GRADO EN INGENIERÍA DE TECNOLOGÍAS DE TELECOMUNICACIÓN. FÍSICA

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE OSCILACIONES.

Problema no incluido en el boletín: Datos $A = 10^{-3}$ m. $v_x(x=0) = 2\,\text{m s}^{-1}$. Se pide $\boxed{x(t)}$

$$\left.\begin{array}{l} A = 10^{-3}\,\text{m} \\ v(x=0) = 2\,\text{m s}^{-1} \end{array}\right\}$$

$x = A\cos(wt+\phi)$ representa el desplazamiento en el m.a.s alrededor de $x=0$. La velocidad viene dada por

$$v_x = -Aw\,\text{sen}(wt+\phi),$$

de donde vemos que la celeridad máxima es Aw. Por otro lado, dada la diferencia de fase de $\pi/2$ rad entre v_x y x, $|v_x|$ es máxima cuando $x=0$. Por tanto,

$$|v_x|_{max} = v(x=0) = Aw \rightarrow 2 = 10^{-3}w \rightarrow w = 2\cdot 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\left[\nu = \frac{w}{2\pi} = \frac{10^3}{\pi}\,\text{s}^{-1}\right].$$

La ley del movimiento es

$$x = 10^{-3}\cos[2000t+\phi]\ (\text{m}),$$

donde ϕ es una fase arbitraria que podría determinarse aportando algún dato adicional sobre el movimiento, por ejemplo, la posición inicial.

No incluido en boletín. Datos: $\nu = 100$ Hz, $A = 3$ mm. Se pide: $|v_x|_{max}$, $|a_x|_{max}$

$$\left.\begin{array}{l} \nu = 100\,\text{Hz} \\ A = 3\,\text{mm} \end{array}\right\}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = A\cos(wt+\phi) = A\cos(2\pi\nu t+\phi) \\ \quad = 3\times 10^{-3}\times\cos[200\pi t+\phi]\ (\text{m}) \end{array}\right]$$

Dado que $\ddot{x} = -w^2x$, la aceleración es cero en el medio de la trayectoria $(x=0)$. Por otro lado, la celeridad es máxima en $x=0$ y su valor es

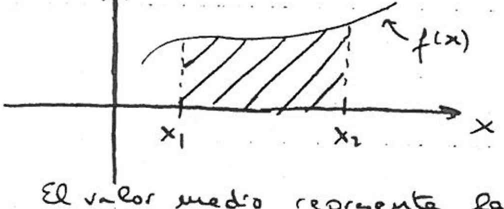
$$\left[|v_x|_{max} = Aw = A\,2\pi\nu = 1'88\ \text{m/s}\right].$$

En los extremos de la trayectoria la celeridad es nula y el modulo de la aceleración es máximo

$$\left[|a_x|_{max} = Aw^2 = (2\pi\cdot 100)^2\,3\cdot 10^{-3} = 11'8\cdot 10^2\ \text{m/s}^2\right].$$

(2) Por definición, el valor medio de una función $f(x)$ entre dos puntos x_1 y x_2, es

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx}{x_2 - x_1},$$

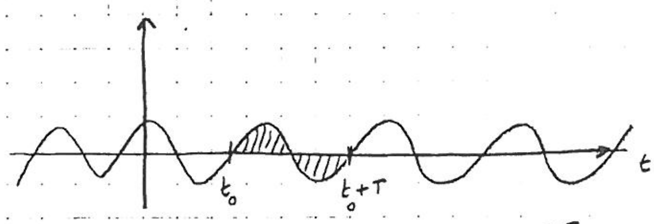


donde la integral del numerador es el área encerrada bajo la curva $y=f(x)$ entre x_1 y x_2.

El valor medio representa la altura de un rectángulo de base $x_2 - x_1$ cuyo área es igual al que encierra $f(x)$ entre $x=x_1$ y $x=x_2$.

a)

Es fácil comprobar que en el caso del m.a.s $x = A\cos(wt+\phi)$, el valor medio de x dentro de un periodo es cero, dado que el área encerrada por la curva es nula. Veámoslo:



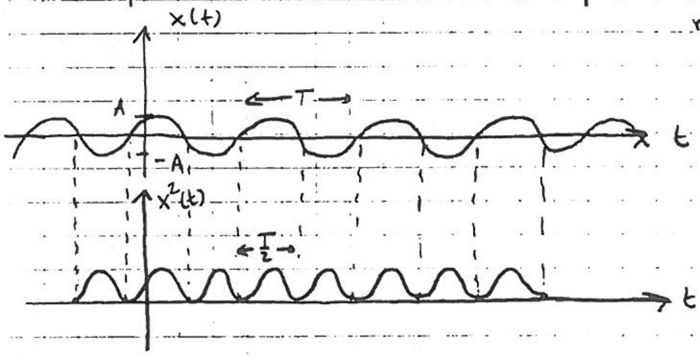
$$\langle x\rangle = \frac{A\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{w}}\cos(wt+\phi)\,dt}{\frac{2\pi}{w}}$$

$$= \frac{A\cancel{w}}{2\pi}\frac{1}{\cancel{w}}\Big[\operatorname{Sen}(wt+\phi)\Big]_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{w}} = \frac{A}{2\pi}\left[\operatorname{Sen}(wt_0+\phi+2\pi) - \operatorname{Sen}(wt_0+\phi)\right]$$

$= 0$ (Nótese que el resultado es independiente del instante t_0 que se considere)

b)

Por otro lado, la función $x^2 = A^2\cos^2(wt+\phi)$ está acotada entre 0 y A^2, y tiene un periodo igual a la mitad del correspondiente a x (la frecuencia es $2w$). Esto puede verse también utilizando la relación trigonométrica



$$\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2a}{2}$$

Tenemos

$$x^2 = A^2\cos^2(wt+\phi) =$$
$$= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\cos[2wt+2\phi]$$

Vemos que x^2 es un m.a.s de frecuencia $2w$, amplitud $\frac{A^2}{2}$, pero no alrededor de $x^2=0$ sino de $x^2 = \frac{A^2}{2}$. Calculemos $\langle x^2\rangle$ en un periodo del movimiento $x(t)$:

$$\Bigg[\langle x^2\rangle = \frac{\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{w}}\left(\frac{A^2}{2}+\frac{A^2}{2}\cos(2wt+2\phi)\right)dt}{\frac{2\pi}{w}} = \frac{\frac{A^2}{2}\int_{t_0}dt + \frac{A^2}{2}\int_{t_0}\cos(2wt+2\phi)\,d}{\frac{2\pi}{w}}$$

$$= \frac{A^2}{2}\frac{w}{2\pi}\left[\cancel{t_0}+\frac{2\pi}{w}-\cancel{t_0}\right] + \frac{A^2}{2}\frac{1}{2w}\Big[\operatorname{Sen}(2wt+2\phi)\Big]_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{w}}\frac{w}{2\pi}$$

$$= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\frac{1}{2w}\frac{w}{2\pi}\big[\underbrace{\operatorname{Sen}(2wt_0+2\phi+4\pi) - \operatorname{Sen}(2wt_0+2\phi)}_{0}\big]$$

$$= \frac{A^2}{2}\Bigg].$$

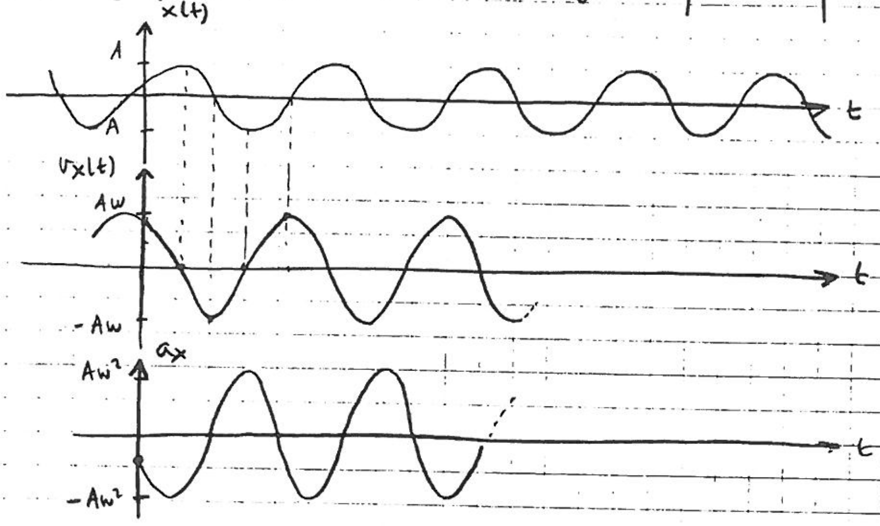
Otra forma de ver que la segunda integral debe anularse es teniendo en cuenta que la función $\cos(2wt+2\phi)$ oscila dos veces entre t_0 y $t_0+\frac{2\pi}{w}$. Como dentro de cada oscilación el valor medio es cero (ver apartado a)), el promedio para n oscilaciones es también nulo.

③ $x = A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$

a) $v_x = -A\omega \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$

$$a_x = -A\omega^2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) = -\omega^2 x$$

Para representar gráficamente $x(t)$ tendremos en cuenta que $x(0) = A\cos\frac{\pi}{4}$, es decir, $x(0) > 0$, y que $v_x(0) = -A\omega \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = A\omega \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} > 0$. Por tanto, la gráfica de $x(t)$ tiene una tangente positiva para $x=0$.



