Tema 10: Dinámica analítica

Mecánica Racional, 2º, Grado en Ingeniería Civil

Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Principio de d'Alembert

- Tenemos un sistema de N partículas sometidas a fuerzas aplicadas y ligaduras ideales
- Para cada partícula se cumple la 2ª Ley de Newton

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{\Phi}_i \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}_i + \vec{\Phi}_i - m_i\vec{a}_i = \vec{0}$$

$\vec{F}_i$: Resultante de las fuerzas activas $\qquad$ $\vec{\Phi}_i$: Resultante de las fuerzas de ligadura ideales

- Multiplicamos por un desplazamiento virtual de la partícula

$$(\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i - m_i\vec{a}_i)\cdot\delta\vec{r}_i = 0$$

- Sumamos para todas las partículas

$$\sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i - m_i\vec{a}_i)\cdot\delta\vec{r}_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i)\cdot\delta\vec{r}_i + \cancelto{0}{\sum_{i=1}^{N}\vec{\Phi}_i\cdot\vec{r}_i} = 0$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i)\cdot\delta\vec{r}_i = 0 \qquad \text{Principio de d'Alambert}}$$

Índice

- Consideramos un sistema de *N* partículas holónomo con *n* coordenadas generalizadas **independientes**

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_k, t) \qquad i = 1, \ldots N \qquad k = 1, \ldots, n$$

- Tomamos el Principio de d'Alambert

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right] \delta q_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right] \delta q_k = 0$$

$$Q_k \qquad\qquad P_k$$

- Las *n* coordenadas generalizadas son **independientes**

$$\sum_{k=1}^{n}\left[Q_k - P_k\right]\delta q_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{P_k = Q_k \qquad k = 1,\ldots n}$$

  - Son *n* ecuaciones diferenciales, una por coordenada generalizada

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}$$

Fuerza generalizada de la coordenada *k*

$$P_k = \sum_{i=1}^{N}m_i\vec{a}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}$$

Término de inercia generalizado de la coordenada *k*

- Vamos expresar los términos de inercia como derivadas de la energía cinética

$$\boxed{P_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \qquad k = 1, \ldots, n}$$

$$P_k = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

- Para una partícula

$$m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)$$

- Vamos a ver las dos expresiones coloreadas

- Manipulamos $\dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$

- El sistema es holónomo $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_k, t) \qquad k = 1, \ldots, n$

- Velocidad de la partícula

$$\vec{v}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} \boxed{\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}} \dot{q}_j + \boxed{\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}}$$

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}(q_k, t)$$

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}(q_k, t)$$

Sólo pueden aparecer las q_k y t

- Entonces

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

- Manipulamos $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right)$$

- El sistema es holónomo $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_k, t) \qquad k = 1, \ldots, n$

- Las derivadas parciales son funciones de las q_k y t $\quad \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}(q_k, t)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right)$$

- Entonces

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_k}$$

- Retomamos el término de inercia de una partícula

$$m_i\dot{\vec{v}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right)-m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_k}\right)-m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_k}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}m_iv_i^2\right)\right)-\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2}m_iv_i^2\right)$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T_i}{\partial\dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T_i}{\partial q_k}$$

$$T_i=\frac{1}{2}m_iv_i^2$$

- Sumando para todas las partículas

$$\boxed{P_k=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}\qquad k=1,\ldots,n}$$

$$T=\sum_{i=1}^{n}T_i$$

- En un sistema holónomo con coordenadas generalizadas independientes

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \qquad k = 1,\ldots,n}$$

  - Obtenemos una ecuación diferencial para cada coordenada
  - Si hay mas coordenadas generalizadas que grados de libertad, (p. ej. si alguna ligadura es no holónoma) no se pueden separar los sumandos

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k\right)\delta q_k = 0 \qquad n > r$$

    - Hay que usar técnicas adicionales para resolver el problema (Principio de Liberación, multiplicadores de Lagrange, etc)

