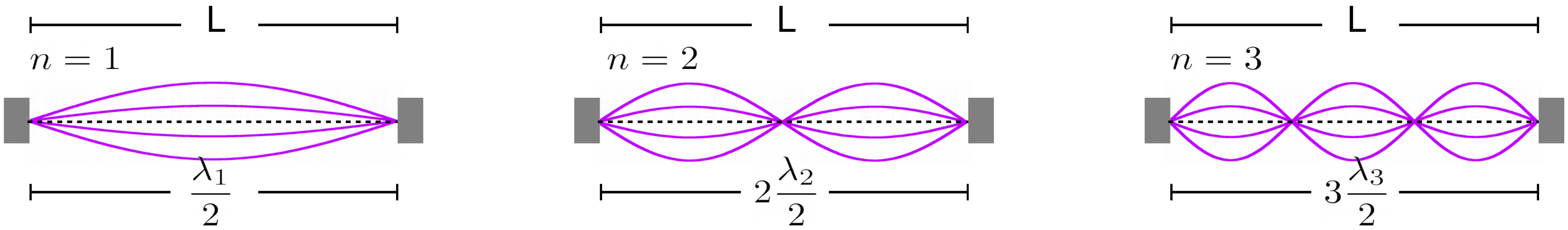
Antinodos

$$\mathrm{sen}\,(kx) = 1 \Rightarrow kx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad n = 1, 2, 3$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{\lambda}{2}}$$

Onda estacionaria en un medio finito

- Al sujetar una cuerda por sus extremos, se impone una condición de contorno
- Sólo son posibles las vibraciones en las que los extremos son nodos

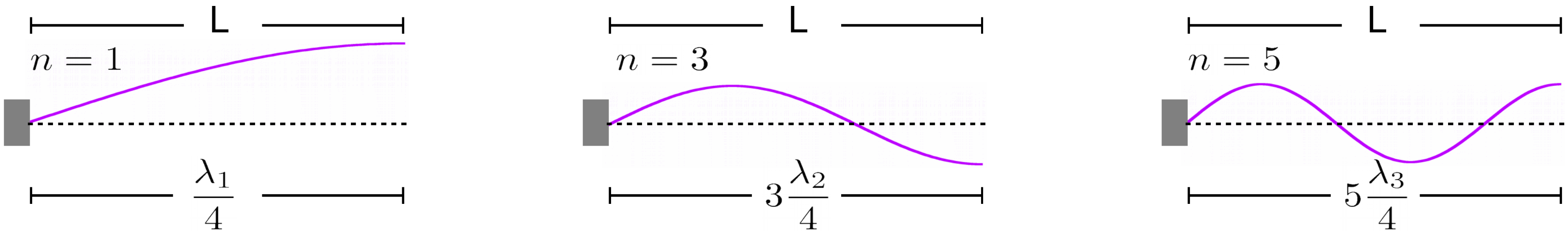


- Para el modo n $\quad L = n\dfrac{\lambda_n}{2} \longrightarrow \lambda_n = \dfrac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3\ldots$
- La frecuencia es $\quad f_n = \dfrac{v}{\lambda_n} = n\dfrac{v}{2L} = n\dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{F_T}{\mu}} = n\, f_1$

$$\boxed{f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}}$$

- f1 es la frecuencia fundamental
- Cada uno de los modos es un armónico, y el conjunto de frecuencias es el espectro

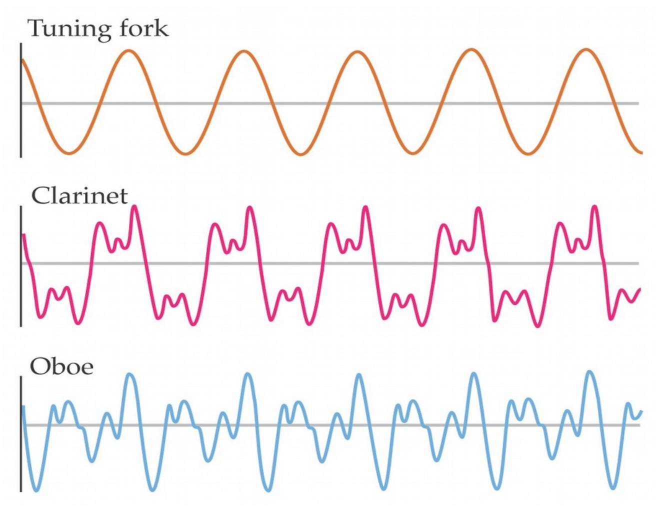
- ¿Que ocurre si uno de los extremos está libre? (ondas sonoras en un órgano)
- El extremo fijo es un nodo y el libre es un antinodo