Por otro lado, $v_x(0) > 0$, y $a_x(0) < 0$, de modo que la gráfica de $v_x(t)$ tiene una tangente negativa en $t=0$.

b) $x = A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$ (1)

$\dot{x} = -A\omega \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \frac{\dot{x}}{\omega} = -A\operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$ (2)

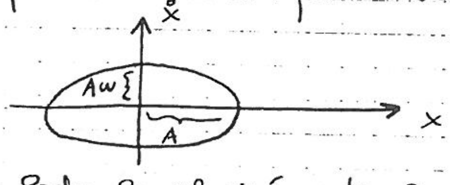
Elevando al cuadrado (1) y (2), y sumándolas, tenemos

$$x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2} = A^2\left[\cos^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

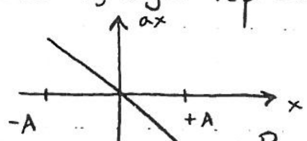
Teniendo en cuenta que $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$, llegamos a una relación entre v_x y x en la que no aparece el tiempo:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega^2} = 1. \qquad (3)$$

Nótese que (3) es una elipse de semiejes A y $A\omega$

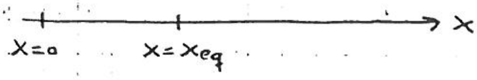


Por otro lado la relación entre la aceleración y la posición es $a_x = -\omega^2 x$, cuya representación gráfica se muestra a continuación:



Pendiente $-\omega^2$.

(4)



(a) Si el punto oscila alrededor de una posición que no es el origen, la posición en función del tiempo vendrá dada por

$$x(t) = x_{eq} + A\cos(\omega t + \phi) \qquad (1)$$

En este caso $x_{eq} = 2\,cm$ y $A = 3\,cm$, de manera que

$$x = 2 + 3\cos(\omega t + \phi)\ (cm) \qquad (2)$$

Para obtener ω y ϕ tendremos en cuenta las condiciones iniciales:

$$x(0) = 3'5 = 2 + 3\cos\phi \rightarrow \cos\phi = \frac{1}{2} \rightarrow \phi = \pm\frac{\pi}{3} \qquad (3)$$

$$\dot{x}(0) = +2'5 = +3\omega\,\text{Sen}\,\phi \qquad (4)$$

A partir de (4) vemos que $\text{Sen}\,\phi > 0$, y portanto, de las dos posibilidades que hemos obtenido en (3) para ϕ, tomaremos $\phi = \frac{\pi}{3}$. Por otro lado, el valor de ω es:

$$\omega = \frac{2'5}{3\,\text{Sen}\frac{\pi}{3}} = \frac{2'5}{3\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{9}\ \text{rad/s} \qquad (5)$$

Por tanto,

$$x = 2 + 3\cos\left[\frac{5\sqrt{3}}{9}t + \frac{\pi}{3}\right]\ (cm) \qquad (6)$$

(b) Derivando (1) dos veces con respecto al tiempo, tenemos

$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$$

Por otro lado, dado que $A\cos(\omega t + \phi) = x - x_{eq}$, llegamos fácilmente a

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_{eq}} \qquad (7)$$

Esta es la ecuación diferencial del oscilador armónico cuando la partícula no oscila respecto al origen, sino respecto a $x = x_{eq}$. Sustituyendo $x_{eq} = 2\,cm$ y $\omega = 5\sqrt{3}/9$ rad/s en (7), tenemos en este caso:

$$\ddot{x} + \frac{25}{27}x = \frac{50}{27} \qquad (8)$$

(c) Si llamamos $x' = x - x_{eq} = A\cos(\omega t + \phi)$, la relación existente entre $\ddot{x}'$ y x' es $\ddot{x}' + \omega^2 x' = 0$, siendo en este caso $\omega^2 = 25/27\ \text{rad}^2/\text{s}^2$.

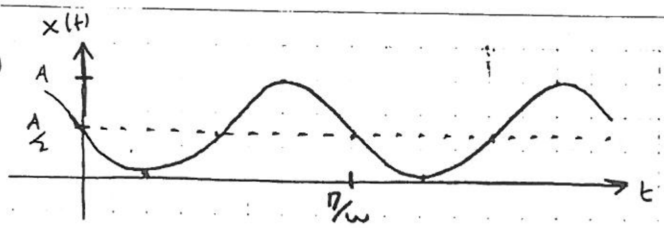
(5) $x = A\,\text{Sen}^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$

(a) Utilizando la relación $\text{Sen}^2 a = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2a}{2}$, tenemos

$$x = \frac{A}{2} - \frac{A}{2}\cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (1)$$

Por tanto, x oscila respecto a $x_0 = \frac{A}{2}$, con una amplitud $\frac{A}{2}$ y frecuencia 2ω. El periodo es, portanto, $T = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}\omega} = \pi/\omega$.

(b)



Nótese que en $t=0$ $\quad x(0) = \frac{A}{2} - \frac{A}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{A}{2}$, y $\dot{x}(0) = A\omega \,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -A\omega < 0$. Por tanto, la tangente a $x(t)$ en el instante inicial es negativa.

(c) $\quad x = \frac{A}{2} - \frac{A}{2}\cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow x - \frac{A}{2} = -\frac{A}{2}\cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$. $\qquad$ (2)

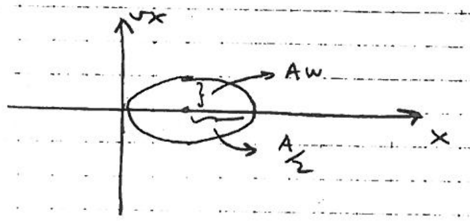
Derivando x respecto al tiempo, tenemos

$$\dot{x} = 2\omega \frac{A}{2}\,\mathrm{sen}\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \frac{\dot{x}}{2\omega} = \frac{A}{2}\,\mathrm{sen}\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (3)$$

Elevando (2) y (3) al cuadrado y sumando, tenemos:

$$\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + \frac{\dot{x}^2}{4\omega^2} = \frac{A^2}{4} \rightarrow \boxed{\frac{\left(x - \frac{A}{2}\right)^2}{\left(\frac{A}{2}\right)^2} + \frac{\dot{x}^2}{(A\omega)^2} = 1}. \qquad (4)$$

La ecuación (4) representa una elipse centrada en $x_0 = A/2$, con un semieje $A/2$ en x, y $A\omega$ en v_x.



(6) $\quad \left.\begin{array}{l} x = A\cos(\omega t + \phi) \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{array}\right\}$ Con el objeto de obtener A y ϕ a partir de las condiciones iniciales, haremos $t=0$ en las expresiones de $x(t)$ y $\dot{x}(t)$.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \Rightarrow x(0) = A\cos\phi = x_0, \qquad (1)$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \Rightarrow \dot{x}(0) = -A\omega\,\mathrm{sen}\phi = \dot{x}_0. \qquad (2)$$

(1) y (2) constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas A y ϕ (recuérdese que x_0 y $\dot{x}_0$ son datos conocidos). Dividiendo (2) entre (1), tenemos

$$\mathrm{tg}\,\phi = -\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0} \rightarrow \boxed{\phi = \mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}\right)}. \qquad (3)$$

Por otro lado,

$$A\cos\phi = x_0 \rightarrow A^2\cos^2\phi = x_0^2 \qquad (4)$$

$$A\,\mathrm{sen}\phi = -\frac{\dot{x}_0}{\omega} \rightarrow A^2\,\mathrm{sen}^2\phi = \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2} \qquad (5)$$

Sumando (4) y (5) y teniendo en cuenta que $\mathrm{sen}^2\phi + \cos^2\phi = 1$, obtenemos la amplitud del movimiento en función de x_0 y $\dot{x}_0$:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}} \,. \qquad (6)$$

⑦ Para obtener C_1 y C_2 haremos lo mismo que en el problema anterior:

$$x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \operatorname{sen}\omega t \;\rightarrow\; x(0) = \boxed{C_1 = x_0}$$

$$\dot{x}(t) = -C_1\omega \operatorname{sen}\omega t + C_2\omega\cos\omega t \;\rightarrow\; \dot{x}(0) = C_2\omega = \dot{x}_0 \rightarrow \boxed{C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega}}$$

⑧ Vamos a hacer este problema de dos maneras:

$\boxed{A}$ El movimiento armónico simple viene dado por $x = A\cos(\omega t + \phi)$ donde $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$ rad/s. Nos dicen que para cierto instante (que llamaremos t_1), se verifica

$$x(t_1) = A\cos(\omega t_1 + \phi) = 25 \text{ cm} \qquad (1)$$

$$\dot{x}(t_1) = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t_1 + \phi) = 100 \text{ cm/s} \qquad (2)$$

Nos preguntan la posición y velocidad para $t_2 = t_1 + \underbrace{2'40\,s}_{\Delta t}$.
Tenemos:

$$x(t_2) = A\cos[\omega t_2 + \phi] = A\cos[\omega t_1 + \phi + \omega\Delta t] \qquad (3)$$

$$= A\cos(\omega t_1 + \phi)\cos\omega\Delta t - A\operatorname{sen}(\omega t_1 + \phi)\operatorname{sen}\omega\Delta t \,,$$

donde hemos hecho uso de la relación trigonométrica

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \,.$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3), tenemos:

$$x(t_2) = 25\cos 8\pi\Delta t + \frac{100}{8\pi}\operatorname{sen} 8\pi\Delta t \qquad (4)$$

Nótese que $x(t_2)$ depende sólo de la diferencia de tiempos, es decir, no depende del instante inicial "t_1" que se considere.
Sustituyendo $\Delta t = 2'40\,s$ en (4) se obtiene:

$$x(t_2) = -22'6 \text{ cm}. \qquad (5)$$

Procediendo de forma análoga para la velocidad, se obtiene $\dot{x}(t_2) = 288$ cm/s.

