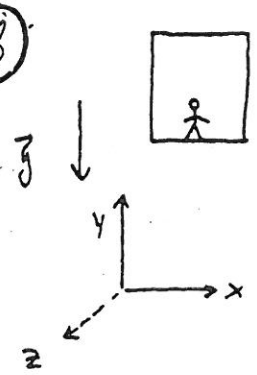
Problema 8

PROBLEMAS (del 8 al 27 - Sin incluir el 23)

(8)



$m = 90\,kg$

$g = 9'8\,m \cdot s^{-2}$

Sobre el hombre actúan las fuerzas siguientes:

- Su peso $\vec{P} = -mg\vec{j}$
- La reacción del ascensor $\vec{R}$. En principio, como el hombre permanece en reposo respecto al ascensor, suponemos $\vec{R}$ con 3 componentes

$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}.$$

Por otro lado, como el movimiento se realiza según la dirección y, entonces $\vec{a} = a_y\vec{j}$, siendo a_y la aceleración del sistema hombre-ascensor. Aplicando la 2ª ley de Newton al movimiento del hombre, tenemos

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 \\ R_z = 0 \\ \boxed{R_y - mg = m a_y}. \end{cases}$$

Por tanto,

(a) Si $\vec{v} = v_0\vec{j} \Rightarrow a_y = 0 \rightarrow R_y = mg = 882\,N$ (mismo resultado para el caso (b)).

(c) Si $\vec{a} = 3\vec{j}\,m \cdot s^{-2} \Rightarrow R_y = m(g+3) = 1152\,N$.

(d) Si $\vec{a} = -3\vec{j}\,m \cdot s^{-2} \Rightarrow R_y = m(g-3) = 612\,N$.

(e) Si el cable se rompe, aplicando el TCM al conjunto, tenemos

$$\cancel{(M+m)}\vec{g} = \cancel{(M+m)}\vec{a}_G \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{g}, \quad (G \equiv \text{centro de masas}).$$

donde hemos considerado que el ascensor tiene una masa M.
Como el hombre se encuentra en reposo respecto al ascensor, entonces ambos se mueven con la misma aceleración $\vec{a}'$.

Por tanto

$$\vec{a}_c = \vec{g} = \frac{m\vec{a}' + M\vec{a}'}{m+M} = \vec{a}' \Rightarrow \vec{a}' = \vec{g}.$$

Por otro lado, aplicando la 2ª ley de Newton al movimiento del hombre, tenemos:

$$\left.\begin{matrix} m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{a}' \\ \vec{a}' = \vec{g} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{R} = \vec{0}}.$$

$\boxed{\text{Problema 9}}$ $M = 100\,gr$ $\vec{r}_S = (3t^2 + t)\,\vec{i}$ → x en m, t en s

Se pide: 1) $\vec{a}_S$; $\Delta T_{S\,0\to 2}$ 3) $\vec{V}^{S}_{S'} = 2\vec{i}$ [¿es S inercial?]

S' = inercial

¿qué fuerza actúa sobre la partícula?

¿Qué trabajo (en S y S') realiza dicha fuerza entre t=0 y t=2 ?

4) Si S se desplaza con aceleración constante $\vec{a}^{S}_{S'} = 2\vec{i}$ con S' = inercial ; ¿es S inercial? otra vez las mismas preguntas que en 3.

---

(1) $\vec{V}^{P}_{S} = \frac{d\vec{r}_S}{dt} = (6t+1)\,\vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{a}^{P}_{S} = 6\,\vec{i}}$

(2) $\Delta T_{0\to 2} = \frac{M}{2}\left(V^2(2) - V^2(0)\right) = \frac{M}{2}\left(13^2 - 1\right) = 84 \cdot M = \overline{\underline{8'4 \text{ Julios}}}$

(3) $\vec{V}^{S}_{S'} = \vec{cte} \Rightarrow$ S inercial si lo es S' (Demostración)

$\vec{F} = m\vec{a}$ (S ó S' igual) $= M \cdot 6\vec{i} = \overline{\underline{0'6\,\vec{i}\ N}}$

$W_{02} = \int_0^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^2 0'6\,\vec{i}\cdot(6t+1)\,\vec{i}\cdot dt = 0'6\left[6\frac{t^2}{2} + t\right]_0^2 = \overline{\underline{8'4\ J}}$

teorema energ. $W_{02} = \Delta T = 8'4\ J$

$W'_{02} = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}\,'$

$\vec{V}^{P}_{S'} = \vec{V}^{P}_{S} + \vec{V}^{P_S}_{S'} = (6t+1)\,\vec{i} + 2\vec{i} = (6t+3)\,\vec{i} \rightarrow d\vec{r}\,' = (6t+3)\cdot dt\ \vec{i}$ ...

$W'_{02} = \int_0^2 0'6\,\vec{i}\cdot(6t+3)\,dt\,\vec{i} = 1'8\left[t^2 + t\right]_0^2 = 1'8\,(4+2) = \overline{\underline{10'8\ J}}$

Veamos ahora por teorema energía:

$W'_{02} = T'(2) - T'(0) = \frac{0'1}{2}\left\{(6\cdot 2+3)^2 - (6\cdot 0+3)^2\right\} = \frac{0'1}{2}\cdot\left(15^2 - 9\right) = \frac{216\cdot 0'1}{2}$

$= \overline{\underline{10'8\ J}}$

Vemos que los resultados en S y S' son distintos, pero consistentes.

(4) Ahora S ya no es inercial. Sabemos que: $\vec{F} = m\cdot\vec{a}^{P}_{S'}$, y por otra parte $\vec{a}^{P}_{S'} = \vec{a}^{P}_{S} + \vec{a}^{P_S}_{S'}$ = aceleración del punto de S que ocupa la posición P medida respecto a S'. En nuestro caso:

$\vec{a}^{P}_{S} = 6\vec{i}$ (ya calculada en 1).

$\vec{a}^{P_S}_{S'} = 2\vec{i}$ (nos lo dice el enunciado: Todos los puntos de S se trasladan con aceleración $2\vec{i}$ respecto a S').

Así que: $\vec{a}^{P}_{S'} = 6\vec{i} + 2\vec{i} = \boxed{8\vec{i} \ m/s^2}$ y

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}^{P}_{S'} = 0'1 \cdot 8\vec{i} = \boxed{0'8\vec{i} \ N}$

→ Para calcular las velocidades medidas en S' tenemos que saber la velocidad con que S se mueve respecto a S' ⇒ hay que integrar la aceleración. Pero no nos dan las condiciones iniciales ⇒ VAMOS A SUPONER que en $t=0$ S y S' coinciden, y S tiene (en ese momento) velocidad nula. Entonces:

$$\vec{V}^{S}_{S'} = \int_0^t \vec{a}^{S}_{S'} \cdot dt = 2t \cdot \vec{i} \rightarrow x_0(t) = t^2$$

La coordenada del punto P medida en S' será:

$$x' = x_0 + x = t^2 + 3t^2 + t = 4t^2 + t \Rightarrow dx' = (8t+1) \cdot dt$$

Entonces, el trabajo en S' será:

$$W'_{02} = \int_0^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}\,' = \int_0^2 (0'8\vec{i}) \cdot (8t+1)\vec{i} \cdot dt = 0'8\left[8\frac{t^2}{2} + t\right]_0^2 =$$

$$= \boxed{14'4 \ J}$$

Si aplicamos el teorema de la energía:

$$W_{02} = \Delta T \equiv T_2 - T_0 = \frac{1}{2} M \left((\vec{V}^{P}_{S'}(2))^2 - (\vec{V}^{P}_{S'}(0))^2 \right)$$

donde $\vec{V}^{P}_{S'} = \vec{V}^{P}_{S} + \vec{V}^{P_S}_{S'} = (6t+1) \cdot \vec{i} + 2t \cdot \vec{i} = (8t+1) \cdot \vec{i}$

Entonces: $\cancel{W_{02} = \frac{M}{2}(8 \cdot 2 + 1)^2 = \frac{17^2 \cdot 0'1}{2}}$

$$W'_{02} = \frac{M}{2}\left[(8 \cdot 2+1)^2 - (8 \cdot 0+1)^2\right] = \frac{M}{2}\left(17^2 - 1\right) = \frac{0'1 \cdot 288}{2} = \boxed{14'4 \ J}$$

Que vemos coincide con el resultado obtenido haciendo directamente la integral.

Intentemos ahora hacer las cosas directamente en el sistema S (que es NO inercial).

$$W_{02} = \int_0^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int (0'8\,\vec{i})\cdot(6t+1)\,\vec{i}\cdot dt = 0'8\left[6\frac{t^2}{2}+t\right]_0^2 = 0'8(6\cdot 2+2) =$$

$$= \underline{11'2\ J}$$

Si ahora quisiéramos reproducir este resultado aplicando el teorema de la energía, tendríamos:

$$W_{02} = \Delta T \equiv \frac{M}{2}\left(\left(\vec{V}^P_S(2)\right)^2 - \left(\vec{V}^P_S(0)\right)^2\right) = \frac{M}{2}\left[(6\cdot 2+1)^2 - (6\cdot 0+1)^2\right] =$$

$$= \frac{0'1}{2}\left(13^2-1^2\right) = \underline{8'4\ J}$$

¡Que no coincide con el resultado obtenido haciendo la integral! No nos debemos sorprender de esto, puesto que S es NO inercial, y por tanto, en él no se cumplen las leyes de la mecánica (en concreto, el teorema de la energía). Sin embargo, hay un modo de reinstaurar la validez de las leyes de la mecánica en los sistemas no inerciales. Consiste en la introducción de las fuerzas de inercia.