Índice

- Principio de d'Alambert
- Ecuaciones de Lagrange
- Sistemas conservativos
- Fuerzas generalizadas para sólidos rígidos
- Lagrangiana
- Teoremas de conservación
- Función de Hamilton
- Aplicación del Principio de Liberación
- Multiplicadores de Lagrange
  - Ligaduras geométricas
  - Ligaduras cinemáticas

- Un sistema es conservativo si todas las fuerzas y momentos aplicados son conservativos
  - Puede ocurrir que la energía mecánica no se conserve (ej: vínculo reónomo restringido)
- Si las fuerzas aplicadas son conservativas, las fuerzas generalizadas correspondientes pueden derivarse de una energía potencial
  - Consideremos un sistema holónomo con *n=r* sometido a una sola fuerza conservativa $\boldsymbol{F}^C$ aplicada en el punto *P*

$$\vec{F}^C = \vec{F}^C(q_k, t) \qquad U = U(q_k, t)$$

$$\delta U = -\vec{F}^C \cdot \delta\vec{r}^P = -\sum_{k=1}^{n} \vec{F}^C \cdot \frac{\partial \vec{r}^P}{\partial q_k}\delta q_k = -\sum_{i=1}^{n} Q_k^C \delta q_k$$

$$\delta U = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial q_k}\right)\delta q_k$$

$$\boxed{Q_k^C = -\frac{\partial U}{\partial q_k}}$$

- En un sistema holónomo conservativo con coordenadas generalizadas independientes

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}+\frac{\partial U}{\partial q_k}=0 \qquad k=1,\ldots,n}$$

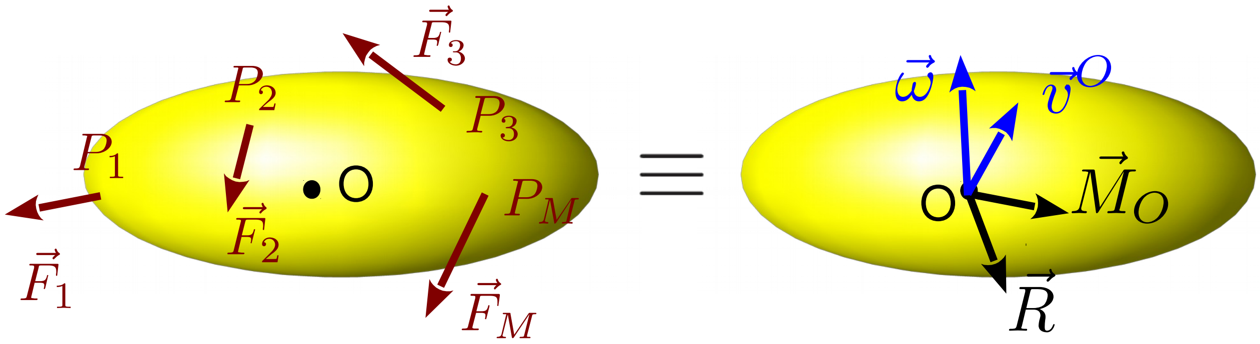
- Si hay fuerzas aplicadas no conservativas, se agrupan en fuerzas generalizadas no conservativas

$$Q_k^{NC}=\sum_{i=1}^{M}\vec{F}_i^{NC}\cdot\delta\vec{r}_i$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}+\frac{\partial U}{\partial q_k}=Q_k^{NC} \qquad k=1,\ldots,n}$$

- Tenemos un sólido rígido sometido a M fuerzas
- Las M fuerzas son un conjunto de vectores deslizantes que pueden reducirse en un punto: **reducción dinámica**

$$\{(\vec{F}_i, \Delta_i)\}_1^M \equiv \{\vec{F}, \vec{M}_O\}$$



$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{M} \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{M} \overrightarrow{OP}_\times \vec{F}_i$$

- El movimiento del sólido está descrito por la **reducción cinemática**

$$R(O) = \{\vec{\omega}, \vec{v}^O\}$$

- La fuerza generalizada para cada coordenada generalizada es

$$\boxed{Q_k = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{v}^O}{\partial \dot{q}_k} + \vec{M}_O \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_k} \qquad k = 1, \ldots, n}$$