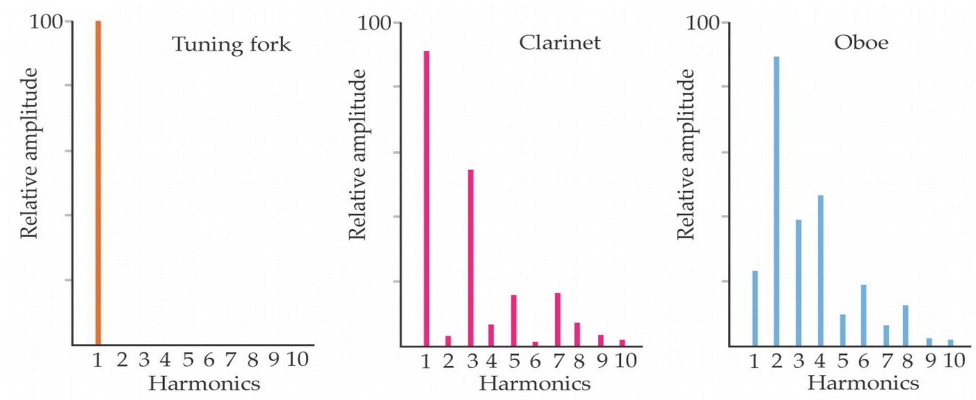


- Para el modo n $$L = n\frac{\lambda_n}{4} \quad \longrightarrow \quad \lambda_n = \frac{4L}{n} \qquad n = 1, 3, 5\ldots$$
- La frecuencia es $$f_n = n\, f_1 \qquad n = 1, 3, 5\ldots \qquad \boxed{f_1 = \frac{v}{4L}}$$
- Sólo aparecen los armónicos impares

Onda estacionaria en un medio finito

- Los armónicos de un instrumento es lo que hace que si dos instrumentos tocan la misma nota fundamental el sonido que producen sea distinto





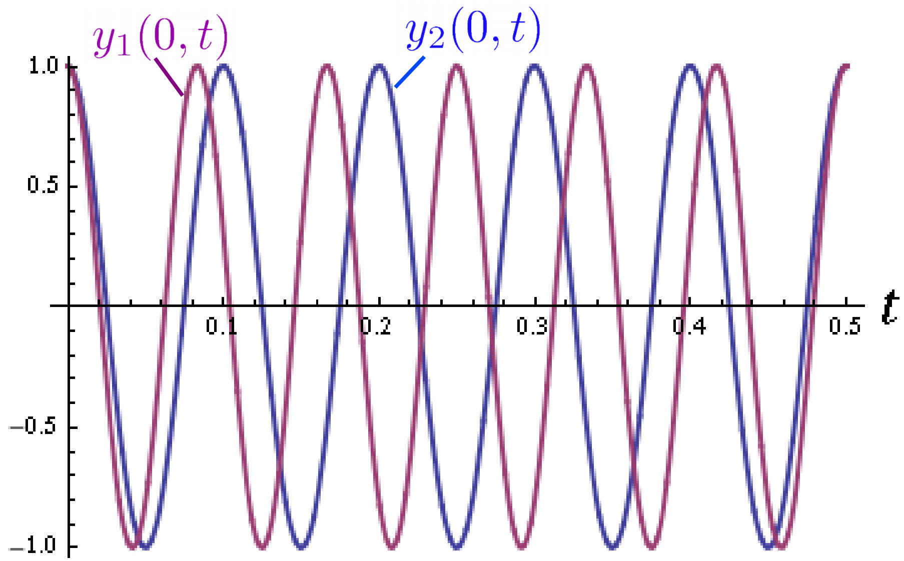
- Series armónicas distintas dan timbres distintos

- Dos ondas con frecuencias distintas

$$y_1(x,t) = A\cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$y_2(x,t) = A\cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