En nuestro caso, debemos sustituir la fuerza $\vec{F}$ por la "fuerza": $\vec{F}+\vec{F}_i = \vec{F} - M\vec{a}^S_{S'} = 0'8\,\vec{i} - 0'1\cdot 2\,\vec{i} = 0'6\cdot\vec{i}$

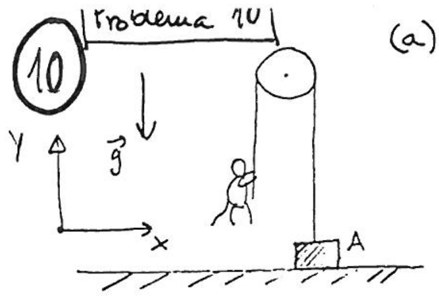
El trabajo será:

$$W_{02} = \int_0^2 (\vec{F}+\vec{F}_i)\cdot d\vec{r} = \int_0^2 (0'6\cdot\vec{i})\cdot(6t+1)\,\vec{i}\cdot dt =$$

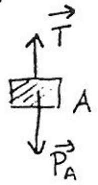
$$= 0'6\left[6\frac{t^2}{2}+t\right]_0^2 = 0'6\cdot\left(6\cdot\frac{4}{2}+2\right) = \underline{8'4\ J}$$

¡Ahora sí coincide con ΔT!

10 Problema 10



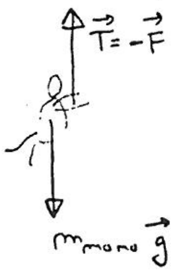
(a) Analicemos en primer lugar el bloque A, cuya masa es 15 kg. Para que se levante del suelo tiene que tener una aceleración no nula, y por tanto la suma de fuerzas tiene que tener una componente neta hacia arriba, es decir:



$$\boxed{T > m_A g}. \qquad (1)$$

Como no existe rozamiento la tensión es la misma al otro lado de la rama del arbol, donde el mono tira de la cuerda. Para ver la relación existente entre la fuerza que el mono ejerce sobre la cuerda y la tensión aplicaremos el teorema del centro de masas al trozo de cuerda de la parte izquierda. Como la masa de la cuerda es nula, entonces $\vec{T} + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\vec{T}}$. (2)

Finalmente aplicaremos el teorema del centro de masas al mono. Sobre él actúan el peso, $m_{mono}\vec{g}$, y la fuerza que la cuerda le hace, que por el principio de acción y reacción es igual a $-(-\vec{T}) = \vec{T}$ (véase Eq. (2)). Por tanto,



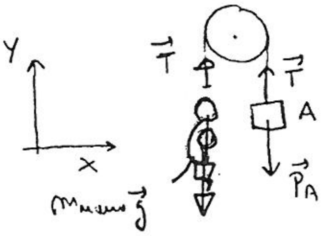
$$T - m_{mono}\, g = m_{mono}\, a_{mono}. \qquad (3)$$

Teniendo en cuenta (1) llegamos fácilmente a la relación

$$\boxed{a_{mono} > \frac{(m_A - m_{mono})}{m_{mono}}\, g = \frac{15-10}{10}\, 9'8 = 4'9\ m\, s^{-2}}. \qquad (4)$$

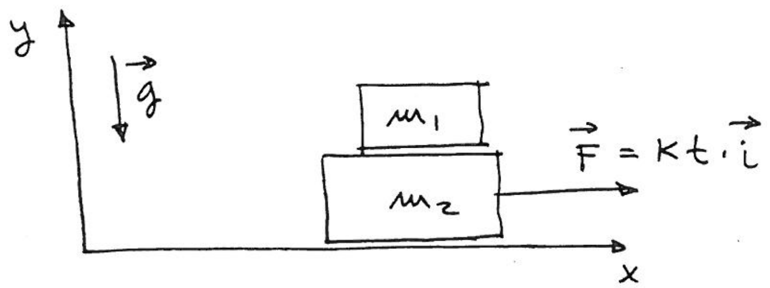
Es decir, el mono sube por la cuerda con una aceleración mayor que $4'9\ \frac{m}{s^2}$.

(b) Si una vez que se ha levantado la masa del suelo el mono deja de trepar y se mantiene agarrado a la cuerda, el módulo de las aceleraciones de A y del mono será el mismo. Como $m_A > m_{mono}$, la aceleración del bloque (mono) llevará el mismo sentido (sentido contrario) al de la gravedad. Veámoslo:

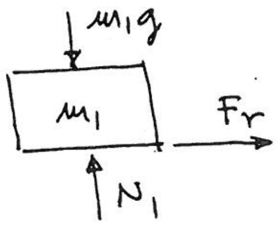


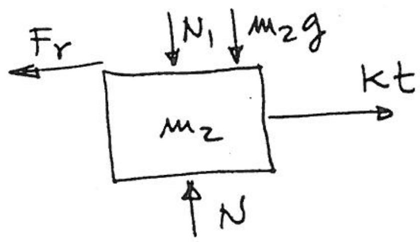
$$\left.\begin{array}{l} -m_A g + T = m_A\, a \\ T - m_{mono}\, g = m_{mono}(-a) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = \dfrac{m_{mono} - m_A}{m_{mono} + m_A}\, g = -1'96\ \frac{m}{s^2} \\ T = m_A(a+g) = 117'6\ N \end{array}}$$

Problema 11



Suponemos que inicialmente ambos bloques están en reposo. Como entre ambos bloques hay rozamiento, y la magnitud de F es pequeña cuando t lo es, supondremos que inicialmente no hay deslizamiento (la fuerza de rozamiento será capaz de transmitir a m_1 la misma aceleración (pequeña) de m_2). Por tanto, inicialmente podemos aplicar Newton al conjunto como si fuera un único bloque. No obstante, vamos a dibujar las fuerzas que actúan sobre cada bloque:





Newton al conjunto $\Leftrightarrow$ Teorema del centro de masas mientras no deslizan:

$$\vec{F} + \vec{N} + (m_1+m_2)\vec{g} = (m_1+m_2)\cdot\vec{a} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Kt = (m_1+m_2)\cdot a \\ N - (m_1+m_2)\, g = 0 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a = \dfrac{Kt}{m_1+m_2} & [1] \\ N = (m_1+m_2)\, g & [2] \end{array} \right.$$

Esto será válido hasta el instante t_1 en que comienza el deslizamiento. Para $t > t_1$, [1] también es cierta, pero ya no representa la aceleración de cada bloque, sino la aceleración del centro de masas del sistema. Para averiguar cuanto vale t_1 aplicamos Newton al bloque m_1:

$$\vec{F_r} + \vec{N_1} + m_1\vec{g} = m_1 \cdot \vec{a_1} \iff \begin{cases} F_r = m_1 \cdot a_1 = \dfrac{m_1 k t}{m_1 + m_2} \; ; \; t \leq t_1 & [3] \\ N_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g & [4] \end{cases}$$

(a) En $t = t_1$ la fuerza de rozamiento alcanza su valor máximo sin deslizamiento: $F_r)_{max} = \mu_e N_1 = \mu_e m_1 g$. Que llevado a [3] nos da:

$$\mu_e \cancel{m_1} g = \frac{\cancel{m_1} k t_1}{m_1 + m_2} \rightarrow \boxed{t_1 = \frac{\mu_e g (m_1 + m_2)}{k}} \quad [5]$$

(b) A partir de t_1 hay deslizamiento y la magnitud de la fuerza de rozamiento pasa a ser $\mu_d \cdot N_1 = \mu_d \cdot m_1 g$. Si con este valor volvemos a aplicar Newton a m_1 obtenemos:

$$F_r = m_1 \cdot a_1 \iff \mu_d m_1 g = m_1 \cdot a_1 \Rightarrow \boxed{a_1 = \mu_d \cdot g} \quad t > t_1 \quad [6]$$

Apliquemos ahora Newton a m_2 para calcular a_2:

$$\vec{F} + \vec{N} + m_2\vec{g} - \vec{F_r} - \vec{N_1} = m_2 \cdot \vec{a_2} \iff \left\{ \begin{array}{l} kt - \mu_d m_1 g = m_2 a_2 \\ N - m_2 g - m_1 g = 0 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \boxed{a_2 = \dfrac{kt - \mu_d m_1 g}{m_2}} & t > t_1 \quad [7] \\ N = (m_1 + m_2) g & [8] \end{cases}$$

También podríamos haber calculado a_2 sin aplicar Newton a m_2: Una vez que habíamos calculado a_1, y sabiendo que a ([1]) representa la aceleración del centro de masas para cualquier t, podríamos usar:

$$a = \frac{m_1 \cdot a_1 + m_2 \cdot a_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow a_2 = \frac{(m_1 + m_2) a - m_1 a_1}{m_2} \overset{[1],[6]}{=}$$

$$= \frac{\cancel{m_1 + m_2}}{m_2} \cdot \frac{kt}{\cancel{m_1 + m_2}} - \frac{m_1}{m_2} \cdot \mu_d g = \frac{kt - m_1 \mu_d g}{m_2}$$, que coincide con [7].