$\boxed{B}$ Otra forma es partir de la expresión siguiente para el m.a.s:

$$x(t) = C_1\cos\omega t + C_2\operatorname{sen}\omega t \;, \quad \omega = 8\pi \text{ rad/s}, \qquad (6)$$

donde C_1 y C_2 dependen de las condiciones iniciales. Tomando el instante inicial $t_1 = 0$, tenemos:

$$x(0) = C_1 = 25 \text{ cm} \qquad (7)$$

Ahora, derivando (6) respecto al tiempo,

$$\dot{x}(t) = -C_1 \omega \operatorname{sen} \omega t + C_2 \omega \cos \omega t \longrightarrow \dot{x}(0) = 100\ \mathrm{cm/s} = C_2\, 8\pi$$

$$\longrightarrow C_2 = \frac{25}{2\pi}\ \mathrm{cm}. \qquad (8)$$

Sustituyendo (8) y (7) en (6), tenemos:

$$x(t) = 25 \cos 8\pi t + \frac{25}{2\pi} \operatorname{sen} 8\pi t \qquad (9)$$

Para $t = 2'40\,s$, se tiene:

$$x(2'40\,s) = 25 \cos[8\pi . 2'40] + \frac{25}{2\pi} \operatorname{sen}[8\pi . 2'40] = -22'6\ \mathrm{cm}$$

$$\dot{x}(2'40\,s) = -8\pi . 25 \operatorname{sen}[8\pi . 2'40] + 25 . 4 . \cos[8\pi . 2'40] = 288\ \frac{\mathrm{cm}}{s}.$$

9) $x = A \operatorname{sen} \omega t$

¿? $\left.\begin{matrix} \langle \dot{x} \rangle \\ \langle |\dot{x}| \rangle \end{matrix}\right\}$ entre $t=0$ y $t = \frac{3T}{8}$, siendo $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

En las figuras a y b hemos representado $x = A \operatorname{sen} \omega t$ y $\dot{x} = A\omega \cos \omega t$

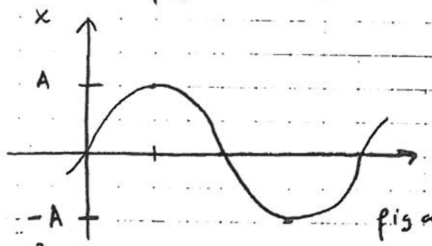


fig a.

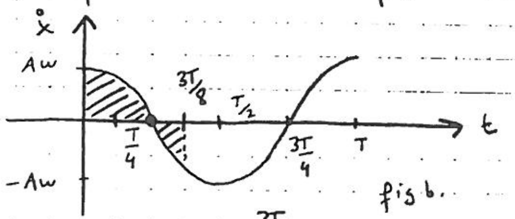


fig b.

Nótese que el área encerrada por $\dot{x}(t)$ entre $t=0$ y $t = T/4$ es positiva, y el área correspondiente al intervalo $(\frac{T}{4}, \frac{3T}{8})$ es negativa. Por tanto, los promedios de $\dot{x}$ y $|\dot{x}|$ no son iguales.

Calculemos en primer lugar $\langle \dot{x} \rangle$:

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{A\omega \int_0^{3T/8} \cos \omega t\, dt}{\frac{3T}{8}} = \frac{A . \cancel{2}\cancel{\pi} . 8}{T . 3 \cancel{T}} \frac{\cancel{T}}{\cancel{2\pi}} \left[\operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t \right]_0^{\frac{3T}{8}}$$

$$= \frac{8A}{3T} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = \frac{8A}{3T} \frac{\sqrt{2}}{2} \underset{T = \frac{2\pi}{\omega}}{=} \frac{2A\omega\sqrt{2}}{3\pi}$$

Para calcular $\langle |\dot{x}| \rangle$ hemos de tener en cuenta que la velocidad se hace negativa en una parte del intervalo. Tenemos:

$$\langle |\dot{x}| \rangle = \frac{A\omega \int_0^{T/4} \cos \omega t\, dt - A\omega \int_{T/4}^{3T/8} \cos \omega t\, dt}{\frac{3T}{8}},$$

donde el signo "$-$" en la segunda integral se ha puesto para hacer positiva la contribución a la celeridad en el intervalo $(\frac{T}{4}, \frac{3T}{8})$.

Tenemos:

$$\boxed{\langle |\dot{x}| \rangle = \frac{A\omega 8}{3T\omega}\left[(\operatorname{Sen}\omega t)_0^{T/4} - (\operatorname{Sen}\omega t)_{T/4}^{3T/8} \right]}$$

$$= \frac{8A\omega}{3 \cdot 2\pi}\left[2\operatorname{Sen}\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4} - \operatorname{Sen}\frac{2\pi}{T}\frac{3T}{8} \right]$$

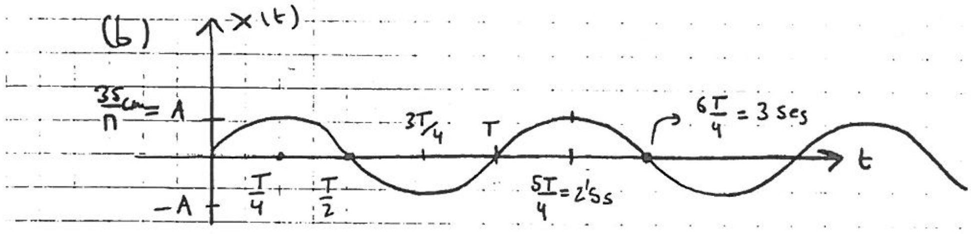
$$= \frac{4A\omega}{3\pi}\left[2\operatorname{Sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{Sen}\frac{3\pi}{4} \right] = \frac{4A\omega}{3\pi}\left[2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \frac{2A\omega}{3\pi}[4-\sqrt{2}$$

(10) $\left.\begin{array}{l} \dot{x} = 35 \cos \pi t \ \ cm/s \\ t=0 \ , \ x=0 \end{array}\right\}$

(a) $\frac{dx}{dt} = 35 \cos \pi t \longrightarrow \int_0^x dx' = 35 \int_0^t \cos \pi t' dt'$

$\longrightarrow \boxed{x(t) = \frac{35}{\pi} \operatorname{Sen} \pi t}$

(b)



Como $\omega = \pi$ rad/s, el periodo es $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2$ seg.

Preguntan el espacio recorrido en los primeros 2'8 seg del movimiento. A partir de la gráfica de x(t) vemos que, entre $t=0$ y $t = 2'5$ seg $= \frac{5T}{4}$, la partícula recorre 5 veces la amplitud, es decir

$$S(t=0 \to t=2'5 \text{ seg}) = 5 \cdot \frac{35}{\pi} \text{ cm} \qquad (1)$$

Para calcular el espacio recorrido entre $t = 2'5$ seg y $t = 2'8$ seg hemos de calcular

$$x(2'5 \text{ seg}) - x(2'8 \text{ seg}) = A - A \operatorname{Sen} \pi . 2'8 =$$

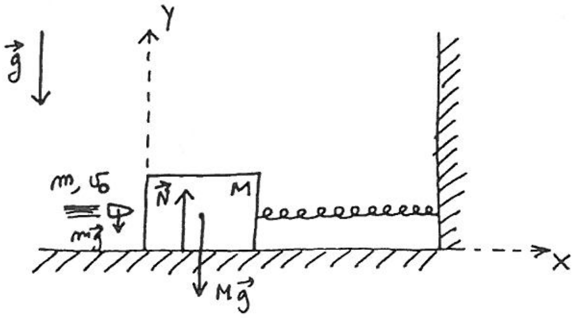
$$= \frac{35}{\pi}(1 - \operatorname{Sen} 2'8\pi) \qquad (2)$$

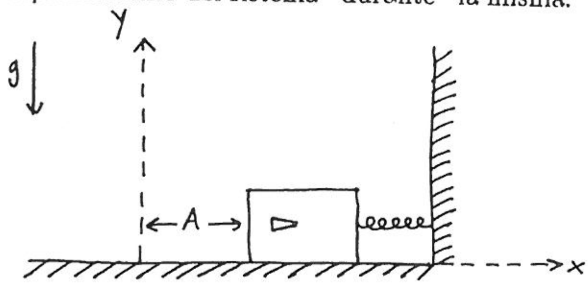
Sumando (1) y (2) obtenemos el espacio total entre $t=0$ y $t = 2'8$ s :

$$S = \frac{35}{\pi}(5 + 1 - \operatorname{Sen} 2'8\pi) = \underline{\underline{60 \text{ cm}}}$$