- Demostración

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_i = \overrightarrow{OP}_i$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^{M} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{M} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k}$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\vec{v}^O + \vec{\omega} \times \vec{r}_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}^O}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{i=1}^{M} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{M} \vec{F}_i \right) \cdot \frac{\partial \vec{v}^O}{\partial \dot{q}_k} + \left(\sum_{i=1}^{M} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \right) \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_k}$$

$$= \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{v}^O}{\partial \dot{q}_k} + \vec{M}_O \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_k}$$

Índice

- Principio de d'Alambert
- Ecuaciones de Lagrange
- Sistemas conservativos
- Fuerzas generalizadas para sólidos rígidos
- Lagrangiana
- Teoremas de conservación
- Función de Hamilton
- Aplicación del Principio de Liberación
- Multiplicadores de Lagrange
  - Ligaduras geométricas
  - Ligaduras cinemáticas

- Consideramos un sistema holónomo con coordenadas generalizadas independientes con fuerzas aplicadas conservativas y no conservativas
  - Consideramos sistemas en que las energías potenciales no dependen de las velocidades $U = U(q_k, t)$
- Función lagrangiana

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U}$$

  - En general, es función de las coordenadas generalizadas, sus derivadas y el tiempo

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k, t)$$

- Consideramos un sistema holónomo con coordenadas generalizadas independientes con fuerzas aplicadas conservativas y no conservativas

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k^{NC} \qquad k = 1, \ldots, n}$$

- Si todas las fuerzas aplicadas son conservativas

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \qquad k = 1, \ldots, n}$$

- Principio de d'Alambert
- Ecuaciones de Lagrange
- Sistemas conservativos
- Fuerzas generalizadas para sólidos rígidos
- Lagrangiana
- Teoremas de conservación
- Función de Hamilton
- Aplicación del Principio de Liberación
- Multiplicadores de Lagrange
  - Ligaduras geométricas
  - Ligaduras cinemáticas

- Momento generalizado p_k

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$$

  - Si la coordenada es una longitud es una cantidad de movimiento
  - Si la coordenada es un ángulo es un momento cinético

- Coordenada cíclica: es una coordenada generalizada que no aparece en la Lagrangiana

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$$

- Sistema cíclico en el tiempo: el tiempo no aparece explícitamente en la Lagrangiana

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

- En un sistema conservativo con coordenadas generalizadas independientes y ligaduras ideales, para cada coordenada cíclica el correspondiente momento generalizado se conserva

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \qquad k = 1, \ldots, n$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t} = 0 \Longrightarrow p_k = cte$$

- Si hay fuerzas generalizadas no conservativas, el momento generalizado se conserva si la componente correspondiente de ésta es nula

Índice

- Principio de d'Alambert
- Ecuaciones de Lagrange
- Sistemas conservativos
- Fuerzas generalizadas para sólidos rígidos-
- Lagrangiana
- Teoremas de conservación
- Función de Hamilton
- Aplicación del Principio de Liberación
- Multiplicadores de Lagrange
  - Ligaduras geométricas
  - Ligaduras cinemáticas

- La función de Hamilton o Hamiltoniano de un sistema se define como

$$\mathcal{H}=\sum_{k=1}^{n} p_k\dot{q}_k-\mathcal{L}$$

  - En general, es una función de las coordenadas generalizadas, sus derivadas y el tiempo $\mathcal{H}=\mathcal{H}(q_k,\dot{q}_k,t) \qquad k=1,\ldots,n$

- En un sistema conservativo con coordenadas generalizadas independientes y ligaduras ideales, y cíclico en el tiempo, el Hamiltoniano se conserva

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{n}(\dot{p}_k\dot{q}_k+p_k\ddot{q}_k)-\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{n}\left(\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k}\dot{q}_k}+\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k}\ddot{q}_k}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k}\dot{q}_k}+\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k}\ddot{q}_k}\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}$$