(c) Finalmente representemos gráficamente a_1 y a_2 frente al tiempo. Debemos darnos cuenta de que en t_1, al cambiar súbitamente el coeficiente de rozamiento de su valor estático al dinámico, a_1 y a_2 tendrán una discontinuidad. Veamos cuanto valen a, a_1 y a_2 para $t = t_1$:

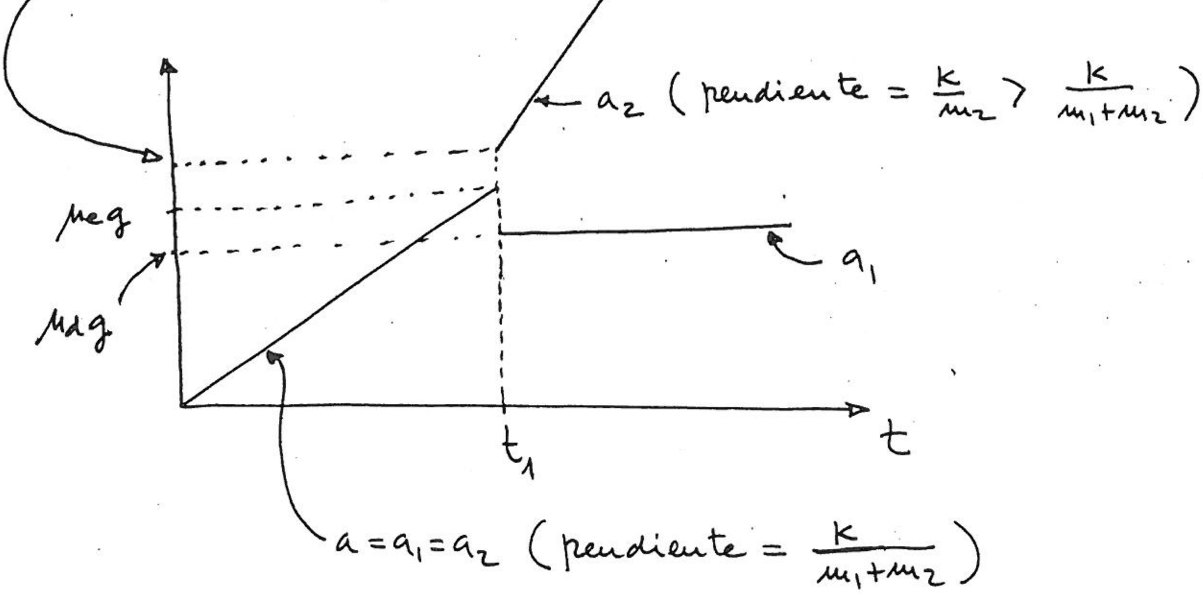
$$a(t_1) = \frac{\cancel{k}}{\cancel{m_1+m_2}} \cdot \frac{\mu_e g}{\cancel{k}} \cancel{(m_1+m_2)} = \mu_e g$$

$$a_1(t_1) = \mu_d g$$

$$a_2(t_1) = \frac{\cancel{k}}{m_2} \cdot \frac{\mu_e g}{\cancel{k}}(m_1+m_2) - \frac{\mu_d m_1 g}{m_2} = \frac{m_1 g(\mu_e - \mu_d) + m_2 \mu_e g}{m_2} =$$

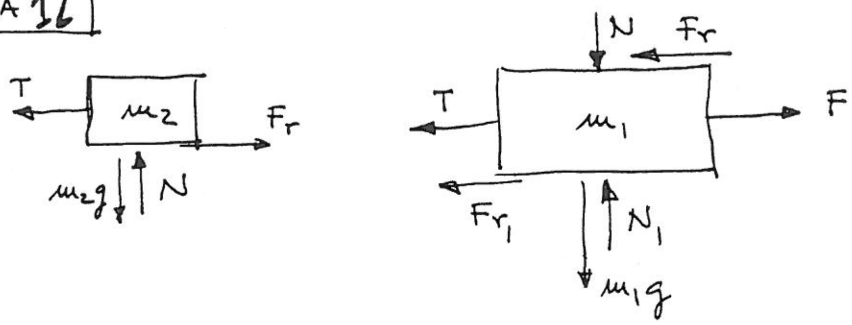
$$= \underbrace{\mu_e g + \frac{m_1 g(\mu_e-\mu_d)}{m_2}} > \mu_e g \text{ si } \mu_e > \mu_d \text{ como}$$

ocurre normalmente.



PROBLEMA 12

(a)



Si hubiera ~~rozami~~ deslizamiento, entonces podríamos poner $F_r = \mu \cdot N$; $F_{r_1} = \mu \cdot N_1$. Pero eso no lo sabemos (en realidad, podemos saberlo leyendo la respuesta al apartado f). Cuando ocurre esto hay que utilizar el método de ensayo y error: supongo que desliza (o que no desliza) y veo si obtengo una solución consistente o si llego a una contradicción.

Vamos a suponer que <u>no desliza</u> (viendo la respuesta al apartado f vemos que esta ~~respuesta~~ hipótesis es equivocada, pero la seguimos por razones didácticas).

Si no desliza $\Rightarrow$ reposo $\Rightarrow$ aceleración $=0$. Esto nos servirá en el apartado c; pero antes vamos a contestar el b.

(b) Sistema $m_1 + m_2$ →
- Fuerzas externas $= m_1 g,\ m_2 g,\ T,\ T,\ F_{r_1},\ N_1,\ F$
- Fuerzas internas $= N,\ F_r$

(c)

$$1 \rightarrow \begin{cases} F_r - T = 0 \ [\text{¡Supongo que no desliza!}] \rightarrow F_r = T \quad (1) \\ N - m_2 g = 0 \rightarrow \boxed{N = m_2 g} \quad (2) \end{cases}$$

$$2 \rightarrow \begin{cases} F - F_{r_1} - F_r - T = 0 \ [\text{no desliza}] \xrightarrow{(1)} F_{r_1} = F - 2T \quad (3) \\ N_1 - N - m_1 g = 0 \xrightarrow{(2)} \boxed{N_1 = (m_1 + m_2) g} \quad (4) \end{cases}$$

(2) y (4) nos han permitido calcular las normales. Pero entre (1) y (3) tenemos 2 ecuaciones y 3 incógnitas → ¡Este sistema tiene infinitas soluciones! Esto nos debe hacer sospechar que nos hemos equivocado en algo. Si no ha sido en los cálculos ni en la aplicación de las leyes de Newton → ha debido ser en nuestra hipótesis de no deslizamiento. Pero vamos a verlo. El sistema $\{(1),(3)\}$ se puede resolver en función de T. Cuanto más pequeña es T, menor es F_r y mayor F_{r_1}.

Pero si no hay deslizamiento debe ocurrir: $\begin{cases} F_r < \mu \cdot N = \mu m_2 g \\ F_{r_1} < \mu \cdot N_1 = \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} F_r < \mu m_2 g & (5) \\ F_{r_1} < \mu (m_1+m_2) g & (6) \end{cases}$$

Para poder seguir ~~nec~~ necesitamos cuantificar. Vamos a ello:

$m_1 = 1\ kg$; $m_2 = 0'5\ kg$; $\mu = 0'4$; $g = 10\ m/s^2$; $F = 10'75\ N \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (5) \Leftrightarrow F_r < 0'4 \cdot 0'5 \cdot 10 = 2 \\ (6) \Leftrightarrow F_{r_1} < 0'4 \cdot 1'5 \cdot 10 = 6 \end{cases}$$

Resolvamos ahora el sistema {(1), (3)} para distintos valores de T, viendo para cuáles se verifican las desigualdades (5) y (6). T puede tomar cualquier valor desde cero hasta infinito. Empecemos por cero:

$$T=0 \begin{cases} \xrightarrow{(1)} F_r = 0 \ ; \ F_r < 2 \quad \text{o.k.; se cumple (5)} \\ \xrightarrow{(3)} F_{r_1} = 10'75 \ ; \ F_{r_1} > 6 \quad \text{¡no se cumple (6)} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ esta solución (T=0) no vale, porque no se satisface la desigualdad (6), que es necesaria para que no exista deslizamiento.

Para que se cumpla (6), vemos que T tiene que ser mayor. ¿Cuál es el menor valor de T para el que se cumple (6)? (6) <u>casi</u> se cumple si $F_{r_1} = 6$; que llevado a (3) nos da: $6 = 10'75 - 2T \Rightarrow 2T = 4'75 \Leftrightarrow T = 2'375$ ¡Pero este valor es muy grande, pues ahora se viola (5). Así que tenemos:

$$\text{valores de T} \begin{cases} T < 2'375 \rightarrow \text{se viola (6)} \\ T > 2'375 \rightarrow \text{se viola (5)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

no existe ningún valor de T para el que se satisfagan (5) y (6) $\Leftrightarrow$ Las Leyes de Newton <u>sin deslizamiento</u> tienen una solución (Fuerzas F_{r_1} y F_r) <u>incompatible</u> con las leyes del rozamiento (desigualdades (5) y (6)).

¡NOS HEMOS EQUIVOCADO (ya lo sabíamos) EN NUESTRA HIPÓTESIS DE NO DESLIZAMIENTO! Así que ahora volvemos a empezar el problema, pero suponiendo que <u>SÍ DESLIZA</u> $\Rightarrow$ Ahora hay una aceleración desconocida, pero las fuerzas de rozamiento satisfacen:

$$Fr = \mu \cdot N \qquad (7)$$

$$Fr_1 = \mu \cdot N_1 \qquad (8)$$

Volvemos a aplicar Newton a 1 y a 2:

$$1 \to \begin{cases} Fr - T = -m_2 \cdot a \xrightarrow{(7)} \mu N - T = -m_2 a \quad (9) \\ N - m_2 g = 0 \quad (10) \leftrightarrow \boxed{N = m_2 g} \end{cases}$$

$$2 \to \begin{cases} F - Fr_1 - Fr - T = m_1 \cdot a \xrightarrow{(7)(8)} F - \mu(N+N_1) - T = m_1 \cdot a \quad (11) \\ N_1 - N - m_1 g = 0 \xrightarrow{(10)} \boxed{N_1 = (m_1+m_2) g} \quad (12) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} (9) \xrightarrow{(10)} \mu m_2 g - T = -m_2 \cdot a \\ (11) \xrightarrow{(10)(12)} F - \mu g (m_1 + 2m_2) - T = m_1 \cdot a \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Restando}}$$

$$\to F - \mu g (m_1 + 3m_2) = (m_1 + m_2) \cdot a \to$$

$$\to a = \frac{F - \mu g (m_1 + 3m_2)}{m_1 + m_2} = \frac{10'75 - 0'4 \cdot 10 (1 + 3 \cdot 0'5)}{1 + 0'5} = \underline{\underline{0'5 \ m/s^2}}$$

que llevado a (9) nos permite calcular T:

$$T = m_2 (\mu g + a) = 0'5 (0'4 \cdot 10 + 0'5) = \underline{\underline{2'25 \ N}}$$

d) T.C.M. $\leftrightarrow \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}e \leftrightarrow M \cdot \vec{a}_G = \vec{F}e$

$\vec{F}e$ es la resultante de las fuerzas exteriores (ver apartado b).

