

PROBLEMA 2: Un sistema cuántico está constituido por un oscilador unidimensional de masa m , siendo $\hat{E}_P = (1/2)m\omega^2\hat{x}^2$ el operador asociado a la energía potencial. Los autovalores de la energía mecánica son $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, $n = 0, 1, 2, \dots$, y las autofunciones son $f_n^E(x)$ (ver página 214 del libro de apuntes). Se pide:

1. Escribir la ecuación de autovalores y autofunciones de la energía mecánica.

Respuesta:

$$\hat{E}f_n^E(x) = E_nf_n^E(x) \Rightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)f_n^E(x) = E_nf_n^E(x).$$

En Mecánica Clásica, un oscilador puede tener cualquier valor de la energía mecánica, con una elección adecuada de las condiciones iniciales. Sin embargo, en el caso del oscilador clásico, la energía está cuantizada y sólo son posibles ciertos valores de la energía mecánica, correspondientes a los autovalores del operador energía.

2. Explique, en base al principio de incertidumbre, que el oscilador cuántico tenga una energía mínima ($E_0 = (1/2)\hbar\omega$) no nula.

Respuesta:

La situación de energía mínima nula en el caso del oscilador clásico libre, corresponde al oscilador en reposo en el origen de coordenadas, en el modelo mecánico del oscilador constituido por una partícula y un muelle, ejerciendo éste una fuerza $\vec{F}_e = -m\omega^2x\vec{i}$, que en el origen (posición de equilibrio) es nula. Sin embargo, sabemos que en Mecánica Cuántica no hay estados cuánticos en los que la posición y la cantidad de movimiento de la partícula tengan dispersión nula, en base al principio de incertidumbre. Si la energía mecánica mínima del oscilador cuántico fuese cero, entonces deberían serlo también, con certeza, la energía potencial y la energía cinética, situación que no puede producirse dado que estos operadores no conmutan entre sí, ni con la energía mecánica, lo cual es una consecuencia directa de la relación de incertidumbre entre la posición y la cantidad de movimiento.

3. Dada la función de onda de una partícula cuántica, $\psi(x)$, la probabilidad de que al medir la posición de la partícula, ésta se encuentre entre x y $x + dx$ es $|\psi(x)|^2dx$. Observe la gráfica de la función de onda $f_0^E(x)$ correspondiente al estado fundamental (página 214) y justifique que es posible que al medir la posición de la partícula en este estado, la partícula se halle en la zona clásicamente prohibida (energía cinética negativa). Esta es la base del *efecto túnel*.

Respuesta:

Si se observan las funciones propias del oscilador cuántico para $n = 0$, $n = 1$ y $n = 2$, en la página 215, vemos que estas funciones (son reales) se extienden en todo el eje OX , desde $-\infty$ hasta $+\infty$ (lo mismo ocurre para el resto de las funciones propias). Por tanto, la densidad de probabilidad de presencia de la partícula (módulo al cuadrado de la función de onda) es no nula en la zona clásicamente prohibida (allí donde la energía potencial de la partícula superaría a la energía mecánica), existiendo una probabilidad diferente de cero de que al medir la posición de la partícula en cualquiera de estos autoestados de la energía, ésta se halle en la zona que prohibiría la Física Clásica (fuera del intervalo de oscilación $[-A, A]$).

4. Suponga que el oscilador se encuentra inicialmente en su estado fundamental $\psi(x, t = 0) = f_0^E(x)$. Transcurrido un tiempo $t = t_1$, ¿cuál es el valor medio de la energía? ¿Y la dispersión? Suponga que entre $t = 0$ y $t = t_1$ no se realiza ninguna medida.

Respuesta:

Como las probabilidades de los valores de la energía no dependen del tiempo, y en $t = 0$ la probabilidad de obtener E_0 es $P(E_0) = 1$, y $P(E_{n \neq 0}) = 0$, en el instante $t = t_1$ tendremos:

$$P(E = E_0) = 1 ; \quad \langle E \rangle = E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} ; \quad \Delta E = 0.$$

5. Suponga que el oscilador se encuentra en un estado inicial $\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{3}}f_0^E(x) + \sqrt{\frac{2}{3}}f_1^E(x)$. ¿Cuál es el valor medio de la energía en el instante inicial? ¿Y la dispersión? ¿Cambian estos resultados a lo largo del tiempo?

Respuesta:

Ni el valor medio de la energía, ni la dispersión, cambian con el tiempo, dado que las probabilidades son constantes en la evolución del estado cuántico. Tenemos:

$$\langle E \rangle = E_0 P(E_0) + E_1 P(E_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \times \frac{\hbar\omega}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)^2 \times \frac{3\hbar\omega}{2} = \frac{7\hbar\omega}{6}.$$

$$\langle E^2 \rangle = E_0^2 P(E_0) + E_1^2 P(E_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \times \frac{\hbar^2\omega^2}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)^2 \times \frac{9\hbar^2\omega^2}{4} = \frac{19\hbar^2\omega^2}{12}.$$

$$\Delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} = \frac{\sqrt{2}\hbar\omega}{3}.$$

6. Suponga que, la partícula se encuentra inicialmente en el estado del apartado anterior. Se realizan tres medidas consecutivas simultáneas. Primero se mide la energía E , a continuación se mide una magnitud A , cuyo operador asociado $\hat{A}$ verifica $[\hat{A}, \hat{E}] = 0$; finalmente se vuelve a medir E .

¿Coincide el resultado de la primera medida con el de la tercera?

Respuesta: Sí, porque los dos operadores son compatibles.

¿Qué ocurriría en el caso de que $[\hat{A}, \hat{E}] \neq 0$?

Respuesta: En general no, porque los dos operadores no son compatibles.

7. Suponga que el sistema, en $t = 0$, se encuentra en el estado dado en el apartado 5. Sea B una magnitud física, representada por el operador $\hat{B}$, cuyas funciones propias son $f_1^B(x), f_2^B(x), \dots$, y cuyos valores propios respectivos son $b_1, b_2, \dots$. Se sabe que:

$$f_0^E(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}f_1^B(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}f_2^B(x) ; \quad f_1^E(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}f_1^B(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}f_2^B(x).$$

¿Cuál es la probabilidad de que al medir B en el instante t , se obtenga b_1 ?

Respuesta:

El estado en el instante t es:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}} f_0^E(x) + \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} f_1^E(x).$$

La probabilidad de que al medir B en el instante t , se obtenga b_1 es:

$$p(b_1, t) = |f_1^B(x) \odot \psi(x, t)|^2.$$

Ahora, teniendo en cuenta que (ver las expresiones del enunciado):

$$f_1^B(x) \odot f_0^E(x) = f_1^B(x) \odot f_0^E(x) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

tenemos:

$$\begin{aligned} p(b_1, t) &= \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} \right|^2 = \frac{1}{6} |e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}} + \sqrt{2} e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}|^2 \\ &= \frac{1}{6} (e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}} + \sqrt{2} e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}})(e^{i\frac{E_0 t}{\hbar}} + \sqrt{2} e^{i\frac{E_1 t}{\hbar}}) = \frac{1}{6} (1 + 2 + \sqrt{2} e^{-i\frac{(E_0 - E_1)t}{\hbar}} + \sqrt{2} e^{i\frac{(E_0 - E_1)t}{\hbar}}) \\ &= \frac{1}{6} [3 + 2\sqrt{2} \cos(\frac{(E_0 - E_1)t}{\hbar})] = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} \cos(\omega t), \end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta = 2\cos\theta.$$