- Si el sistema es esclerónomo y conservativo, el Hamiltoniano es la energía mecánica total del sistema

$$\mathcal{H} = T + U$$

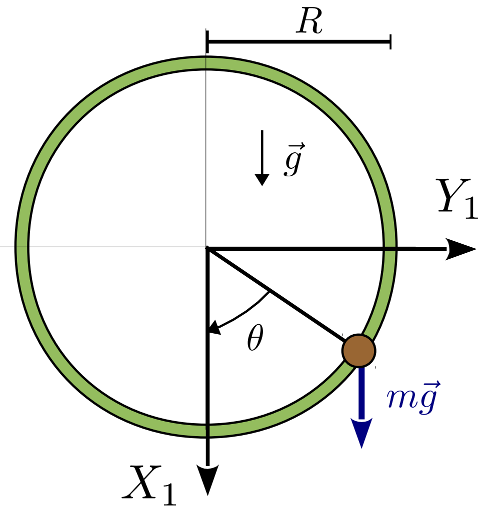
- En un sistema conservativo, con coordenadas generalizadas independientes y cíclico en el tiempo, la energía mecánica se conserva

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Longrightarrow E = cte$$

Índice

- Consiste en liberar los vínculos del sistema, sustituyéndolos por reacciones vinculares
- Permite calcular reacciones vinculares y/o tratar sistemas con mas coordenadas generalizadas que grados de libertad
- El procedimiento es el siguiente
  - Se libera el sistema rompiendo los vínculos
    - Se aumenta el número de grados de libertad
  - Se sustituyen los vínculos por reacciones vinculares (fuerzas y/o momentos)
    - Se aumenta el número de incógnitas
    - Las reacciones contribuyen a las fuerzas generalizadas
  - Se resuelve el problema liberado
  - Se particulariza para la configuración vinculada original
    - Hay que considerar las relaciones de ligadura como ecuaciones adicionales

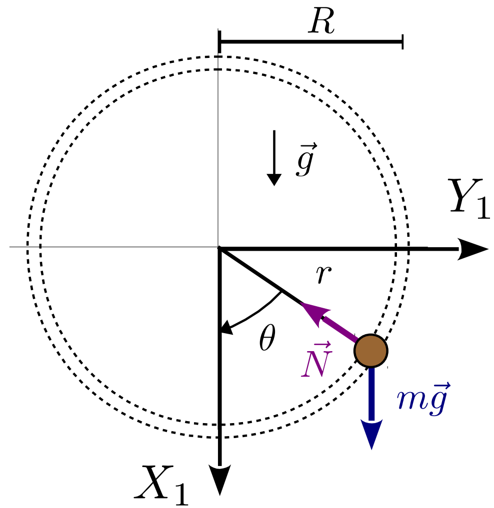
Principio de Liberación: Ejemplo



$$q \to \{\theta\}$$

$$\vec{F} \to \{m\vec{g}\}$$

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta})$$



$$q \to \{r, \theta, z\}$$

$$\vec{F} \to \{m\vec{g}, \vec{N}\}$$

$$\mathcal{L}(r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z})$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{k}$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right)$$

$$U = -mgr\cos\theta$$

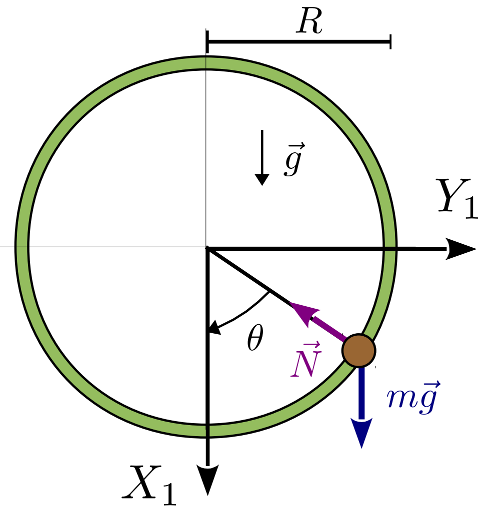
$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) + mgr\cos\theta$$