$\vec{P} \equiv m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \Rightarrow \dfrac{d\vec{P}}{dt} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2$. Pero $\vec{a}_1 = a \vec{i}$ y $\vec{a}_2 = -\vec{a}_1$ (ya que el hilo es inextensible → lo que avanza 1 lo retrocede 2).

Así que queda:

$$(m_1 - m_2) \cdot a = F - Fr_1 - 2T \qquad (13)$$

$$0 = N_1 - (m_1 + m_2) g \qquad (14)$$

Vemos que (14) es la misma que (12) ó (4). (13) se puede obtener sumando (9) y (11). Esto no es nada raro, ya que el T.C.M. se obtuvo (se dedujo) aplicando Newton a cada partícula de un sistema. Los apartados e y f los hemos resuelto ya sin darnos cuenta.

Problema 13

(a) El teorema del impulso nos dice que el incremento de la cantidad de movimiento del sistema durante la explosión es igual al impulso de las fuerzas externas (en nuestro caso, el peso). Pero si la explosión es normal durará poquísimo, y el impulso del peso durante la misma será despreciable (véase la argumentación de la cuestión 18).

Por tanto, en rigor $\vec{P}(t_0^-) \neq \vec{P}(t_0^+)$, pero $\vec{P}(t_0^-) \simeq \vec{P}(t_0^+)$ con mucha aproximación.

(b) El teorema del impulso nos dice que el incremento de $\vec{P}$ será el impulso del peso desde el momento t_0^- hasta el instante t que queramos. En la medida que el intervalo (t_0^-, t) sea finito, lo será el correspondiente impulso, incrementándose $\vec{P}$ correspondientemente y, por tanto, no conservándose.

(c) Si no hay rozamiento el teorema del centro de masa nos asegura que se conserva la cantidad de movimiento horizontal (la única fuerza externa sería el peso, que es vertical). Este es el típico problema del tiro parabólico. La trayectoria es una parábola.

(d) Si los dos fragmentos salen horizontalmente (velocidad vertical inicial nula) llegarán al suelo a la vez $\Rightarrow$ el centro de masas llegará al suelo al mismo tiempo que cada fragmento.

Si tomamos unos ejes con origen en el punto de lanzamiento, eje x horizontal ($\rightarrow$ = sentido de la componente horizontal de la velocidad de lanzamiento), eje y vertical ascendente, y aplicamos el teorema del centro de masas:

$$M\vec{g} = M\vec{a}_G \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{g} \Rightarrow \begin{cases} x_G = V_{Gx}(0)\cdot t \\ y_G = V_{Gy}(0)\cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Llamando $\hat{t}$ al tiempo en que G llega al suelo, tendremos:

$$y_G(\hat{t}) = 0 = V_{Gy}(0)\cdot \hat{t} - \frac{1}{2} g \hat{t}^2 \Rightarrow \begin{cases} \hat{t} = 0 & \text{(G está en el suelo en el momento del lanzamiento)} \\ \hat{t} = \dfrac{2\cdot V_{Gy}(0)}{g} \end{cases}$$

Las condiciones iniciales son:

$$\left.\begin{array}{l} V_{Gx}(0) = 400\cdot\cos 60^\circ = 200 \text{ m/s} \\ V_{Gy}(0) = 400\cdot \operatorname{sen} 60^\circ = 200\sqrt{3} \text{ m/s} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{t} = \frac{2\cdot 200\sqrt{3}}{9'8} \simeq 70'7 \text{ s}$$

Y la posición en que G cae será:

$$x_G(\hat{t}) = 200\cdot 70'7 = 14140 \text{ m}$$

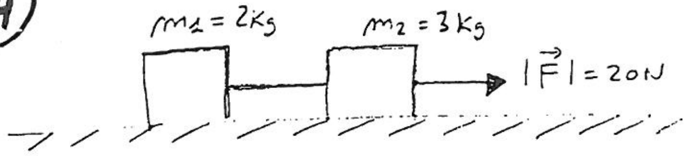
Por la definición de G sabemos que:

$$x_G = \frac{x_1\cdot m_1 + x_2\cdot m_2}{m_1 + m_2} \rightarrow x_G(\hat{t}) = \frac{x_1(\hat{t})\cdot m_1 + x_2(\hat{t})\cdot m_2}{m_1 + m_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14140 = \frac{10000\cdot 4 + x_2\cdot 6}{10} \Rightarrow \boxed{x_2 = 16900 \text{ m}}$$

Problema 14

(14)



(a)

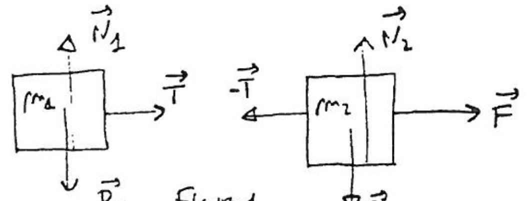


Figura 1.

Fuerzas sobre m_1: el peso $\vec{P_1}$, la reacción del suelo $\vec{N_1}$ (no hay rozamiento), y la tensión $\vec{T}$.
Fuerzas sobre m_2: $\vec{P_2}$, $\vec{N_2}$ y $-\vec{T}$.

(b)

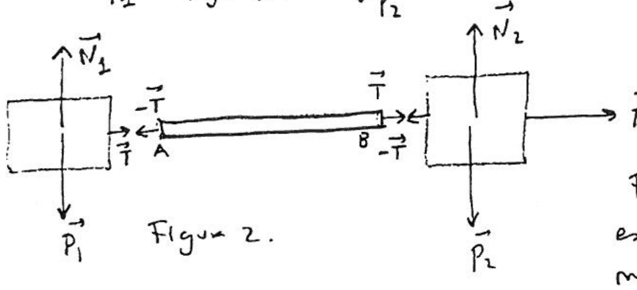


Figura 2.

Fuerzas externas: $\vec{N_1}, \vec{P_1}$
$\vec{N_2}, \vec{P_2}, \vec{F}$

Fuerzas internas: En A, $\vec{T}$ y $-\vec{T}$ ($\vec{T}$ es la fuerza que la cuerda hace sobre m_1 y $-\vec{T}$ la que m_1 hace sobre la cuerda).
En B, $-\vec{T}$ y $\vec{T}$ (Véase la figura 2).

(c)
m_1: $T = m_1 a$; $N_1 = m_1 g$
m_2: $F - T = m_2 a$; $N_2 = m_2 g$

2ª ley de Newton a m_1 y m_2. La hemos descompuesto en sus componentes horizontal y vertical ($a_y = 0$)

$$F + T - T = (m_1 + m_2) a \Rightarrow \boxed{a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{20}{2+3} = 4\ m/s^2}.$$

$$\boxed{T = m_1 a = 2 \cdot 4 = 8\ N}.$$

(d) $$\sum \vec{F}_{ext} = M \vec{a}_c \Rightarrow F = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_2} = 4\ m/s^2.$$

Hemos considerado la componente horizontal del teorema del centro de masas, y hemos tenido en cuenta que ambos cuerpos se mueven con la misma aceleración, la cual coincide con la aceleración del centro de masas.

(e) Si la cuerda se rompe m_1 se moverá libremente y m_2 se moverá acelerada debido a la fuerza F.

$a'_1 = 0 \rightarrow V_1 = cte$.

$F = m_2 a'_2 \rightarrow a'_2 = \frac{F}{m_2} = \frac{20}{3} \frac{m}{s^2}$.

Como la tensión es una fuerza interna, al romperse la cuerda las tensiones desaparecen pero ¡LA FUERZA EXTERNA RESULTANTE, F, SIGUE SIENDO LA MISMA!. Por tanto, el centro de masas se sigue moviendo con una aceleración de $4\ m/s^2$. Nótese que cada partícula de un sistema se mueve debido a todas las fuerzas (externas e internas) que actúan sobre ella; pero el movimiento del centro de masas depende única y exclusivamente de las fuerzas externas.

(f)

(a) En la figura (1) añadir a m_1 la fuerza $-\mu N_1 \vec{i}$, y a m_2, $-\mu N_2 \vec{i}$.

(b) Hay que incluir estas fuerzas en las fuerzas externas.

(c) $\left.\begin{array}{l} T - \mu m_1 g = m_1 a \\ F - T - \mu m_2 g = m_2 a \end{array}\right\}$ Dados que $N_1 = \mu g m_1$ y $N_2 = \mu g m_2$.

Sumando ambas ecuaciones, tenemos:

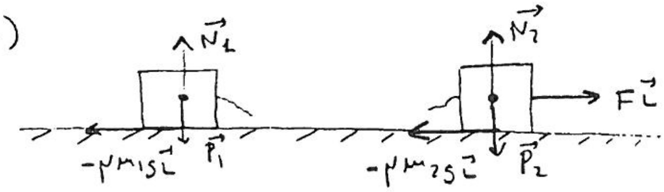
$$\frac{F - \mu g(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} = a \longrightarrow a = \frac{20 - 0'2 \cdot 9'8(2+3)}{2+3} = 2'04\ m/s^2.$$

$$T = m_1 a + \mu m_1 g = 2 \cdot 2'04 + 0'2 \cdot 2 \cdot 9'8 = 8N.$$

(d.) Teniendo en cuenta que ahora la resultante de las fuerzas de rozamiento es $F - \mu m_1 g - \mu m_1 g$, tenemos:

$$a = \frac{F - \mu m_1 g - \mu m_2 g}{m_1 + m_2} = 2'04\ m/s^2.$$

(e)

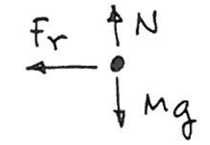


m_1: Se mueve con aceleración negativa $a'_1 = -\frac{\mu g \cancel{m_1}}{\cancel{m_1}} = -\mu g = -1'96\ m/s^2$, hasta que se detiene.