(11) *Con el objeto de medir la velocidad de una bala se dispone del siguiente montaje: Un bloque de masa $M = 5\,kg$ que se encuentra unido a un muelle ideal de constante elástica $k = 200\,N/m$, sin existir rozamiento con el suelo. La bala (de masa $m = 20\,g$) se dispara horizontalmente sobre el bloque, quedando incrustada en éste. Sabiendo que el sistema realiza oscilaciones armónicas de amplitud $A = 0.2\,m$, ¿qué velocidad llevaba la bala antes de la colisión?* **Solución:** $317\,m/s$

Llamaremos v_0 a la velocidad inicial de la bala. Para determinar la relación entre v_0 y la velocidad del sistema bala+bloque justo después de la colisión aplicaremos el teorema de la cantidad de movimiento a dicho sistema desde la situación en que la bala entra en contacto con el bloque hasta la situación en que la bala queda en reposo respecto al bloque, moviéndose el conjunto con una cierta velocidad inicial. Teniendo en cuenta que las fuerzas externas son los pesos de la bala y del bloque, y la reacción del suelo sobre el bloque, la cual tiene sólo componente normal dado que no existe rozamiento, la componente horizontal de la resultante de las fuerzas externas es nula, y por tanto se conserva la componente horizontal de la cantidad de movimiento del sistema. No se considera la fuerza del muelle sobre el bloque dado que el muelle no actúa hasta que el bloque se mueve, y se está suponiendo que la colisión sucede "casi" instantáneamente sin existir un desplazamiento del sistema "durante" la misma.





La cantidad de movimiento antes de que la bala choque con el bloque es $mv_0\vec{i}$, y justo después $(m+M)V\vec{i}$. Tenemos:

$$mv_0 = (m+M)V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{mv_0}{m+M}. \tag{1}$$

Una vez que el sistema está en movimiento la única fuerza externa en la dirección horizontal es la del muelle, de forma que el movimiento será armónico simple. Teniendo en cuenta que la energía mecánica se conserva, y comparando la situación inicial en que el sistema tiene velocidad V y energía potencial nula, con la situación en que la energía cinética es nula y la energía potencial es máxima, donde $x = A$, se tiene:

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}kA^2. \tag{2}$$

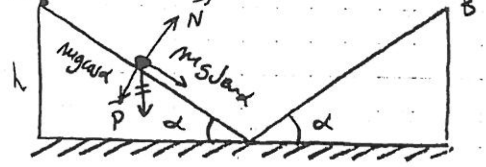
Sustituyendo en (2) la expresión de V dada por (1) podemos despejar el valor de v_0:

$$\frac{1}{2}(m+M)\frac{m^2v_0^2}{(m+M)^2} = \frac{1}{2}kA^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{A}{m}\sqrt{k(m+M)}. \tag{3}$$

Sustituyendo valores se obtiene

$$v_0 = \frac{0.2\,m}{0.02\,kg} \times \sqrt{200\,Nm^{-1} \times (0.02\,kg + 5\,kg)} = 317\,ms^{-1}. \tag{4}$$

(12)



(a) Dado que no existe rozamiento, la energía mecánica se conserva durante el movimiento. La partícula, partiendo en A desde el reposo, llegará a B con velocidad nula. Por simetría, la partícula tarda el mismo tiempo en ir de A a B, o de B a A. El movimiento es, por tanto, periódico.

Aplicando la 2ª ley de Newton obtenemos la aceleración:

$$\cancel{m}g\,\text{sen}\alpha = \cancel{m}a \;\rightarrow\; a = g\,\text{sen}\alpha\,. \qquad (1)$$

Si llamamos s a la longitud de uno de los planos, el tiempo que tarda la partícula en recorrer dicha distancia es un cuarto de período:

$$\left.\begin{array}{l} s = \frac{1}{2}\,g\,\text{sen}\alpha\left(\frac{T}{4}\right)^2 \\ s = \frac{h}{\text{sen}\alpha} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{h}{\text{sen}\alpha} = \frac{1}{2}\,g\,\text{sen}\alpha\,\frac{T^2}{16} \rightarrow \boxed{T = \frac{4}{\text{sen}\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}} \quad (2)$$

(b) Como se puede observar a partir de (1), la aceleración es constante en módulo y no se verifica la relación entre posición y aceleración característica del m.a.s $\ddot{x} = -\omega^2 x$. Por tanto, el movimiento no es armónico simple.

13

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = A\,e^{-\frac{\gamma t}{2}}\cos(\omega t + \phi) \\ x_0 = x(t=0) \\ \dot{x}_0 = \dot{x}(t=0) \end{array}\right\}$$

Por un lado, haciendo $t=0$ en $x(t)$, tenemos:

$$x(0) = \boxed{A\cos\phi = x_0}\,. \qquad (1)$$

Por otro lado, derivando $x(t)$ con respecto al tiempo, obtenemos la velocidad en el movimiento subamortiguado:

$$\dot{x}(t) = -\frac{\gamma}{2}A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \phi) - \omega A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}\,\text{sen}(\omega t + \phi)$$

$$= -\frac{\gamma}{2}x(t) - \omega A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}\,\text{sen}(\omega t + \phi)\,. \qquad (2)$$

Haciendo $t=0$ en la expresión anterior obtenemos la segunda relación buscada:

$$\dot{x}(0) = \boxed{\dot{x}_0 = -\frac{\gamma}{2}x_0 - \omega A\,\text{sen}\phi}\,. \qquad (3)$$

(1) y (3) constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, A y ϕ. Para resolverlo, despejaremos $A\,\text{sen}\phi$ de (3):

$$A\,\text{sen}\phi = -\frac{1}{\omega}\left(\dot{x}_0 + \frac{\gamma}{2}x_0\right) \qquad (4)$$

Elevando al cuadrado (1) y (4), y sumando, tenemos:

$$A^2\cos^2\phi = x_0^2$$
$$A^2\operatorname{sen}^2\phi = \frac{1}{\omega^2}\left(\dot{x}_0+\frac{\gamma}{2}x_0\right)^2$$

$$A^2 = x_0^2 + \frac{1}{\omega^2}\left(\dot{x}_0+\frac{\gamma}{2}x_0\right)^2 \rightarrow \boxed{A=\sqrt{x_0^2+\frac{\left(\dot{x}_0+\frac{\gamma}{2}x_0\right)^2}{\omega^2}}}. \quad (5)$$

Por otro lado, dividiendo (4) entre (1) podemos obtener la fase ϕ:

$$\frac{A\operatorname{sen}\phi}{A\cos\phi} = \frac{-\frac{1}{\omega}\left(\dot{x}_0+\frac{\gamma}{2}x_0\right)}{x_0}$$

$$\rightarrow \operatorname{tg}\phi = -\frac{\dot{x}_0+\frac{\gamma}{2}x_0}{\omega x_0} = -\frac{1}{\omega}\frac{\dot{x}_0}{x_0}-\frac{\gamma}{2\omega}$$

$$\rightarrow \boxed{\phi = \operatorname{tg}^{-1}\left[-\frac{1}{\omega}\frac{\dot{x}_0}{x_0}-\frac{\gamma}{2\omega}\right]} \quad (6)$$

14) $x(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left(C_1\cos\omega t + C_2\operatorname{sen}\omega t\right)$

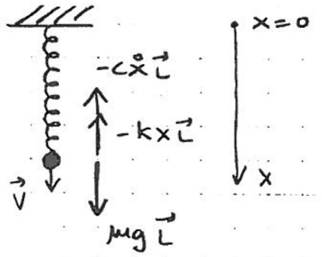
$x(0) = \boxed{x_0 = C_1}$.

Por otro lado, derivando $x(t)$ tenemos:

$$\dot{x} = -\frac{\gamma}{2}x + \omega e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left(-C_1\operatorname{sen}\omega t + C_2\cos\omega t\right)$$

$$\rightarrow \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = -\frac{\gamma}{2}x_0 + \omega C_2 \rightarrow \boxed{C_2 = \frac{\dot{x}_0+\frac{\gamma}{2}x_0}{\omega}}$$

15)



En este caso, a parte de la fuerza elástica y la de rozamiento, actúa también el peso. Como veremos, el efecto del peso es hacer que las oscilaciones no sean respecto a $x=0$ sino respecto a la posición de equilibrio estático, la cual se obtiene igualando el peso a la fuerza elástica:

$$mg = kx_{eq} \rightarrow x_{eq} = \frac{mg}{k}. \quad (1)$$

Aplicando la 2ª ley de Newton, tenemos:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + mg$$

$$\rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma\dot{x} - g = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \ \gamma = \frac{c}{m} \quad (2)$$

Llamando $x' = x - \frac{g}{\omega_0^2} = x - \frac{mg}{k}$, y teniendo en cuenta que $\dot{x} = \dot{x}'$ y $\ddot{x} = \ddot{x}'$, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\ddot{x}'}{\underset{\parallel}{\ddot{x}}} + \gamma \underset{\dot{x}'}{\underset{\parallel}{\dot{x}}} + \omega_0^2 \underset{x'}{\underset{\parallel}{\left(x - \frac{g}{\omega_0^2}\right)}} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \ddot{x}' + \gamma \dot{x}' + \omega_0^2 x' = 0 \qquad (3)$$