- Observamos la superposición en un punto



$$y_1(0,t) = A\cos(\omega_1 t) = A\cos(2\pi f_1 t)$$

$$y_2(0,t) = A\cos(\omega_2 t) = A\cos(2\pi f_2 t)$$

- Principio de Superposición en el punto x=0

$$y(0,t) = y_1(0,t) + y_2(0,t)$$

- El resultado es una oscilación con amplitud variable en el tiempo

$$y(0,t) = \underbrace{2A\cos\left[2\pi\left(\frac{f_1-f_2}{2}\right)t\right]}_{A'(t)}\cos\left[2\pi\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)t\right] = A'(t)\cos\left[2\pi\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)t\right]$$

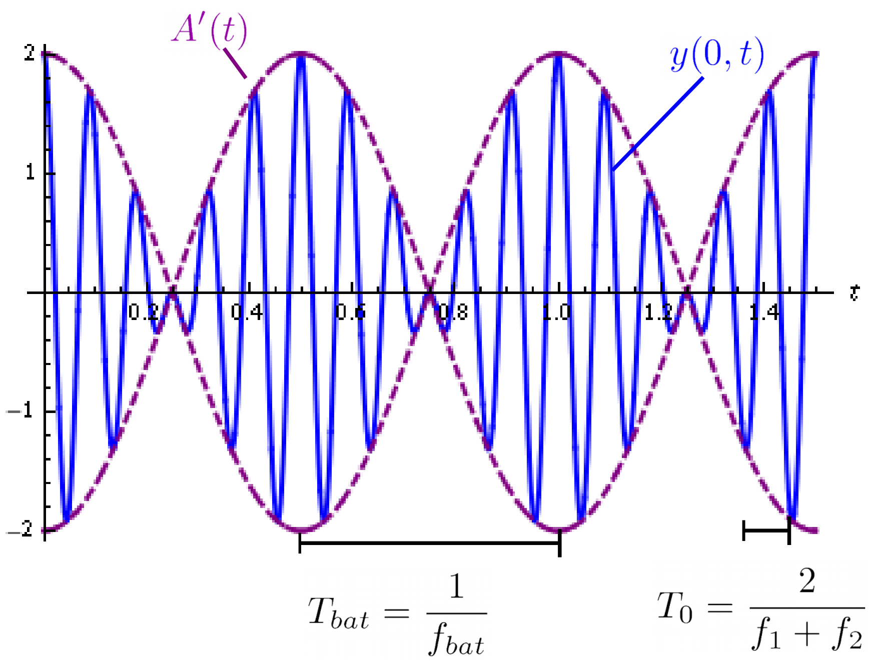
Si $f_1 \simeq f_2 \implies \frac{f_1-f_2}{2} \ll \frac{f_1+f_2}{2}$

- La frecuencia que percibe el oído es

$$f_0 = (f_1+f_2)/2$$

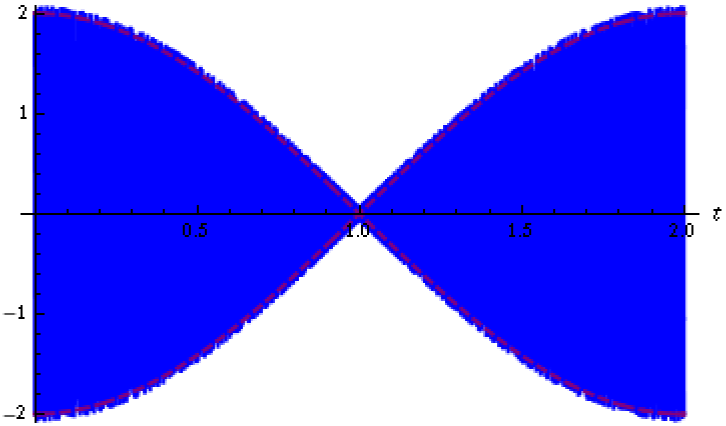
- La variación de la amplitud se percibe como una pulsación con frecuencia de batido