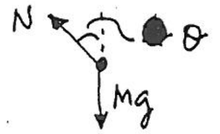
m_2: $F - \mu m_2 g = m_2 a'_2 \rightarrow a'_2 = \frac{F - \mu m_2 g}{m_2} = \frac{20 - 0'2 \cdot 3 \cdot 9'8}{3} = 4'71\ m/s^2$

Centro de masas: Se mueve con aceleración $2'04\ m/s^2$.

Problema 8

(a) tramo AB: 

$F_r = \mu N$

tramo BC: 

(b) Newton en los ejes del enunciado:

$$\left.\begin{array}{l} -F_r = -\mu \cdot N = M \cdot a_x \\ N - Mg = 0 \Rightarrow N = Mg \end{array}\right\} \Rightarrow a_x = -\mu g = -0'4 \cdot 9'8 = -3'92 \ m/s^2$$

Integrando (movimiento uniformemente desacelerado):

$$x = x(0) + v_x(0) \cdot t + \frac{1}{2} a_x \cdot t^2 = 0 + 9 \cdot t - \frac{3'92}{2} t^2$$

$$x_B = 10 \ m = 0 + 9 \cdot t_B - \frac{3'92}{2} t_B^2 \Rightarrow t_B \simeq \begin{cases} 1'885 \ s \\ 2'707 \ s \end{cases}$$

El segundo tiempo correspondería a la vuelta, pero aunque no estuviera el tramo BC la partícula no se daría la vuelta, pues en el momento en que quisiera hacerlo se invertiría el sentido de la fuerza de rozamiento, y allí se quedaría.

$$v_x(t) = v_x(0) + a_x \cdot t = 9 - 3'92 \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{xB} = v_x(t_B) = 9 - 3'92 \cdot 1'885 = \boxed{1'61 \ m/s}$$

(c) T. Energía $\Leftrightarrow$ $E_c(B) - E_c(A) = W_{A \to B} = \int_{x=0}^{x=10} \vec{F}_r \cdot d\vec{r} = -\mu M g \cdot \int_0^{10} dx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{M} v_B^2}{2} - \frac{\cancel{M} \cdot 9^2}{2} = -0'4 \cdot \cancel{M} g \cdot 10 \Rightarrow v_B = \sqrt{9^2 - 8g} \simeq \boxed{1'61 \ m/s}$$

(d) Las fuerzas que actúan en este tramo son el peso y la normal. Llamando θ al ángulo que forma la normal con la vertical (ver figura arriba) y proyectando en los ejes originales del enunciado, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x = \overline{AB} + R\cdot \operatorname{sen}\theta \\ y = R - R\cdot\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{x} = R\dot{\theta}\cdot\cos\theta \\ \dot{y} = R\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \ddot{x} = R(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta) \\ \ddot{y} = R(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \end{array}\right. \quad [1]$$

Aplicamos Newton, proyectando en los ejes x, y:

$$M\vec{g} + \vec{N} = M\cdot\vec{a} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -N\cdot\operatorname{sen}\theta = M\ddot{x} = MR(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta) \\ N\cdot\cos\theta - Mg = M\ddot{y} = MR(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \end{array}\right. \quad [2]$$

Ahora aplicamos Newton, pero proyectando en el triedro intrínseco (dirección tangente y normal a la circunferencia). Las componentes intrínsecas de la aceleración sabemos que son: $a_T = \frac{dv}{dt}$; $a_N = \frac{v^2}{R}$

Por otra parte $v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(R\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (R\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta)^2} =$

$$= R\dot{\theta} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_T = \frac{dv}{dt} = R\ddot{\theta} \\ a_N = \frac{v^2}{R} = R\dot{\theta}^2 \end{array}\right.$$

y Newton queda así:

componente tangencial $\rightarrow$ $-Mg\operatorname{sen}\theta = M\cdot R\ddot{\theta}$ [3]

" normal $\rightarrow$ $N - Mg\cos\theta = M\cdot R\dot{\theta}^2$

(e) La única fuerza que realiza trabajo es el peso, que deriva de la energía potencial gravitatoria: $E_p = Mgh = Mgy = = MgR(1-\cos\theta)$

Por tanto se conserva la energía mecánica:

$$E = E_c + E_p = cte = \frac{1}{2}Mv^2 + MgR(1-\cos\theta) \quad [4]$$

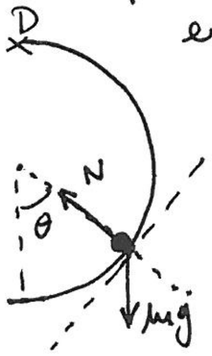
(f) Particularizamos [4] en B y en C. En C θ es máxima $\Rightarrow$ $\Rightarrow \dot{\theta} = 0$. Esto es lógico; nos dice que cuando la partícula alcanza la altura máxima su velocidad es cero. Tenemos:

$$E = \frac{1}{2}\cancel{M}v_B^2 + \cancel{M}gR(1-\cos\theta_B) = \frac{1}{2}\cancel{M}v_C^2 + \cancel{M}gR(1-\cos\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (1'61)^2/2 + 0 = 0 + 9'8 \cdot 1 \cdot (1-\cos\alpha) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{(1'61)^2}{2 \cdot 9'8} = \sim 0'868 \Longrightarrow \boxed{\alpha = \sim 29'8^{\circ}}$$

(9) Para que la partícula llegue al punto D no debe despegarse, de modo que $N \neq 0$ en el recorrido. Aplicando Newton, y proyectando en la dirección normal, tenemos:



$$N - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow N = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}. \qquad (5)$$

El valor mínimo de N se alcanza cuando $\theta = \pi$, de modo que:

$$N_{min} = N(\theta=\pi) = -mg + m\frac{v_D^2}{R} \qquad (6)$$

Exigiendo que $N_{min} \geq 0$, se obtiene que la celeridad mínima en D es:

$$v_{D,min} = \sqrt{gR}. \qquad (7)$$

Ahora, aplicando el teorema de la energía mecánica entre A y D, se tiene:

$$\frac{1}{2}m v_{A,min}^2 - \mu m g\, d_{AB} = 2mgR + \frac{1}{2}m v_{D,min}^2 \qquad (8)$$

Ahora, sustituyendo (7) en (8) se tiene:

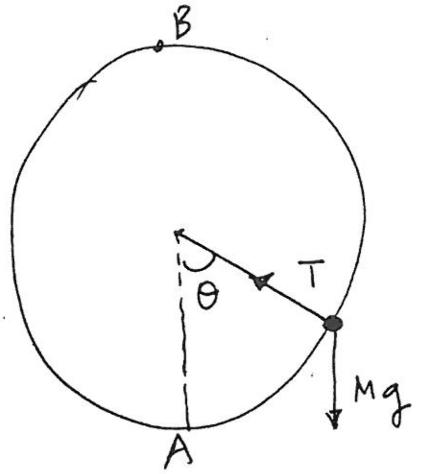
$$\frac{1}{2}m v_{A,min}^2 - \mu m g\, d_{AB} = 2mgR + \frac{1}{2}m gR = \frac{5}{2}mgR$$

$$\Rightarrow v_{A,min} = \sqrt{2\mu g d_{AB} + 5gR} = \sqrt{g[2\mu d_{AB} + 5R]}$$

Sustituyendo:

$$v_{A,min} = \sqrt{9'8 \cdot [2 \cdot 0'4 \cdot 10 + 5 \cdot 1]} = 11'3 \ m/s.$$

Problema 16 Llamemos θ al ángulo que forma la cuerda con la vertical. Las únicas fuerzas que actúan sobre la piedra son la fuerza que ejerce la cuerda, T, que tiene la dirección de ésta (que es un radio de la trayectoria) y el peso.



Apliquemos el teorema de la energía a la piedra. La fuerza T (tensión de la cuerda) no realiza trabajo, al ser perpendicular a la trayectoria. Sólo realiza trabajo el peso, que deriva de la energía potencial gravitatoria $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ se conserva la energía mecánica:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} M v^2 + M g R (1 - \cos\theta) = cte \qquad [1]$$

[1] implica que v debe cambiar cuando lo hace θ $\Rightarrow$ El movimiento no puede realizarse con celeridad constante (respuesta al apartado (a)).

(b) Para obtener T aplicamos Newton, proyectando en el triedro intrínseco. Podemos copiar las ecuaciones del problema anterior (ecuaciones [3]) sin más que cambiar N por T:

$$\begin{cases} -Mg \operatorname{sen}\theta = MR\ddot{\theta} & [2] \\ T - Mg\cos\theta = MR\dot{\theta}^2 & [3] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = M\left(R\dot{\theta}^2 + g\cos\theta\right)$$

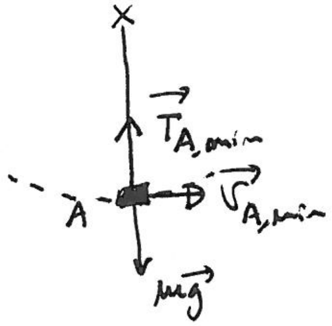
Ahora, recordando (ver problema anterior) que $v = R\dot{\theta}$, podemos usar [1] para expresar $\dot{\theta}$ en función de θ, y sustituyendo en [3] obtener T en función de θ.