$$\vec{N} = N_r\,\vec{u}_r + N_z\,\vec{k}$$

$$Q_r = \vec{N}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{r}} = N_r$$

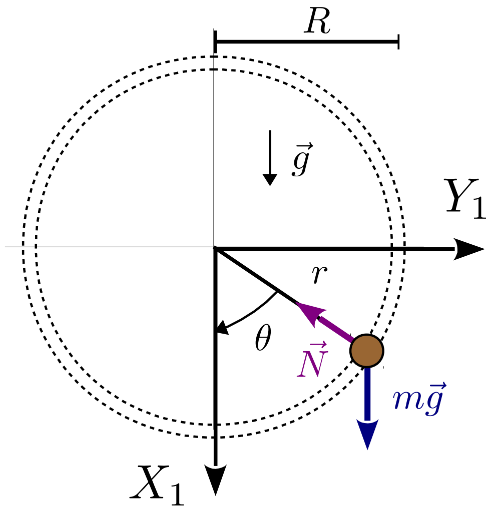
$$Q_\theta = \vec{N}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{\theta}} = 0$$

$$Q_z = \vec{N}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{z}} = N_z$$



$$q \to \{\theta\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r = R \\ \quad \dot{r} = \ddot{r} = 0 \\ z = 0 \\ \quad \dot{z} = \ddot{z} = 0 \end{array} \right.$$



$$q \to \{r, \theta, z\}$$

$$\vec{F} \to \{m\vec{g}, \vec{N}\}$$

$$\mathcal{L}(r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = Q_r \Longrightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta = N_r$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = Q_\theta \Longrightarrow mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = Q_z \Longrightarrow m\ddot{z} = N_z$$

$$\boxed{\begin{array}{l} N_r = -m(R\dot{\theta}^2 + g\cos\theta) \\[2em] \ddot{\theta} = -\dfrac{g}{R}\,\mathrm{sen}\,\theta \\[2em] N_z = 0 \end{array}}$$

- Principio de d'Alambert
- Ecuaciones de Lagrange
- Sistemas conservativos
- Fuerzas generalizadas para sólidos rígidos-
- Lagrangiana
- Teoremas de conservación
- Función de Hamilton
- Aplicación del Principio de Liberación
- Multiplicadores de Lagrange
  - Ligaduras geométricas
  - Ligaduras cinemáticas

- Se usan para tratar problemas con más coordenadas generalizadas que grados de libertad
  - Sistemas con ligaduras holónomas en los que conviene no eliminar alguna ligadura
  - Sistemas con ligaduras no holónomas
- Es similar al Principio de Liberación, pero las reacciones vinculares se añaden directamente en el espacio de configuración
  - Permite tratar problemas generales más allá de la Mecánica
- Consideraremos por separado ligaduras geométricas y cinemáticas lineales
  - Ligaduras geométricas

$$f_j(q_k, t) = 0 \qquad j = 1, \ldots, m$$

  - Ligaduras cinemáticas lineales

$$g_l(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_{k=1}^{n} a_{lk}\dot{q}_k + b_l = 0 \qquad l = 1, \ldots, p$$

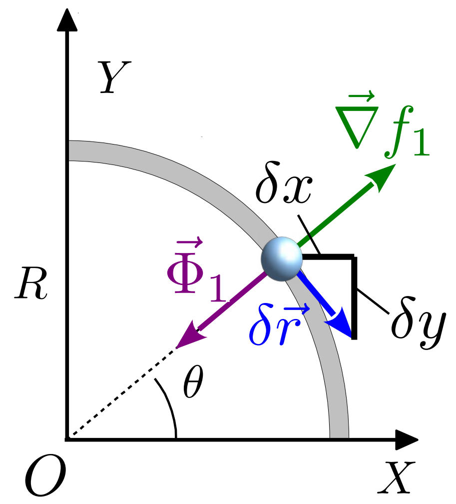
- Principio de d'Alambert
- Ecuaciones de Lagrange
- Sistemas conservativos
- Fuerzas generalizadas para sólidos rígidos-
- Lagrangiana
- Teoremas de conservación
- Función de Hamilton
- Aplicación del Principio de Liberación
- Multiplicadores de Lagrange
  - Ligaduras geométricas
  - Ligaduras cinemáticas