La solución viene dada por

$$x'(t) = x - \frac{mg}{k} = A\cos(\omega t + \phi)\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}, \qquad (4)$$

donde A y ϕ se calcularán a partir de las condiciones iniciales, y γ a partir de los periodos de oscilación dados en el enunciado.

$$T = 0'2\pi\, s \rightarrow \omega_0 = 10\, \frac{rad}{s}.$$

$$T' = 0'25\pi\, s \rightarrow \omega = 8\, \frac{rad}{s}. \qquad (5)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \rightarrow 64 = 100 - \frac{\gamma^2}{4} \rightarrow 256 = 400 - \gamma^2 \rightarrow \boxed{\gamma = 12 s^{-1}} \qquad (6)$$

Sustituyendo (5) y (6) en (4), tenemos:

$$x'(t) = A\cos(8t + \phi)\, e^{-6t} \qquad (7)$$

Las condiciones iniciales son:

$$x'(0) = 0'06\, m = A\cos\phi \qquad (8)$$

Por otro lado $\dot{x}' = -6x' - 8A\,\mathrm{Sen}(8t+\phi)\, e^{-6t}$. Como $\dot{x}'(0) = 0$, tenemos

$$\dot{x}'(0) = 0 = -6x'(0) - 8A\,\mathrm{Sen}\phi \rightarrow A\,\mathrm{Sen}\phi = \frac{6 \cdot 0'06}{-8} = -0'045 \qquad (9)$$

(8) y (9) son un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, A y ϕ:

$$A\,\mathrm{Sen}\phi = -0'045$$
$$A\cos\phi = 0'06$$

Elevando al cuadrado y sumando obtenemos la amplitud:

$$\boxed{A = 0'075\, m}. \qquad (10)$$

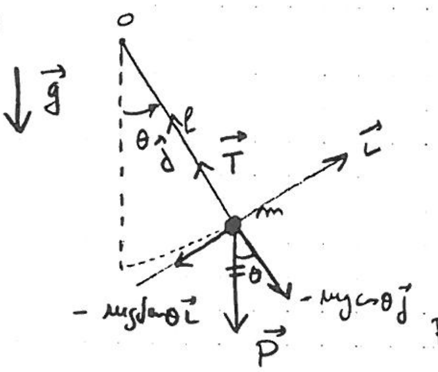
Por otro lado, dividiendo obtenemos la tangente de ϕ (el cual se encuentra en el cuarto cuadrante dado que $\mathrm{Sen}\phi < 0$ y $\cos\phi > 0$. Se obtiene

$$\boxed{\phi = -0'643\, rad} \qquad (11)$$

Sustituyendo (10) y (11) en (7) se llega finalmente a:

$$x'(t) = 0'075\, e^{-6t}\cos(8t - 0'643)\ (m) \qquad (12)$$

(16)



(a) La partícula se mueve en un plano describiendo un arco de circunferencia de radio l. La aceleración (expresada en la base $\{\vec i, \vec j\}$) es:

$$\vec a = \dot\theta^2 l\,\vec j + \ddot\theta\, l\,\vec i \qquad (1)$$

Por otro lado, las fuerzas que actúan sobre la partícula son la tensión y el peso. La resultante viene dada por:

$$\sum \vec F = \vec T + \vec P = T\vec j - mg\cos\theta\,\vec j - mg\,\text{sen}\,\theta\,\vec i. \qquad (2)$$

Aplicando la 2ª ley de Newton y teniendo en cuenta (1) y (2), se tiene:

$$m\,\dot\theta^2 l = T - mg\cos\theta$$

$$m\,\ddot\theta\, l = -mg\,\text{sen}\,\theta \longrightarrow \boxed{\ddot\theta + \frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta = 0} \qquad (3)$$

La ecuación de movimiento viene dada por (3). En el caso de que θ sea muy pequeño durante el movimiento, es decir, cuando las oscilaciones son de pequeña amplitud, se puede hacer la aproximación $\text{sen}\,\theta \simeq \theta$, de forma que

$$\ddot\theta + \frac{g}{l}\,\theta = 0, \qquad (4)$$

ecuación que corresponde a la ecuación diferencial del movimiento armónico simple.

(b) Comparando con $\ddot x + \omega^2 x = 0$, vemos que la frecuencia angular del movimiento es

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (5)$$

(17) Aplicando el teorema de la energía cinética al movimiento amortiguado, tenemos:

$$dE_c = -kx\,dx - c\dot x\,dx, \qquad (1)$$

donde E_c es la energía cinética $(\frac{1}{2}m\dot x^2)$, cuya variación se debe al trabajo realizado por la fuerza elástica $(-kx\,dx)$, y al realizado por la fuerza de rozamiento $(-c\dot x\,dx)$. Teniendo en cuenta que $-kx\,dx = -d(\frac{1}{2}kx^2)$, tenemos

$$d\left(\tfrac{1}{2}m\dot x^2 + \tfrac{1}{2}kx^2\right) = -c\dot x\,dx, \qquad (2)$$

donde $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$, es la energía mecánica. Dividiendo (2) por dt se tiene:

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = -c\dot{x}^2} \qquad (3)$$

(18) Sea $A(t) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ la amplitud en el oscilador amortiguado. Si $A(t)$ disminuye h veces cada m periodos de oscilaciones, entonces:

$$A(t+mT) = \frac{A(t)}{h} \rightarrow \cancel{A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}}\, e^{-\frac{\gamma}{2}mT} = \frac{\cancel{A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}}}{h}$$

$$\rightarrow h = e^{\frac{\gamma}{2}mT}. \qquad (1)$$

Tomando logaritmos neperianos en (1), se tiene

$$\ln h = \frac{\gamma}{2}mT = \frac{\gamma}{2}m\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} = \frac{\gamma m \pi}{\omega_0\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{2\omega_0}\right)^2}} = \frac{m\pi}{Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}, \qquad (2)$$

donde hemos tenido en cuenta que $Q = \omega_0/\gamma$.

Para despejar Q elevaremos (2) al cuadrado:

$$(\ln h)^2 = \frac{m^2\pi^2}{Q^2\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)} \rightarrow Q^2 = \frac{1}{4} + \frac{m^2\pi^2}{(\ln h)^2} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{4m^2\pi^2}{(\ln h)^2}\right)$$

$$\rightarrow Q = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4m^2\pi^2}{(\ln h)^2}}. \qquad (3)$$

Para $h=2$, $m=110$, se tiene:

$$Q \approx 500.$$

(19) $\omega = 25$ rad/s, $\dot{x}(0) = 0$, $x(0) = \frac{A(t=0)}{h}$

La ley del movimiento viene dada por:

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \phi) \qquad (1)$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales, tenemos:

$$x(0) = \cancel{A_0}\cos\phi = \frac{\cancel{A_0}}{h} \longrightarrow \cos\phi = \frac{1}{h}. \qquad (2)$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{\gamma}{2}x(t) - \omega A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

$$\rightarrow \dot{x}(0) = 0 = -\frac{\gamma}{2}x(0) - \omega A_0 \operatorname{sen}\phi \qquad (3)$$

Como $x(0) = A_0\cos\phi$, entonces

$$0 = -\frac{\gamma}{2}A_0\cos\phi - \omega A_0 \operatorname{sen}\phi \rightarrow \operatorname{tg}\phi = -\frac{\gamma}{2\omega} \qquad (4)$$

A partir de (2) y (4) podemos obtener γ en función de h y ω, cantidades que son datos en el problema. Para hacerlo, elevaremos (4) al cuadrado:

$$\operatorname{tg}^2\phi = \frac{\gamma^2}{4\omega^2} \qquad (5)$$

Ahora, teniendo en cuenta la relación trigonométrica

$$1+tg^2\phi = \frac{1}{\cos^2\phi},$$

y (2), se obtiene una relación en la que no aparece ϕ:

$$\frac{\gamma^2}{4w^2} = \frac{1}{\cos^2\phi} - 1 = h^2 - 1 \longrightarrow \gamma = 2w\sqrt{h^2-1}. \qquad (6)$$

Sustituyendo en (6) $w = 25\ rad/s$ y $h = 1'020$, tenemos:

$$\gamma = 2\cdot 25\cdot\sqrt{(1'020)^2-1} = 10\,s^{-1} \qquad (7)$$

(20) La energía mecánica está dada por

$$E_m = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \qquad (1)$$

donde

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(wt+\phi), \qquad (2)$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{\gamma}{2}A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(wt+\phi) - wA_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\operatorname{sen}(wt+\phi)$$

$$= A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[-\frac{\gamma}{2}\cos(wt+\phi) - w\operatorname{sen}(wt+\phi)\right], \qquad (3)$$

son la posición y la velocidad en el oscilador amortiguado.
Sustituyendo (2) y (3) en (1), tenemos:

$$E_m(t) = \frac{1}{2}A_0^2 e^{-\gamma t}\left\{k\cos^2(wt+\phi) + m\left[-\frac{\gamma}{2}\cos(wt+\phi) - w\operatorname{sen}(wt+\phi)\right]^2\right\} \qquad (4)$$

La energía mecánica después de n oscilaciones será

$$E_m(t+nT_a) = \frac{1}{2}A_0^2 e^{-\gamma(t+nT_a)}\left\{k\cos^2(wt+\phi+2\pi n) + m\left[-\frac{\gamma}{2}\cos(wt+\phi+2\right.\right.$$
$$-w\operatorname{sen}(wt+\phi+2\pi n \qquad (5)$$