Para que el movimiento sea posible, la celeridad mínima en el punto más alto debe ser $\sqrt{gR}$ (ver problema anterior). Por tanto, la celeridad mínima en el punto más bajo, para que sea posible el movimiento es:

$$\left.\begin{array}{l} 2mgR + \frac{1}{2} m \underbrace{v_{B,min}^2}_{= Rg} = \frac{1}{2} m v_{A,min}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow v_{A,min} = \sqrt{5gR}.$$

Aplicando Newton en el punto más bajo, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} T_{A,min} - mg = m \dfrac{v_{A,min}^2}{R} \\ v_{A,min} = \sqrt{5gR} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{T_{A,min} = 6mg}$$



(c) Aplicando Newton en el punto más bajo, donde la tensión es máxima, y haciendo $T_A = 10mg$, tenemos:

$$10mg - mg = m\frac{v_A^2}{R} \Rightarrow v_A = 3\sqrt{gR},$$

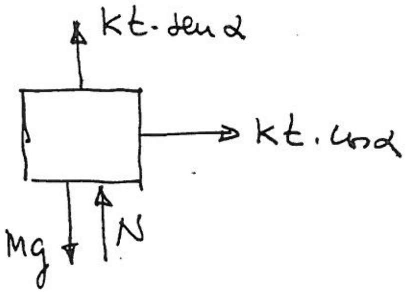
es decir, la velocidad que llevará la masa en el punto más bajo, suponiendo que en esa posición se alcanza la tensión de rotura de la cuerda. Ahora, aplicando la conservación de la energía mecánica entre el punto más alto y el punto más bajo, tenemos:

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = 2mgR + \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow \frac{1}{2} m 9gR - 2mgR = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{5gR}.$$

Para una velocidad en B "ligeramente" superior a $\sqrt{5gR}$, la cuerda se romperá justo antes de llegar al punto más bajo.

Problema 17 Las fuerzas que actúan sobre el bloque están representadas en el esquema:



El bloque se separará del plano en el instante en que la reacción N se anule (hasta entonces debe ser positiva).

Apliquemos Newton, proyectando en los ejes del enunciado, para obtener N:

$$\vec{F}+\vec{N}+M\vec{g}=M\cdot\vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} kt = M\cdot a/\cos\alpha & [1] \\ N + kt\cdot \operatorname{sen}\alpha - Mg = 0 & [2] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad N = Mg - kt\cdot\operatorname{sen}\alpha$$

Haciendo $N=0$ obtenemos el instante $\hat{t}$ en que se levanta el bloque:

$$\hat{t} = \frac{Mg}{k\cdot\operatorname{sen}\alpha} \qquad [3]$$

Ahora, teniendo en cuenta que $a=\frac{dv}{dt}$ (¡cuidado!, lo que siempre es verdad es que $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$. En este caso podemos "quitarle los gorros a las letras" porque el movimiento es rectilíneo, pero en general esta operación no es válida), podemos resolver [1] para obtener v como función del tiempo:

$$\frac{kt\cdot\cos\alpha}{M} = a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = \frac{k\cdot\cos\alpha}{M}\cdot t\cdot dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\underset{\text{inicialmente en reposo}}{v(0)=0}}^{v(t)} dv = \int_0^t \frac{k\cos\alpha}{M}\, t\, dt \Leftrightarrow v(t) = \frac{k\cos\alpha}{M}\cdot\frac{t^2}{2} \qquad [4]$$

La velocidad en el momento $\hat{t}$ de separación del plano será:

$$v(\hat{t}) = \frac{1}{2}\,\frac{k\cos\alpha}{M}\cdot\left(\frac{Mg}{k\,\text{sen}\,\alpha}\right)^2 = \frac{M g^2 \cos\alpha}{2K\,\text{sen}^2\alpha}$$

Teniendo en cuenta que $v = \frac{dx}{dt}$, podemos resolver [4] para obtener $x(t)$:

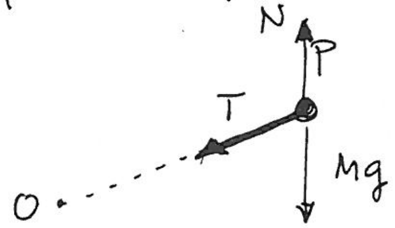
$$v = \frac{K\cos\alpha}{M}\cdot\frac{t^2}{2} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \frac{K\cos\alpha}{2M}\,t^2 dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\underset{\overset{\parallel}{0}}{x(0)}}^{x(t)} dx = \int_0^t \frac{K\cos\alpha}{2M}\,t^2 dt \Rightarrow x(t) = \frac{K\cos\alpha}{6M}\,t^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(\hat{t}) = \frac{K\cos\alpha}{6M}\cdot\left(\frac{Mg}{K\,\text{sen}\,\alpha}\right)^3 = \frac{M^2 g^3 \cos\alpha}{6K^2\,\text{sen}^3\alpha}$$

Problema 13 → Utiliza teorema del Momento cinético (no entra en materia de examen).

Las fuerzas que actúan sobre la partícula son: la que le ejerce el hilo (denominada tensión del hilo, T, dirigida hacia O), la reación N de la mesa (normal a la mesa, puesto que no hay rozamiento) y el peso.



Si aplicamos la 2ª ley de Newton en la dirección vertical obtenemos:

$$N - Mg = 0 \Rightarrow N = Mg \qquad [1]$$

Ahora apliquemos el teorema del momento cinético respecto a O:

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o = \vec{OP} \wedge (\vec{T} + \vec{N} + M\vec{g}) \qquad [2]$$

Pero $\vec{N} + M\vec{g} = 0$ (ver [1]), y $\vec{OP}$ es paralelo a $\vec{T}$ ⇒

⇒ $\vec{OP} \wedge \vec{T} = 0$. Por tanto, concluimos que:

$$\vec{L}_o = \vec{cte} \qquad [3]$$

Particularizando [3] en los momentos inicial y final:

$$\vec{r}_1 \wedge m_1\vec{v}_1 = \vec{r}_2 \wedge m_2\vec{v}_2 \Rightarrow |\vec{r}_1 \wedge m_1\vec{v}_1| = |\vec{r}_2 \wedge m_2\vec{v}_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{r_1} \cdot \cancel{m} v_1 \cdot \operatorname{sen} 90° = \frac{\cancel{r_1}}{2} \cdot \cancel{m} v_2 \cdot \operatorname{sen} 90° \Rightarrow \boxed{v_2 = 2v_1}$$

(b) $\Delta|\vec{p}| = |\vec{p}_2| - |\vec{p}_1| = m(2v_1) - mv_1 = \underline{\underline{mv_1}}$

(c) $\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\left[(2v_1)^2 - v_1^2\right] = \underline{\underline{\frac{3}{2}mv_1^2}}$

(d) Aplicamos el teorema de la energía:

$$W = \Delta E_c = \underline{\underline{\frac{3}{2}mv_1^2}}$$

Problema 19 Consideremos el sistema formado por la maleta y la carretilla. Las fuerzas exteriores a este sistema (una vez que el empleado ha lanzado la maleta) son los pesos y la reación del suelo sobre la carretilla. Como nos dicen que no hay rozamiento entre carretilla y suelo, concluimos que todas estas fuerzas son verticals. Entonces, si aplicamos el teorema del centro de masas a este sistema, deducimos que su cantidad de movimiento horizontal se conserva:

$$P_{horizontal} = cte \qquad [1]$$

Supongamos que inicialmente la carretilla está en reposo. Llamemos M y m a las masas de carretilla y maleta respectivamente, y v a la velocidad final del conjunto (cuando ya no hay deslizamiento relativo entre maleta y carretilla).

Particularizando [1] entre el instante inicial y cualquier instante una vez que maleta y carretilla no deslizan:

$$(M+m)\cdot v = M\cdot 0 + m\cdot 3'5 \Rightarrow v = \frac{3'5\cdot m}{M+m} = \frac{3'5\cdot 15}{35+15} = 1'05 \text{ m/s}$$

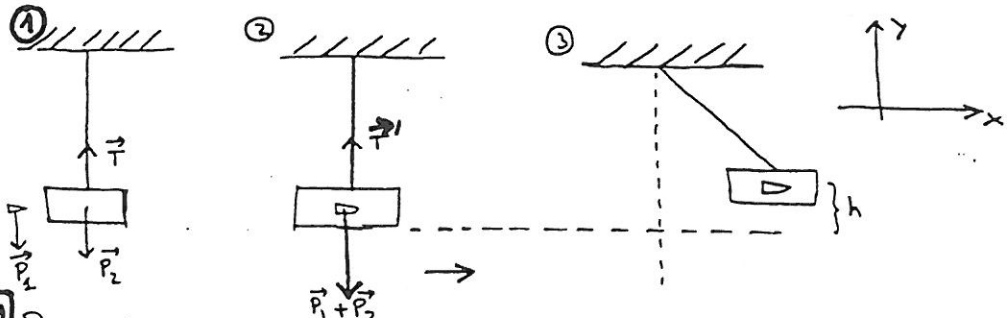
¡Y este resultado no depende del modo en que la maleta alcanzó el reposo relativo a la carretilla (ya sea chocando primero con A o rozando sobre la plataforma)!

(c) $\Delta E_c = \frac{1}{2}(M+m)v^2 - \left(\frac{1}{2}M\cdot 0^2 + \frac{1}{2}m\cdot(3'5)^2\right) =$

$$= \frac{1}{2}(35+15)\cdot(1'05)^2 - \frac{1}{2}15\cdot(3'5)^2 \cong -64'3 \text{ J}$$

El signo menos nos indica que ha habido una pérdida de energía cinética (esta energía se habrá empleado en desgastar la maleta, en deformarla, en romper los vasos que había dentro, etc). Si aparte de la energía cinética incluyeramos las demás formas de energía no habría pérdidas, sino transformaciones de unas en otras.