- Una ligadura geométrica no involucra a las velocidades

$$f_j(q_k, t) = 0 \qquad j = 1, \ldots, m$$

  - Ej: $f_1(x, y, t) = \quad x^2 + y^2 - R^2 = 0$

- Puede interpretarse como una restricción a los movimientos virtuales posibles



$$\delta f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y}\delta y = \left[\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}\right]\left[\begin{array}{c}\delta x \\ \delta y\end{array}\right] = \nabla f_1 \cdot \delta\vec{r} = 0$$

$$\rightarrow 2x\,\delta x + 2y\,\delta y = 0 \rightarrow \delta y = -(x/y)\,\delta x$$

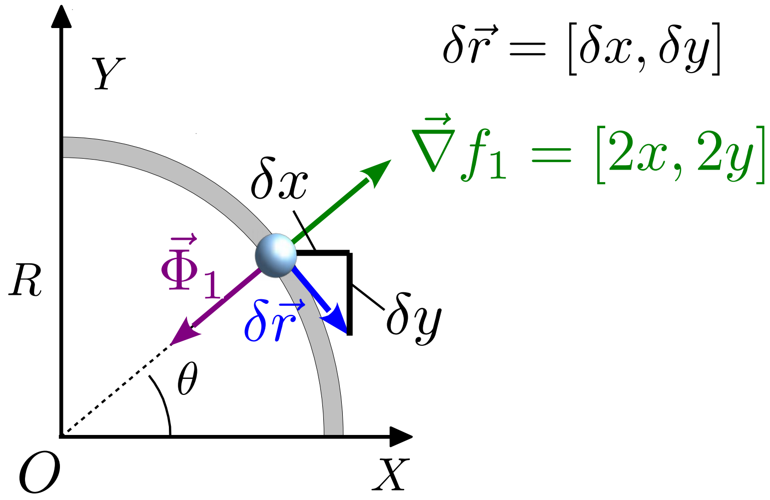
- La ligadura es impuesta por una fuerza de reacción vincular normal al vínculo

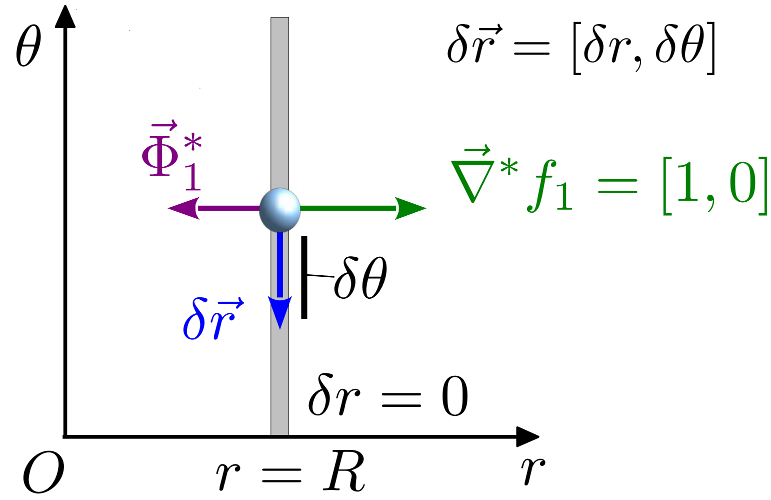
$$\vec{\Phi}_1 \cdot \delta\vec{r} = 0 \qquad\qquad \vec{\Phi}_1 = \lambda\,\vec{\nabla} f_1$$

- El gradiente da la dirección perpendicular al vínculo, es decir, de la fuerza
  - Al desvincular aparece un parámetro λ, la magnitud de la fuerza vincular, que se ajusta para que el vínculo se respete

- ¿Cómo se ve el mismo problema en el espacio de configuración $\{r, \theta\}$?