Como el valor del coseno y el seno se repite cuando la fase se incrementa en $2\pi n$, tenemos:

$$\boxed{E_m(t+nT_a) = E_m(t)\,e^{-\gamma n T_a}}. \qquad (6)$$

(22) Si $Q >> 1$, entonces $w \simeq w_0$ (ver problema 19). La ley del movimiento es (haciendo $w = w_0$):

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(w_0t+\phi). \qquad (1)$$

La energía potencial viene dada por

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mw_0^2A^2e^{-\gamma t}\cos(w_0t+\phi). \qquad (2)$$

Para obtener la energía cinética derivaremos (1) respecto al tiempo:

$$\dot{x} = -\frac{\gamma}{2} A e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(w_0 t + \phi) - w_0 A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \operatorname{sen}(w_0 t + \phi) \qquad (3)$$

$$= w_0 \left[-\frac{1}{2}\frac{\gamma}{w_0} A e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(w_0 t + \phi) - A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \operatorname{sen}(w_0 t + \phi) \right].$$

Como $w_0/\gamma >> 1$, es decir $\gamma/w_0 << 1$, podemos despreciar el primer término frente al segundo, de manera que

$$\dot{x} = -A w_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \operatorname{sen}(w_0 t + \phi). \qquad (4)$$

Por tanto la energía cinética será

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m A^2 w_0^2 e^{-\gamma t} \operatorname{sen}^2(w_0 t + \phi). \qquad (5)$$

Sumando (2) y (5), y teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, se obtiene finalmente:

$$\left[E = \frac{1}{2} m A^2 w_0^2 e^{-\gamma t} \right]. \qquad (6)$$

23 $l = 0'5 m$

$$E_m(t+\Delta t) = \frac{E_m(t)}{4.0 \times 10^4}, \text{ siendo } \Delta t = 5'2 \times 60 \text{ seg} \qquad (1)$$

Vamos a suponer $Q >> 1$ de forma que utilizaremos la expresión para la energía mecánica obtenida en el apartado anterior. Posteriormente comprobaremos si la hipótesis realizada es correcta, a partir del valor de Q que obtengamos. A partir de (1) tenemos:

$$E_0 e^{-\gamma(t+\Delta t)} = \frac{E_0 e^{-\gamma t}}{4.0 \times 10^4}; \qquad (2)$$

donde hemos supuesto que $E_m(t) = E_0 e^{-\gamma t}$, siendo $E_0 = \frac{1}{2} m A^2 w_0^2$ (ver problema anterior). A partir de (2) tenemos:

$$\frac{1}{4.0 \times 10^4} = e^{-\gamma \Delta t} \longrightarrow \gamma \Delta t = \ln 4.0 \times 10^4 \longrightarrow \gamma = \frac{\ln 4'0 \times 10^4}{5'2 \times 60} = 0'0345^{-1} \qquad (3)$$

A partir del dato de la longitud del péndulo podemos calcular w_0 (ver problema 16):

$$w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9'9}{0'5}} = 4'4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \qquad (4)$$

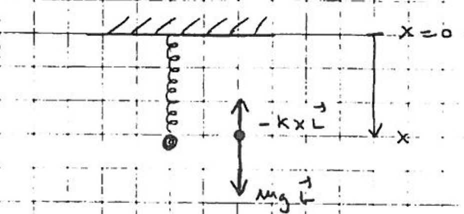
Por tanto

$$\left[Q = \frac{w_0}{\gamma} = \frac{4'4}{0'034} \simeq 130 >> 1. \right] \qquad (5)$$

NOTE BOOK

24 $m = 800\ gr = 0'8\ Kg$

$K = 4\ N/m$



Inicialmente la partícula se encuentra en la posición de equilibrio estático, la cual puede obtenerse igualando el peso a la fuerza elástica:

$$mg = k\,x_{eq} \rightarrow x_{eq} = \frac{mg}{k} = 2\,m. \qquad (1)$$

Aplicando la 2ª ley de Newton obtenemos la ecuación de movimiento:

$m\ddot{x} = -kx + mg \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = g$, que corresponde a un m.a.s de frecuencia $\omega_0 = \sqrt{k/m} = \sqrt{5}\ rad/s$, alrededor de $x_{eq} = \frac{mg}{k}$

(Nótese que la ecuación de movimiento puede escribirse como $\ddot{x} + \frac{k}{m}\left(x - \frac{mg}{k}\right) = 0$, y llamando $x' = x - \frac{mg}{k}$ se tiene $\ddot{x}' + \frac{k}{m}x' = 0$, lo que corresponde a un m.a.s alrededor de $x' = 0$, es decir, alrededor de $x_{eq} = \frac{mg}{k}$). La ley del movimiento es:

$$x(t) = x_{eq} + C_1\cos\omega_0 t + C_2 \operatorname{sen}\omega_0 t, \qquad (2)$$

donde C_1 y C_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales:

$$x(t=0) = x_{eq} + 0'05 = x_{eq} + C_1 \rightarrow \boxed{C_1 = 0'05\,m}. \qquad (3)$$

Por otro lado

$$\dot{x}(t) = -C_1\omega_0 \operatorname{sen}\omega_0 t + C_2\omega_0\cos\omega_0 t \rightarrow \dot{x}_0 = 0 = C_2\omega_0 \rightarrow \boxed{C_2 = 0} \qquad (4)$$

Sustituyendo (3) y (4) en (2), obtenemos:

$$\boxed{x(t) = x_{eq} + 0'05\cos\sqrt{5}\,t\ (m);\quad x_{eq} = 2\,m} \qquad (5)$$

25 a) Si el medio ofrece además una resistencia $\vec{R} = -c\vec{v}$, siendo $c = 0'2\ Kg\,s^{-1}$, la ecuación de movimiento es:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma\dot{x} = g, \qquad (1)$$

siendo $\omega_0^2 = 5\ rad^2 s^{-2}$, y $\gamma = c/m = 0'25\ s^{-1}$.

Sustituyendo en (1), tenemos

$$\boxed{\ddot{x} + 5x + 0'25\dot{x} = 10}, \quad g \simeq 10\ m/s^{2} \qquad (2)$$

b) $\left.\begin{array}{l}\gamma = 0'25\ s^{-1}\\ \omega_0 = \sqrt{5}\ rad/s\end{array}\right\}$ $\gamma < 2\omega_0 \rightarrow$ La partícula oscila (movimiento subamortiguado).

c) $Q = \frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{\sqrt{5}}{0'25} \simeq 8'9$

$$\omega_0 = \sqrt{5}\ \text{rad/s} = 2'236\ \text{rad/s}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \sqrt{5 - \left(\frac{0'25}{2}\right)^2} = 2'233\ \text{rad/s}. \qquad (3)$$

Nótese que, con un factor de calidad $Q \simeq 8'9$, el amortiguamiento afecta a la frecuencia de oscilación en la tercera cifra decimal. Podemos, por tanto, considerar en este problema $\omega \simeq \omega_0$.

d) La ley del movimiento es

$$x(t) = x_0 + e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(c'_1 \cos\omega t + c'_2 \operatorname{sen}\omega t\right), \qquad (4)$$

donde c'_1 y c'_2 pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales:

$$x(0) = x_{eq} + c'_1 \longrightarrow c'_1 = x(0) - x_{eq} = 0'05\ m. \qquad (5)$$

$$\dot{x} = -\frac{\gamma}{2}x + \omega e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(-c'_1 \operatorname{sen}\omega t + c'_2 \cos\omega t\right)$$

$$\dot{x}(0) = 0 = -\frac{\gamma}{2}c'_1 + \omega c'_2 \longrightarrow c'_2 = \frac{c'_1\gamma}{2\omega} = 2'8\cdot 10^{-3}\ m. \qquad (6)$$

Sustituyendo (5) y (6) en (4) se tiene finalmente:

$$\boxed{x(t) = 2 + e^{-0'125t}\left[0'05 \cos\sqrt{5}t + 2'8\cdot 10^{-3} \operatorname{sen}\sqrt{5}t\right]}. \qquad (7)$$

26 $\vec{F}(t) = 15 \cos 2t\ \vec{i}$ (N).

a) La amplitud en el estado estacionario es:

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}, \qquad (1)$$

siendo $F_0 = 15 N$, $m = 0'8$ Kg, $\omega = 2$ rad/s, $\omega_0 = \sqrt{5}$ rad/s, y $\gamma = 0'25\ s^{-1}$.
Sustituyendo se tiene:

$$\boxed{A\left(2\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) = 16'8\ m}. \qquad (2)$$

b) La ley del movimiento en el estado estacionario será:

$$x_E(t) = x_{eq} + A(\omega)\cos\left[\omega t + \phi(\omega)\right], \qquad (3)$$

siendo

$$\boxed{\phi(\omega) = tg^{-1}\left(-\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right) = tg^{-1}\left(\frac{-2\cdot 0'25}{5-4}\right) = tg^{-1}(-0'5) = -0'464\ \text{rad}} \qquad (4)$$

NOTE BOOK

Portanto,

$$x_E(t) = x_{eq} + 16'8 \cos[2t - 0'464] \ (m) \qquad (5)$$

c) No; dado que $x_E(t)$ no depende de las condiciones iniciales.