(41) Considérense las tres situaciones siguientes:



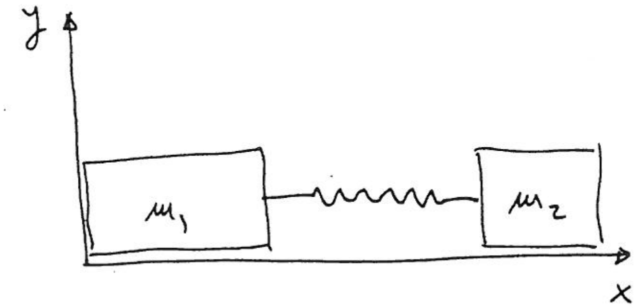
1→2 Para obtener el valor de v' aplicamos la conservación de la cantidad de movimiento en dirección x del sistema bala-bloque, dado que no actúan fuerzas externas en esa dirección en el momento de la colisión.

$$m_1 v = (m_1+m_2)\, v' \rightarrow \left[v' = \frac{m_1 v}{m_1+m_2} \right].$$

2→3 Aplicamos la conservación de la energía mecánica (la única fuerza que realiza trabajo es el peso):

$$\frac{1}{2}\cancel{(m_1+m_2)}\, v'^2 = \cancel{(m_1+m_2)}\, g h \Rightarrow \frac{m_1^2 v^2}{(m_1+m_2)^2} = 2gh \Rightarrow \boxed{v = \frac{\sqrt{2gh}\,(m_1+m_2)}{m_1}}$$

Problema 21

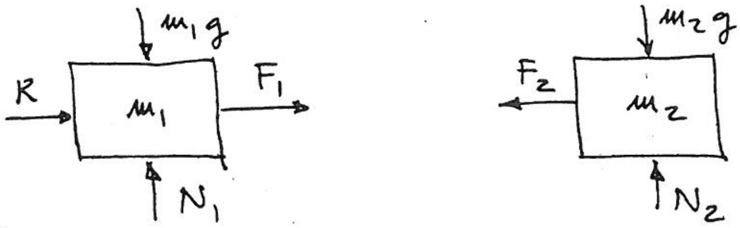


Suponemos despreciables las dimensiones de los bloques (aunque la figura parezca indicar lo contrario).

Según el enunciado, las condiciones iniciales son:

$$t=0 \begin{cases} x_1=0 \ ; \ \dot{x}_1=0 \\ x_2=0'4\ m \quad \dot{x}_2=0 \end{cases} \qquad [1]$$

Las fuerzas que actúan sobre cada bloque son:



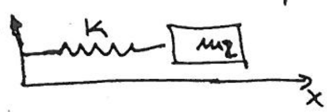
R, N_1 y N_2 son las reacciones de la pared y el suelo, y la fuerza que ejerce el muelle vale $F_1 = F_2 = k(x_2 - x_1 - l_0)$. La reacción R (y también las N_1 y N_2) debe ser positiva, separándose el bloque de la pared cuando se anule. Para ver cuanto vale le aplicamos Newton:

$$\begin{cases} R + F_1 = 0 \rightarrow R = -F_1 \ ; \ R \geq 0 \Rightarrow F_1 \leq 0 & [2] \\ N_1 - m_1 g = 0 \rightarrow N_1 = m_1 g & [3] \end{cases}$$

En el instante inicial (ver [1]) sabemos que $F_1 = k(0'4 - 0 - 0'5) < 0$.

Por tanto R será positiva desde $t=0$ hasta que F_1 se anule

$\Leftrightarrow$ hasta que $x_2 - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{x_1}} - l_0 = 0 \Leftrightarrow$ hasta que $x_2 = l_0 = 0'5\ m$.

Durante esta primera etapa la masa 1 no pinta nada $\Leftrightarrow$ nuestro sistema es equivalente a 

Calculemos ahora la velocidad de m_2 cuando m_1 se separa de la pared; es decir, cuando $x_2 = 0'5$ m. Para ello apliquemos el teorema de conservación de la energía (la única fuerza que trabaja es la del muelle, que es conservativa:

$$E = cte = E_c + E_p = E_c(0) + E_p(0) = E_c(1) + E_p(1)$$

siendo 0 el instante inicial y 1 el de la separación. Sustituyendo valores:

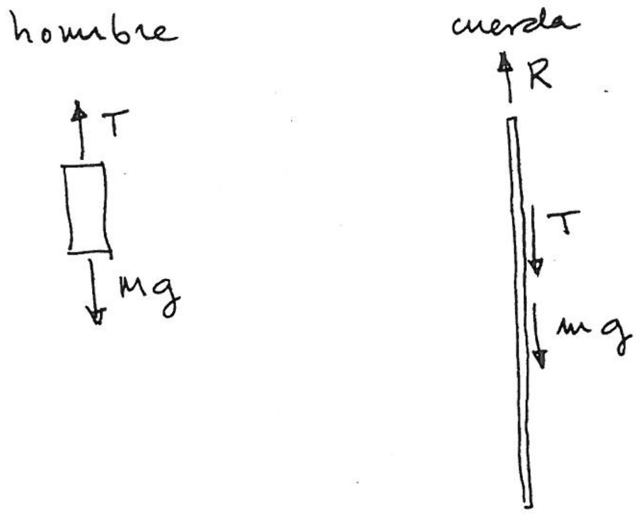
$$\frac{1}{2} m_2 \cdot 0^2 + \frac{1}{2} k \left(x_2^{(0)} - l_0\right)^2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2(1) + \frac{1}{2} k \left(x_2(1) - l_0\right)^2 \iff$$

$$\iff \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 4 \cdot (0'4 - 0'5)^2 = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 2 \cdot \dot{x}_2^2(1) + \frac{1}{2} k \cdot 0^2 \implies \dot{x}_2(1) = 0'1 \cdot \sqrt{2} \text{ m/s}$$

La celeridad del centro de masas en ese instante será:

$$\dot{x}_G(1) = \frac{\dot{x}_1(1) \cdot m_1 + \dot{x}_2(1) \cdot m_2}{m_1 + m_2} = \frac{0 + 0'1 \cdot \sqrt{2} \cdot 2}{1+2} \cong \underline{\underline{0'094 \text{ m/s}}}$$

Problema 22 Llamemos T a la fuerza que el hombre ejerce sobre la cuerda, y R a la fuerza que el gancho ejerce sobre la misma. En la figura hemos representado separadamente las fuerzas que actúan sobre el hombre y sobre la cuerda.



Si la cuerda no se rompe permanecerá en reposo, y aplicándole la 2ª ley de Newton: $R - T - mg = 0 \Rightarrow R = T + mg$ [1]

Por la 3ª ley de Newton, $-R$ es la fuerza que la cuerda le ejerce al gancho, cuya magnitud máxima para que no se suelte es de 600 N. Entonces sustituyendo en [1]:

$$T = R - mg \Rightarrow T_{max} = R_{max} - mg = 600 - 10 \cdot 10 = 500 \text{ N}$$

Ahora aplicamos Newton al hombre, denominando a a su aceleración descendente:

$$Mg - T = M \cdot a \Rightarrow Mg - T_{max} = M \cdot a_{min} \quad [2]$$

El hombre llegará al suelo con velocidad mínima (partiendo del reposo) cuando su aceleración descendente sea mínima. Por tanto:

$$a_{min} = g - \frac{T_{max}}{M} = 10 - \frac{500}{70} = \frac{20}{7} \text{ m/s}^2$$

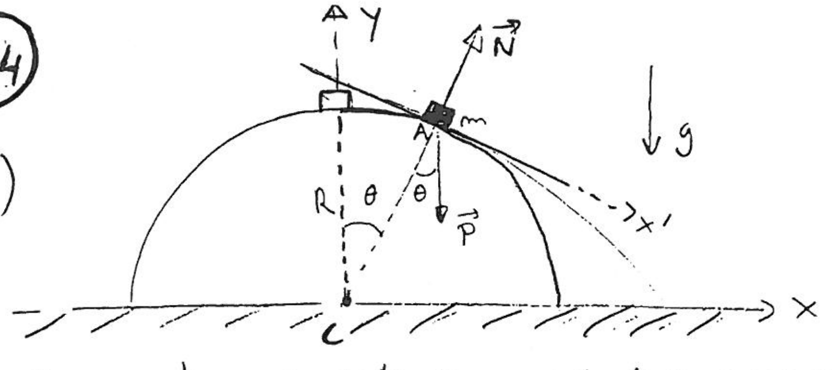
Como la cuerda tiene 15 m, la velocidad mínima de llegada al suelo será:

$$\left.\begin{array}{l} V_{min} = 0 + a_{min} \cdot t_{final} \\ 15 = 0 + 0 + \frac{1}{2} a_{min} \cdot t_f^2 \rightarrow t_f^2 = \frac{30}{20/7} = \frac{21}{2} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{min} = \frac{20}{7} \cdot \sqrt{\frac{21}{2}} \simeq \boxed{9'26 \ m/s}$$

(24)

(a)



Como no hay rozamiento, la reacción de la esfera sobre la partícula lleva dirección normal. Aplicando la 2ª ley de Newton y descomponiéndola en los ejes AX'Y' (tangente y normal), tenemos:

$$\left.\begin{aligned} mg\,\mathrm{sen}\,\theta &= m\frac{dv}{dt} \\ -N + mg\cos\theta &= m\frac{v^2}{R} \end{aligned}\right\}.$$

La primera ecuación nos muestra que la partícula va ganando celeridad mientras cae, y de la segunda deducimos que la reacción normal, $N = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{R}$, va disminuyendo. La partícula abandonará la esfera cuando N sea igual a cero, es decir, cuando

$$\boxed{v^2 = gR\cos\theta}. \quad (1)$$

Por otro lado, aplicando el teorema de la energía y teniendo en cuenta que la reacción normal no realiza trabajo, deducimos que se conserva la energía mecánica. Eligiendo el cero de energía potencial gravitatoria en $Y=0$ obtenemos la relación siguiente entre la celeridad y la posición:

$$\cancel{m}gR = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \cancel{m}gR\cos\theta \Rightarrow \boxed{v^2 = 2gR(1-\cos\theta)}. \quad (2)$$

A partir de (1) y (2) calcularemos el ángulo en el que la normal se anula:

(Sólo PLANTEAMIENTO)

$$\cancel{g}\cancel{R}\cos\theta_0 = 2\cancel{g}\cancel{R}(1-\cos\theta_0) \Rightarrow \cos\theta_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\theta_0 = 48'2^\circ}.$$

(b)
$$\begin{cases} X(0) = R\,\mathrm{sen}\,\theta_0 = R\sqrt{1-\frac{4}{9}} = R\frac{\sqrt{5}}{3} \\ Y(0) = R\cos\theta_0 = R\frac{2}{3} \end{cases} ; \quad \begin{cases} v_x(0) = v(\theta_0)\cos\theta_0 = \sqrt{2gR(1-\frac{2}{3})}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2gR}{3}} \\ v_y(0) = -v(\theta_0)\,\mathrm{sen}\,\theta_0 = -\sqrt{\frac{2gR}{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{10gR}{3}}. \end{cases}$$

Tiro parabólico ($\vec{a} = -g\vec{j}$):

$$\begin{cases} X(t) = X(0) + v_x(0)t = R\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2gR}{3}}\,t & (1) \\ Y(t) = Y(0) + v_y(0)t - \frac{1}{2}gt^2 = R\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10gR}{3}}\,t - \frac{1}{2}gt^2 & (2) \end{cases}$$

Sea $t=\hat{t}$ el tiempo de llegada al suelo. Haciendo en (2), $y(\hat{t})=0$, se obtiene $\hat{t}$. Y sustituyendo en (1), $X(\hat{t})$ es la distancia entre C y el punto de contacto con el suelo.