$$f_1(x,y,z,t) = \quad x^2 + y^2 - R^2 = 0 \qquad\qquad f_1(r,\theta,t) = \quad r - R = 0$$





- El gradiente en el espacio de configuración da la dirección perpendicular al vínculo en el espacio de configuración
- La fuerza generalizada de ligadura en el espacio de configuración es

$$\vec{\Phi}_1^* = \lambda_1 \vec{\nabla}^* f_1$$

$$\vec{\nabla}^* f_1 = \left[\frac{\partial f_1}{\partial r}, \frac{\partial f_1}{\partial \theta}\right]$$

$$Q_r^* = \lambda_1 \left(\partial f_1 / \partial r\right)$$

$$Q_\theta^* = \lambda_1 \left(\partial f_1 / \partial \theta\right)$$

- Ej:

$$Q_r^* = \lambda_1$$

$$Q_\theta^* = 0$$

- Problema general con *n* coordenadas generalizadas, *m* vínculos geométricos y *r* grados de libertad

$$\{q_k\}_{k=1}^{n} \qquad \{f_j(q_k,t)=0\}_{j=1}^{m} \qquad r=n-m$$

- Se construye la lagrangiana, incluyendo las fuerzas conservativas $\mathcal{L}(q_k,\dot{q}_k,t)$
- Se construyen las fuerzas generalizadas para incluir las fuerzas no conservativas, una por cada coordenada generalizada Q_k^{NC}
- Se añade una fuerza generalizada de ligadura por cada vínculo $\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial q_k}$
  - Cada ligadura añade un término a cada fuerza generalizada
  - Cada ligadura añade un **multiplicador de Lagrange(** una **incógnita**)
- Se construyen las ecuaciones de Lagrange (*n* ecuaciones)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k}=Q_k^{NC}+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial q_k}$$

- Se añaden las *m* ecuaciones de ligadura

$$\{f_j(q_k,t)=0\}_{j=1}^{m}$$

Ecuaciones: (*n*+*m*)

Incógnitas: (*n*+*m*)

$$\{q_1,\ldots,q_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m\}$$

- Principio de d'Alambert
- Ecuaciones de Lagrange
- Sistemas conservativos
- Fuerzas generalizadas para sólidos rígidos-
- Lagrangiana
- Teoremas de conservación
- Función de Hamilton
- Aplicación del Principio de Liberación
- Multiplicadores de Lagrange
  - Ligaduras geométricas
  - Ligaduras cinemáticas

- Una ligadura cinemática lineal involucra a las velocidades

$$g_l(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_{k=1}^{n} a_{lk}\dot{q}_k + b_l = 0 \qquad l = 1, \ldots, p$$

- También se pueden interpretar como una restricción a los desplazamientos
  - En un desplazamiento real

$$\mathrm{d}g_l = \sum_{k=1}^{n} a_{lk}\,\mathrm{d}q_k + b_l\,\mathrm{d}t = 0 \qquad l = 1, \ldots, p$$

  - En un desplazamiento virtual el tiempo se congela

$$\delta g_l = \sum_{k=1}^{n} a_{lk}\delta q_k = 0, \qquad a_{lk} = \frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_k}, \qquad l = 1, \ldots, p$$

- La fuerza generalizada en el espacio de las configuraciones es

$$\vec{\Phi}_l^* = \mu_l\,\vec{\nabla}^* g_l \qquad \vec{\nabla}^* g_l = \left[\frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_1}, \ldots, \frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_n}\right] = [a_{l1} \ldots, a_{ln}]$$

- Problema general con *n* coordenadas generalizadas, *p* vínculos cinemáticos y *r* grados de libertad

$$\{q_k\}_{k=1}^{n} \qquad \left\{g_l(q_k,\dot{q}_k,t)=\sum_{k=1}^{n}a_{lk}\dot{q}_k+b_l=0\right\}_{l=1}^{p} \qquad r=n-p$$