27 m ; $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$
$x(t=0) = 0$
$\dot{x}(t=0) = 0$
$\vec{F} = F_0 \cos\omega t \, \vec{i}$

(a) La ecuación de movimiento, teniendo en cuenta que no existe rozamiento, es

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos\omega t \, . \qquad (1)$$

La solución de esta ecuación es la suma de una solución particular más la solución general de la homogénea. Tenemos:

$$x(t) = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \operatorname{sen}\omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos\omega t \, , \qquad (2)$$

donde C_1 y C_2 se obtendrán a partir de las condiciones iniciales:

$$x(0) = 0 = C_1 + \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \rightarrow \boxed{C_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}} \, . \qquad (3)$$

Por otro lado, derivando con respecto al tiempo $x(t)$ obtenemos la velocidad

$$\dot{x}(t) = -C_1 \omega_0 \operatorname{sen}\omega_0 t + C_2 \omega_0 \cos\omega_0 t - \omega \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \operatorname{sen}\omega t$$

$$\dot{x}(0) = 0 = C_2 \omega_0 \rightarrow \boxed{C_2 = 0} \, . \qquad (4)$$

Sustituyendo (3) y (4) en (2) se tiene para $x(t)$:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} (\cos\omega t - \cos\omega_0 t) \, . \qquad (5)$$

Por otro lado, usando la relación trigonométrica

$$\cos v - \cos u = 2 \operatorname{sen}\frac{u+v}{2} \operatorname{sen}\frac{u-v}{2} \, , \qquad (6)$$

se tiene

$$x(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \operatorname{sen}\frac{(\omega+\omega_0)t}{2} \operatorname{sen}\frac{(\omega_0-\omega)}{2} t \qquad (7)$$

(b) Cuando $\omega \to \omega_0$, siendo $\omega < \omega_0$, podemos hacer la aproximación *

$$\operatorname{sen}\frac{(\omega_0-\omega)}{2} t \simeq \frac{\omega-\omega_0}{2} t \, , \qquad (8)$$

de forma que

$$\left[x(t) \underset{\omega\to\omega_0}{\simeq} \frac{2F_0}{m\cancel{(\omega_0-\omega)}(\omega_0+\omega)} \operatorname{sen}\left[\frac{\omega+\omega_0}{2} t\right] \times \frac{\cancel{\omega-\omega_0}}{2} t \simeq \frac{\cancel{2}F_0}{\cancel{2}m\omega_0} \operatorname{sen}\left[\frac{\cancel{2}\omega_0 t}{\cancel{2}}\right] \times \frac{t}{2} \right.$$

$$\left. = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}\omega_0 t \right] . \qquad (9)$$

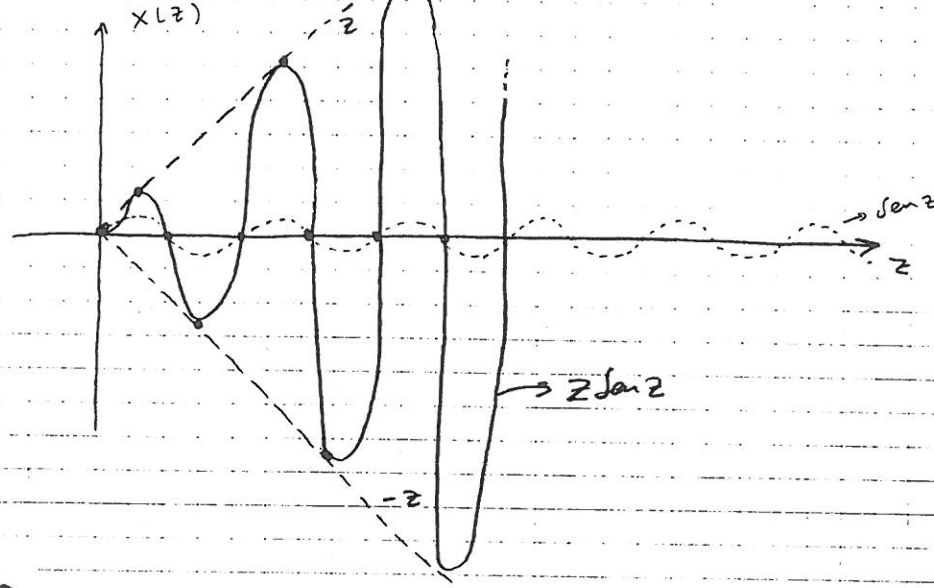
* También se puede aplicar la regla de L'hôpital, teniendo en cuenta que, cuando $\omega \to \omega_0$, en (5) aparece la indeterminación 0/0. Entonces:

$$\lim_{\omega\to\omega_0} x(t) = \frac{F_0}{m} \lim_{\omega\to\omega_0} \frac{\frac{d}{d\omega}[\cos\omega t - \cos\omega_0 t]}{\frac{d}{d\omega}(\omega_0^2-\omega^2)} = \frac{F_0}{m} \lim_{\omega\to\omega_0} \frac{-t \operatorname{sen}\omega t}{-2\omega} = \frac{F_0 t \operatorname{sen}\omega_0 t}{2m\omega_0} \, . \qquad (10)$$

Llamando $z = w_0 t$, tenemos:

$$X(z) = \frac{F_0}{2m w_0^2}\, z \operatorname{sen} z, \qquad (10)$$

cuya representación gráfica mostramos a continuación:

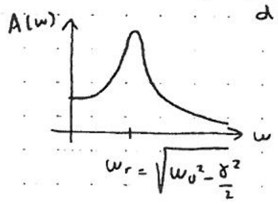


(29) $A(w) = \dfrac{F_0}{m\sqrt{(w_0^2-w^2)^2+\gamma^2 w^2}} = \dfrac{F_0}{m\sqrt{g(w)}}$; $g(w) = (w_0^2-w^2)^2+\gamma^2 w^2$

Para obtener el máximo de $A(w)$ buscaremos el valor de w que hace mínima $g(w)$.

$$\frac{dg(w)}{dw} = 2(w_0^2-w^2)(-2w) + 2w\gamma^2 \; ; \; \left.\frac{dg(w)}{dw}\right|_{w=w_r} = 0 \rightarrow 2w_r\left[\gamma^2 - 2w_0^2 + 2w_r^2\right] = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} w_r = 0 \\ w_r = \sqrt{w_0^2 - \dfrac{\gamma^2}{2}} \end{cases}$$



NOTA: compruébese que $\left.\dfrac{d^2g}{dw^2}\right|_{w=w_r} > 0$

Para obtener la amplitud en la resonancia sustituiremos el valor de w_r en la expresión de $A(w)$:

$$\left[A(w_r) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\cancel{w_0^2} - \cancel{w_0^2} + \frac{\gamma^2}{2})^2 + \gamma^2 w_0^2 - \frac{\gamma^4}{2}}} = \frac{F_0}{m\sqrt{\frac{\gamma^4}{4} + \gamma^2 w_0^2 - \frac{\gamma^4}{2}}} \right.$$

$$\left. = \frac{F_0}{m\,\gamma^2\sqrt{w_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} \right]$$

(30) Partiremos de la expresión de la posición en función del tiempo en el régimen permanente (analizaremos el caso $\gamma \neq 0$):

$$x(t) = A(\omega) \cos[\omega t + \phi(\omega)] \qquad (1)$$

Para obtener la velocidad derivaremos (1) respecto al tiempo:

$$\dot{x}(t) = -\omega A(\omega) \operatorname{Sen}[\omega t + \phi(\omega)]$$, de donde vemos que la amplitud en la velocidad es

$$v_\omega = \omega A(\omega) = \frac{\omega F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}} = \frac{F_0}{\frac{m}{\omega}\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}$$

$$= \frac{F_0}{m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega^2}+\gamma^2}} \qquad (2)$$

El valor máximo de v_ω se alcanzará para aquel valor de ω que haga nula la función $(\omega_0^2-\omega^2)^2/\omega^2$, dado que dicha función es mayor o igual que cero. Es evidente que esto ocurre para

$$\boxed{\omega = \omega_0} \qquad (3)$$

Por tanto, la resonancia en velocidad ocurre para $\omega = \omega_0$.
El valor de v_{ω_0} es

$$v_{\omega_0} = \frac{F_0}{m\gamma}. \qquad (4)$$

28 *Un oscilador armónico sin rozamiento, con masa $m = 0.8\,kg$ y frecuencia natural $\omega_0 = 3\,rad/s$, puede oscilar en el eje OX de unos ejes coordenados fijos, alrededor del origen O. Si se somete a oscilaciones forzadas con una fuerza $F_x = 8\cos 2t\,N$, y sabiendo que en el instante inicial ($t = 0\,s$) se encuentra en $x(0) = 2\,m$, dirigiéndose hacia el origen con una velocidad de módulo $1\,m/s$, ¿cuánto vale la velocidad para $t = 2\,s$?* **Solución:** *2.07 m/s*