Se obtiene $X(\hat{t}) \simeq 1'46R$.

Problema 25 Llamemos $\vec{a}$ a la aceleración del plano inclinado respecto a un sistema inercial. Y llamemos $\vec{a}'$ a la aceleración del bloque respecto al plano inclinado. Vamos a estudiar el movimiento del bloque respecto al plano inclinado. Como éste no es un sistema inercial, para poder aplicar las leyes de la dinámica hay que añadir la fuerza de inercia: $\vec{F}_{inercia} = -M\vec{a}$. Por tanto, las "fuerzas" que actúan sobre el bloque son su peso, la reacción N del plano (normal al mismo, puesto que no hay rozamiento) y la fuerza de inercia. Aplicando al bloque la 2ª ley de Newton respecto al plano inclinado (sistema no inercial):

$$\text{a)} \quad M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{inercia} = M\cdot\vec{a}' \longleftrightarrow M\vec{g} + \vec{N} - M\underset{\vec{a}_1^{P_0}}{\vec{a}} = M\cdot\underset{\vec{a}_0^{P}}{\vec{a}'} \qquad [1]$$

y proyectando en las direcciones horizontal ($\rightarrow$) y vertical ($\uparrow$):

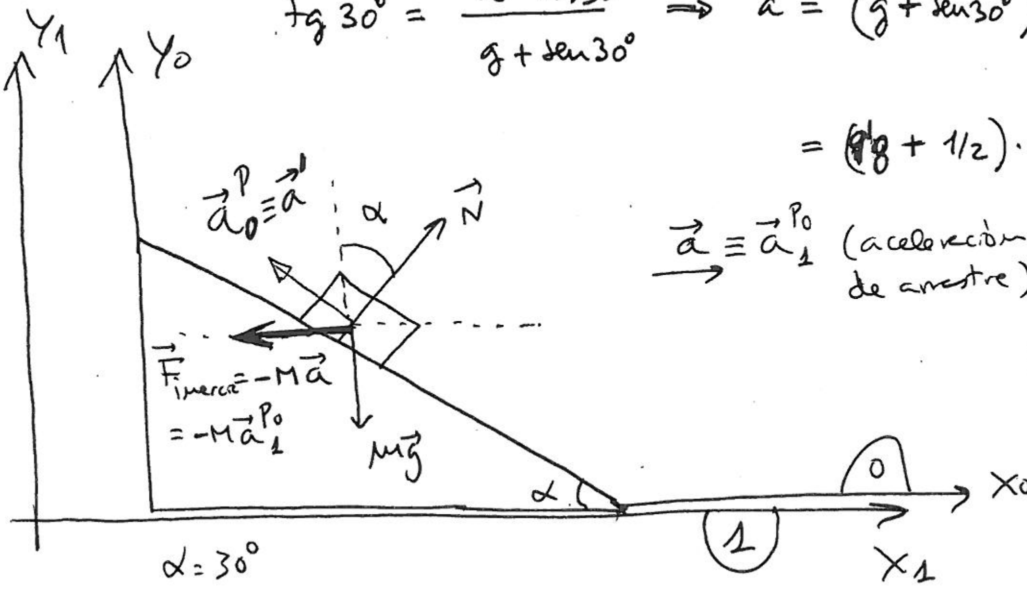
$$(\uparrow) \quad N\cdot\cos 30^\circ - Mg = M\cdot a'\cdot \operatorname{sen} 30^\circ = M\cdot 1\cdot \operatorname{sen} 30^\circ \qquad [2]$$

$$(\rightarrow) \quad N\cdot \operatorname{sen} 30^\circ - M\cdot a = -M\cdot a'\cdot\cos 30^\circ = -M\cos 30^\circ \qquad [3] \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (sacando M factor común y dividiendo):

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a - \cos 30^\circ}{g + \operatorname{sen} 30^\circ} \Rightarrow a = (g + \operatorname{sen}30^\circ)\cdot\operatorname{tg}30^\circ + \cos 30^\circ =$$

$$= (9'8 + 1/2)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sim 6'81 \ m/s^2$$



$\vec{a} \equiv \vec{a}_1^{P_0}$ (aceleración de arrastre)

$\alpha = 30^\circ$

"1" $\rightarrow$ Sistema de referencia inercial

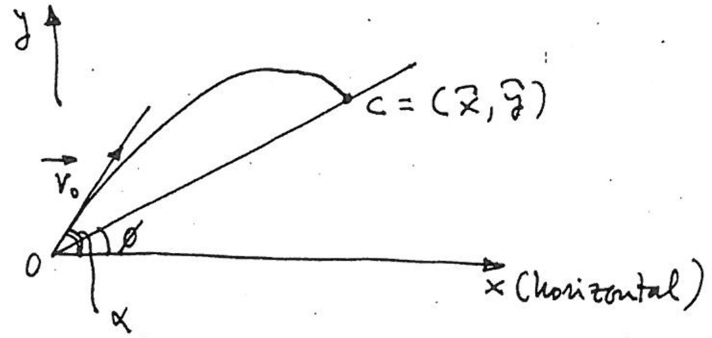
"0" $\rightarrow$ Sistema de referencia no inercial.

b) $\vec{a}_1^{P} = \vec{a}_0^{P} + \vec{a}_1^{P_0}$

$= a' \operatorname{sen}30^\circ \vec{j} - a'\cos 30^\circ \vec{i} + a\vec{i} = a'\operatorname{sen}30^\circ \vec{j} + (a - a'\cos 30^\circ)\vec{i}$.

$$|\vec{a}_1^{P}| = \sqrt{\underbrace{a'^2 \operatorname{sen}^2 30}_{0'25 \frac{m^2}{s^4}} + (a - a'\cos 30^\circ)^2} \simeq 5'96 \ m/s^2.$$

Problema 26



Aplicamos Newton a la piedra: $\vec{F} = m\cdot\vec{a} \Leftrightarrow m\vec{g} = m\cdot\vec{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{a} = \vec{g} = \sim -10\,\vec{j}\ m/s^2$

Integrando: $$\left.\begin{aligned} x &= v_0\cdot\cos\alpha\cdot t \\ y &= v_0\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot t - \tfrac{1}{2}g t^2 \end{aligned}\right\}$$ Ley del movimiento y ecuación de la trayectoria.

La ecuación de "de la colina" es: $y = \operatorname{tg}\phi\cdot x$

Buscamos la intercepción:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g\hat{t}}{2v_0\cos\alpha} = \operatorname{tg}\phi \rightarrow \hat{t} = (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\phi)\frac{2v_0\cos\alpha}{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} \hat{x} &= (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\phi)\cdot\frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g} \\ \hat{y} &= \hat{x}\cdot\operatorname{tg}\phi = (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\phi)\cdot\frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g}\cdot\operatorname{tg}\phi \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$\Rightarrow \text{distancia } |\vec{OC}| = \sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2} = \cancel{(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\phi)\cdot\frac{2v_0^2\cos\alpha}{g}}$$

$$= (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\phi)\frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\phi} =$$

$$= \boxed{(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\phi)\frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g\cdot\cos\phi}}$$

Problema 27 El sistema formado por ambas partículas está aislado (no actúan fuerzas externas sobre el mismo). Por tanto, se conserva la cantidad de movimiento del mismo:

$$\vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t) = \vec{cte} \qquad [1]$$

Proyectando en los ejes del enunciado y particularizando [1] para los instantes anterior y posterior a la colisión:

$$m_0 \cdot v_0 \cdot \vec{i} + 0 = m_0 \cdot \frac{v_0}{2}\left(\cos 45^\circ \vec{i} + \operatorname{sen} 45^\circ \vec{j}\right) + 2 m_0 v_2 \left(\cos\theta_2 \vec{i} - \operatorname{sen}\theta_2 \vec{j}\right)$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cancel{m_0} v_0 = \dfrac{\cancel{m_0} v_0}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2\cancel{m_0} v_2 \cdot \cos\theta_2 \\ 0 = \dfrac{\cancel{m_0} v_0}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 2\cancel{m_0} v_2 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg}\theta_2 = \dfrac{\sqrt{2}\, v_0/4}{v_0 - \sqrt{2}\, v_0/4} = \dfrac{\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{\underline{\theta_2 = \sim 28'7^\circ}} \\ 4 v_2^2 = \dfrac{v_0^2}{8} + \left(v_0 - \dfrac{\sqrt{2}\, v_0}{4}\right)^2 = v_0^2\left(\dfrac{1}{8} + 1 + \dfrac{1}{8} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \underline{\underline{v_2 = \sim 0'37\, v_0}}$$