  - Se construye la lagrangiana, incluyendo las fuerzas conservativas $\mathcal{L}(q_k,\dot{q}_k,t)$
  - Se construyen las fuerzas generalizadas para incluir las fuerzas no conservativas, una por cada coordenada generalizada Q_k^{NC}
  - Se añade una fuerza generalizada de ligadura por cada vínculo $\mu_l\dfrac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_k}=\mu_l a_{lk}$
    - Cada ligadura añade un término a cada fuerza generalizada
    - Cada ligadura añade un multiplicador de Lagrange: una **incógnita**
  - Se construyen las ecuaciones de Lagrange (*n* ecuaciones)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k}=Q_k^{NC}+\sum_{l=1}^{p}\mu_l\frac{\partial g_l}{\partial\dot{q}_k}$$

  - Se añaden las *p* ecuaciones de ligadura

$$\left\{g_l(q_k,\dot{q}_k,t)=\sum_{k=1}^{n}a_{lk}\dot{q}_k+b_l=0\right\}_{l=1}^{p}$$

Ecuaciones: (*n*+*p*)

Incógnitas: (*n*+*p*)

$$\{q_1,\ldots,q_n,\mu_1,\ldots,\mu_p\}$$

- Hay que añadir una fuerza generalizada (un multiplicador de Lagrange) por cada vínculo, ya sea geométrico o cinemático

$$\{q_k\}_{k=1}^{n} \qquad \{f_j(q_k,t)=0\}_{j=1}^{m} \qquad \{g_l(q_k,\dot{q}_k,t)=\sum_{k=1}^{n} a_{lk}\dot{q}_k + b_l = 0\}_{l=1}^{p} \qquad r=n-m-p$$

- Se construyen las ecuaciones de Lagrange, las fuerzas generalizadas, las contribuciones a las fuerzas generalizadas de los vínculos y se añaden las ecuaciones de los vínculos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k^{NC} + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_k} + \sum_{l=1}^{p}\mu_l \frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_k}$$

$$\{f_j(q_k,t)=0\}_{j=1}^{m}$$

$$\{g_l(q_k,\dot{q}_k,t)=\sum_{k=1}^{n} a_{lk}\dot{q}_k + b_l = 0\}_{l=1}^{p}$$

Ecuaciones: ($n + m + p$)

Incógnitas: ($n + m + p$)

$$\{q_1,\ldots,q_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m,\mu_1,\ldots,\mu_p\}$$

- Los multiplicadores de Lagrange son las contribuciones de los vínculos a las fuerzas generalizadas
  - Como en las fuerzas vinculares en mecánica, se ajustan para que los vínculos sean respetados
  - Pueden ser una componente de una fuerza, de un momento de fuerza, o cualquier magnitud física
  - Para identificarlos, podemos igualar la potencia mecánica con la potencia analítica en un desplazamiento virtual

$$P_{\mathrm{vec}} = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{\Phi}_i^{\mathrm{geo}} + \vec{\Phi}_i^{\mathrm{cin}}\right) \cdot \vec{v}_i^{*} \qquad P_{\mathrm{ana}} = \sum_{k=1}^{n} \left(Q_k^{\mathrm{geo}} + Q_k^{\mathrm{cin}}\right) \dot{q}_k$$

$$\vec{v}_i^{*} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) \dot{q}_k$$

  - En un sólido rígido $P_{\mathrm{vec}} = \vec{\Phi} \cdot \vec{v}^{O} + \vec{\Gamma}_O \cdot \vec{\omega}$

- Otra posibilidad es calcular las fuerzas generalizadas a partir de las reacciones físicas e igualarlas a las calculadas con los multiplicadores de Lagrange

$$Q_k = Q_k^{\mathrm{geo}} + Q_k^{\mathrm{cin}} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \frac{\partial g_j}{\partial \dot{q}_k}$$

$$Q_k = Q_k^{\mathrm{geo}} + Q_k^{\mathrm{cin}} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{\Phi}_i^{\mathrm{geo}} + \vec{\Phi}_i^{\mathrm{cin}}) \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k}$$