$$f_{bat} = |f_1 - f_2|$$

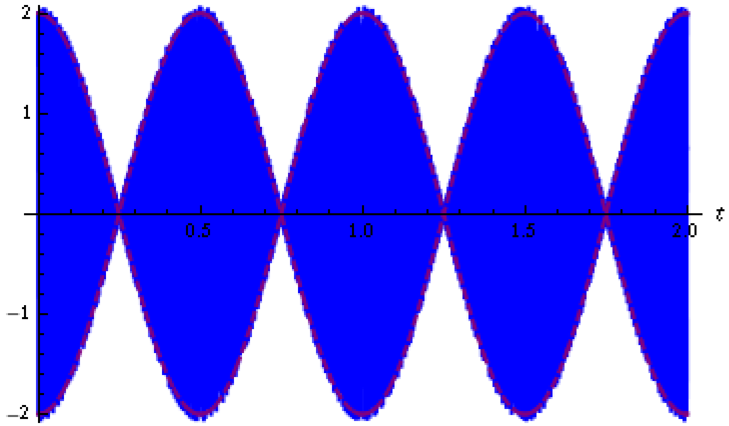


Interferencias temporales

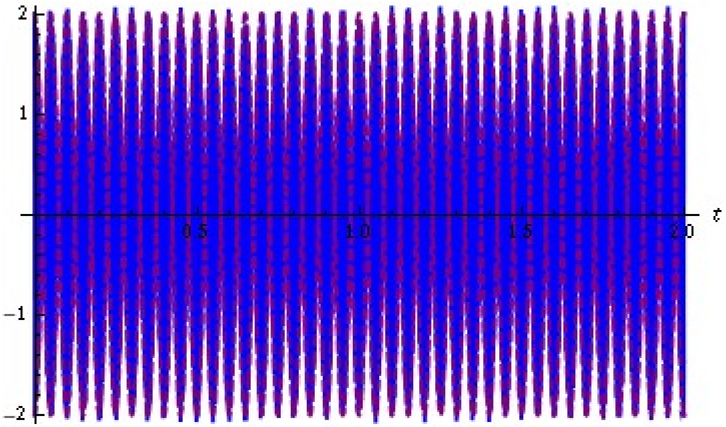
$f_0 = 440\,\mathrm{Hz}$ $\quad f_{bat} = 0.5\,\mathrm{Hz}$



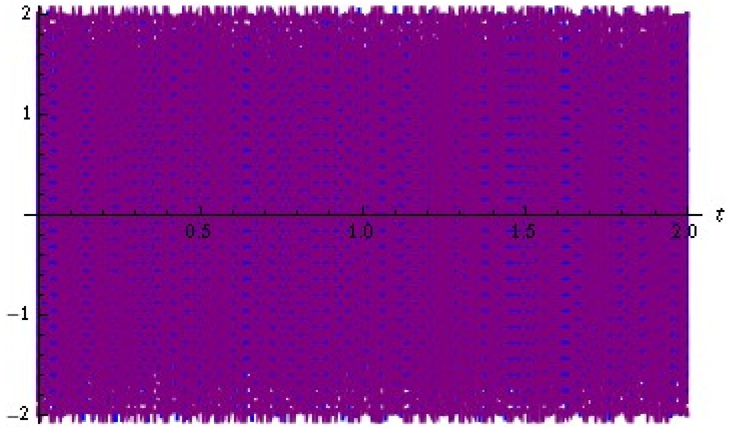
$f_0 = 440\,\mathrm{Hz}$ $\quad f_{bat} = 2\,\mathrm{Hz}$



$f_0 = 440\,\mathrm{Hz}$ $\quad f_{bat} = 20\,\mathrm{Hz}$



$f_0 = 440\,\mathrm{Hz}$ $\quad f_{bat} = 100\,\mathrm{Hz}$



Resumen

- Una onda es una perturbación que viaja sin transferencia de materia pero transportando energía
  - Ondas mecánicas o electromagnéticas
  - Ondas longitudinales y transversales
- Función de onda: descripción matemática
- Ecuación de onda: todas las funciones de onda cumplen la ecuación de ondas
  - Onda en una cuerda: velocidad $v = \sqrt{F_T/\mu}$
- Frentes de onda: superficies con la misma fase
  - Descripción de ondas en dos y tres dimensiones

Resumen

- Ondas sinusoidales
  - Amplitud, periodo, frecuencia, longitud de onda, número de onda
  - Velocidad de la onda
- La velocidad de propagación sólo depende del medio, no de la fuente
- Energía transmitida por una onda
- Reflexión y transmisión
- Superposición: Principio de Superposición
  - Interferencia constructiva o destructiva
  - Ondas estacionarias