La ley del movimiento del oscilador forzado sin amortiguamiento es

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t + c_1\cos\omega_0 t + c_2\mathrm{sen}\,\omega_0 t = 2\cos 2t + c_1\cos 3t + c_2\mathrm{sen}\,3t\,(m), \tag{12}$$

donde hemos tenido en cuenta que $F_0 = 8\,N$, $\omega = 2\,rads^{-1}$, $m = 0.8\,kg$ y $\omega_0 = 3\,rads^{-1}$. c_1 y c_2 son contantes que se pueden calcular a partir de las condiciones iniciales. En este caso $x(0\,s) = 2\,m$, y $\dot{x}(0\,s) = -1\,ms^{-1}$ dado que la partícula se dirige hacia el origen con una celeridad de $1\,ms^{-1}$ en el instante inicial, siendo $x(0\,s) > 0$. Haciendo $t = 0$ en las expresiones de la ley del movimiento y de su derivada temporal, e igualando a las condiciones iniciales, se tiene

$$x(0\,s) = 2 + c_1 = 2\,m \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0\,m, \tag{13}$$

$$\dot{x}(0\,s) = 3c_2 = -1\,ms^{-1} \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{1}{3}\,m. \tag{14}$$

Sustituyendo (13) y (14) en (12), la ley de movimiento es

$$x(t) = 2\cos 2t - \frac{1}{3}\mathrm{sen}\,3t\,(m). \tag{15}$$

Para obtener la velocidad para $t = 2\,s$ sólo tenemos que derivar (15) y sustituir el valor del tiempo. Tenemos,

$$\dot{x}(t) = -4\mathrm{sen}\,2t - \cos 3t \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(2\,s) = -4\mathrm{sen}(4\,rad) - \cos(6\,rad) = 2.07\,ms^{-1}. \tag{16}$$

32 *Un oscilador, caracterizado por una masa $m = 0.5\,kg$, constante elástica $k = 4\,N/m$, y coeficiente de rozamiento $c = 0.2\,kg\,s^{-1}$, oscila en régimen permanente sometido a la fuerza excitadora $F = 5\cos\omega t\,N$. Obtener, en función de ω, la energía cinética media en un periodo del movimiento, $\langle E_c\rangle(\omega)$. ¿Para qué valor de la frecuencia es máxima $\langle E_c\rangle(\omega)$? ¿Cuánto vale en ese caso la energía cinética media?* **Solución:** $2.83\,rad/s$; $78.13\,J$

La ley del movimiento del oscilador forzado amortiguado en el régimen permanente es

$$x(t) = A(\omega)\cos[\omega t + \phi(\omega)], \tag{17}$$

donde ω es la frecuencia de la fuerza excitadora, y la dependencia de la amplitud con ω es

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}, \tag{18}$$

siendo, en este caso, $F_0 = 5\,N$, $m = 0.5\,kg$, $\omega_0 = \sqrt{k/m} = \sqrt{8}\,rads^{-1}$, y $\gamma = c/m = 0.4\,s^{-1}$.

Derivando (17) respecto al tiempo obtenemos la velocidad

$$\dot{x}(t) = -\omega A(\omega)\mathrm{sen}[\omega t + \phi(\omega)], \tag{19}$$

y la expresión de la energía cinética es

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2(\omega)\text{sen}^2[\omega t + \phi(\omega)]. \tag{20}$$

Calculemos ahora el valor medio de E_c en un periodo del movimiento:

$$\langle E_c\rangle = \frac{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} E_c(t)dt}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2(\omega)\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \text{sen}^2[\omega t + \phi(\omega)]dt = \frac{1}{4}m\omega^2 A^2(\omega), \tag{21}$$

donde hemos hecho uso de la relación trigonométrica $\text{sen}^2\alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$, y hemos tenido en cuenta que el valor medio correspondiente a la función $\cos[2\omega t + 2\phi(\omega)]$ es cero.

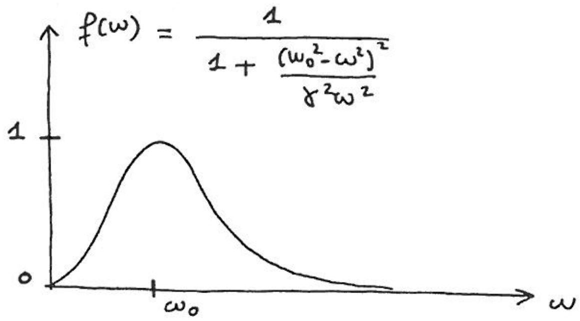
Sustituyendo (18) en (21) se tiene

$$\langle E_c\rangle(\omega) = \frac{1}{4}m\omega^2\left(\frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}\right)^2 = \frac{F_0^2}{4m\gamma^2}\frac{1}{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\gamma^2\omega^2}+1}. \tag{22}$$

A partir de (22) vemos fácilmente que la frecuencia que hace máxima la energía cinética media es la frecuencia propia correspondiente a las oscilaciones libres sin amortiguamiento, $\omega_0 = 2.83\,rads^{-1}$. La energía cinética media correspondiente a este valor de la frecuencia (energía cinética máxima) es:

$$\langle E_c\rangle(\omega_0) = \frac{F_0^2}{4m\gamma^2} = \frac{(5\,N)^2}{4\times 0.5\,kg\times(0.4\,s^{-1})^2} = 78.13\,J. \tag{23}$$

En la figura siguiente hemos representado la función $f(\omega) = \langle E_c\rangle(\omega)/\langle E_c\rangle(\omega_0)$.



21 *Se cuelga una masa de un muelle ideal en presencia del campo gravitatorio terrestre ($g = 9.8\,ms^{-2}$) y se observa que el muelle sufre una elongación $d_0 = 10\,cm$. A continuación se coloca la masa sobre una superficie horizontal rugosa (el rozamiento es viscoso), dejando al sistema oscilar libremente. Si después de $n = 10$ oscilaciones la energía potencial elástica se ha reducido a $\eta = 0.5$ veces de su valor inicial, se pide:*

1. *Frecuencia natural (correspondiente a las oscilaciones libres sin rozamiento).*
2. *Constante de amortiguamiento.*
3. *¿Cuánto tendría que aumentar como mínimo el coeficiente de rozamiento de la superficie para que el mismo sistema no realizase oscilaciones?*

Solución: *a)* $9.9\,rads^{-1}$; *b)* $0.11\,s^{-1}$; *c)* 180 *veces*

1) Teniendo en cuenta que en la situación de equilibrio que se plantea al principio del enunciado la fuerza elástica debe ser igual, en módulo, al peso, se tiene:

$$kd_0 = mg \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{d_0}} = \sqrt{\frac{9.8\, m s^{-2}}{0.1\, m}} \approx 9.8995\, rad s^{-1} \approx 9.9\, rad s^{-1}. \tag{24}$$

2) La ley del movimiento de las oscilaciones amortiguadas de la masa es

$$x(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{\gamma t}{2}}\cos(\omega_a t + \phi), \tag{25}$$

donde γ es la constante de amortiguamiento, y A y ϕ son constantes. ω_a es la frecuencia de las oscilaciones amortiguadas, y su relación con ω_0 es

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}}. \tag{26}$$

A partir de (26) podemos calcular la energía potencial elástica en el instante t:

$$E_P(t) = \frac{1}{2}kx(t)^2 = \frac{1}{2}kA^2\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos^2(\omega_a t + \phi). \tag{27}$$

Teniendo en cuenta que el valor del coseno es el mismo para $t' = t + kT_a$, siendo $T_a = 2\pi/\omega_a$ y k cualquier número entero, es fácil ver que la relación entre la energía potencial inicial y su valor después de n oscilaciones es

$$E_P(nT_a) = E_P(0)\mathrm{e}^{-\gamma n T_a}. \tag{28}$$

Ahora bien, según los datos del problema, $E_P(nT_a) = \eta E_P(0)$, siendo $\eta = 0.5$. Por tanto,

$$\mathrm{e}^{-\gamma n T_a} = \eta \quad \Rightarrow \quad -\gamma n T_a = \ln\eta. \tag{29}$$

sustituyendo T_a por $2\pi/\omega_a$, donde ω_a está dada por (26), llegamos a una ecuación donde la única incógnita es γ:

$$-\gamma n\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} = \ln\eta \quad \Rightarrow \quad 4\pi^2\gamma^2 n^2 = (\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4})\ln^2\eta \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\omega_0|\ln\eta|}{\sqrt{4\pi^2 n^2 + \frac{\ln^2\eta}{4}}}. \tag{30}$$

Sustituyendo valores tenemos

$$\gamma = \frac{9.9 \times \ln 2}{\sqrt{4\pi^2 100 + \frac{\ln^2 2}{4}}} \approx \frac{9.9 \times \ln 2}{20\pi} = 0.11\, s^{-1}, \tag{31}$$

donde hemos despreciado el segundo sumando de la raiz cuadrada, $\ln^2 2/4 = 0.12$, frente al primer sumando, $4\pi^2 100 = 3947.84$. Esto es equivalente a considerar que ω es prácticamente igual a ω_0, lo cual se corrobora sustituyendo en (26) el valor que hemos obtenido para γ):

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.1} - \frac{0.11^2}{4}} \approx 9.8993\, rad s^{-1} \approx 9,9\, rad s^{-1}. \tag{32}$$

Obsérvese que ω se diferencia de ω_0 en la cuarta cifra decimal.

3) Sean N las veces que hay que aumentar como mínimo el coeficiente de rozamiento de la superficie para que la partícula no realice oscilaciones. Se debe verificar que:

$$\gamma N = 2\omega_0, \quad \Rightarrow \quad N = 180. \tag{33}$$